

**ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG**

**VŨ CAO CƯỜNG**

**MÔ HÌNH BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ,**

**BÀI TOÁN BỔ NHIỆM VÀ ỨNG DỤNG**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC MÁY TÍNH**

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG**

**Vũ CAO CƯỜNG**

**MÔ HÌNH BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ,**

**BÀI TOÁN BỔ NHIỆM VÀ ỨNG DỤNG**

Chuyên ngành: KHOA HỌC MÁY TÍNH

Mã số: 60 48 0101

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC MÁY TÍNH

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

**TS. VŨ VINH QUANG**

Thái Nguyên - 2015

## **LỜI CAM ĐOAN**

Luận văn là sự nghiên cứu, tổng hợp các kiến thức mà học viên đã thu thập, tìm hiểu được trong quá trình học tập tại Trường Đại học Công nghệ thông tin và truyền thông – Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn, giúp đỡ của các thầy cô và bạn bè đồng nghiệp. Đặc biệt là sự hướng dẫn, giúp đỡ của thầy giáo TS.Vũ Vinh Quang.

Học viên cam đoan luận văn không phải là sản phẩm sao chép của bất kỳ tài liệu khoa học nào.

*Thái Nguyên, ngày 25 tháng 5 năm 2015*

**Học viên**

**Vũ Cao Cường**

## LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và lòng biết ơn sâu sắc tới TS. Vũ Vinh Quang, người đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo và cung cấp những tài liệu rất hữu ích để tôi có thể hoàn thành luận văn.

Xin cảm ơn lãnh đạo Trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới các thầy, cô giáo của Viện Công nghệ Thông tin và trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông - Đại học Thái Nguyên đã truyền đạt kiến thức, và phương pháp nghiên cứu khoa học trong suốt những năm học vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn các anh chị em học viên cao học K12C và các bạn đồng nghiệp đã động viên, khích lệ tôi trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình, người thân, những người luôn động viên, khuyến khích và giúp đỡ về mọi mặt để tôi có thể hoàn thành công việc nghiên cứu.

*Thái Nguyên, tháng 05 năm 2015*

Tác giả luận văn

**Vũ Cao Cường**



## MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN .....	1
LỜI CẢM ƠN.....	4
LỜI MỞ ĐẦU .....	10
Chương 1 MÔ HÌNH BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA .....	12
1.1 Các khái niệm cơ bản.....	12
1.1.1 Mô hình tổng quát bài toán tối ưu hóa.....	12
1.1.2 Phân loại bài toán tối ưu .....	13
1.2 Bài toán quy hoạch tuyến tính.....	13
1.3 Một số thuật toán kinh điển.....	15
1.3.1 Thuật toán đơn hình.....	15
1.3.2 Thuật toán phân phối .....	23
Chương 2: MỘT SỐ MÔ HÌNH CƠ BẢN.....	33
2.1 Bài toán sản xuất đồng bộ .....	33
2.1.1 Bài toán sản xuất đồng bộ.....	33
2.1.2 Mô hình bài toán sản xuất đồng bộ tổng quát.....	33
2.2 Phương pháp điều chỉnh nhân tử.....	36
2.2.1 Thuật toán điều chỉnh nhân tử: .....	36
2.2.2 Một số trường hợp mở rộng.....	39
2.3 Mô hình bài toán bổ nhiệm .....	42
2.4 Thuật toán Hungary.....	51
2.4.1 Giới thiệu về thuật toán .....	51
2.4.2 Thuật toán Hungary .....	51
Chương 3 ỨNG DỤNG MÔ HÌNH BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ TẠI CÔNG TY CỔ PHẦN CHẾ TẠO THIẾT BỊ TÀU THỦY HẢI VIỆT .....	59
3.1 Giới thiệu sơ lược về công ty .....	59
3.2 Mô hình bài toán trong thực tế sản xuất của công ty. ....	59
3.3 Phân tích mô hình.....	60
3.4 Kết quả khi thực hiện thuật toán điều chỉnh nhân tử .....	61
KẾT LUẬN .....	64
TÀI LIỆU THAM KHẢO .....	66



## DANH MỤC CÁC BẢNG TRONG LUẬN VĂN

Bảng	Tên các bảng trong luận văn	Trang
1.1	Bảng đơn hình	16
1.2	Bảng ma trận chuyển	20
2.1	Các tham số bài toán	29
2.2	Bảng tham số ma trận của bài toán	35



**DANH SÁCH CÁC HÌNH TRONG LUẬN VĂN**

Hình	Tên các hình trong luận văn	Trang
1.1	Sơ đồ khối thuật toán đơn hình	19
1.2	Sơ đồ thuật toán phân phối	24

## LỜI MỞ ĐẦU

Lý thuyết tối ưu hóa là một ngành toán học đang phát triển mạnh, và ngày càng có nhiều ứng dụng quan trọng trong mọi lĩnh vực khoa học, kỹ thuật, công nghệ và quản lý hiện đại. Cuộc cách mạng công nghệ thông tin tạo điều kiện thuận lợi để ứng dụng tối ưu hóa một cách rộng rãi và thiết thực.

Trong toán học, thuật ngữ tối ưu hóa chỉ tới việc nghiên cứu các bài toán có dạng:

Cho trước: một hàm  $f(x): A \rightarrow R$

Tìm: một phần tử  $x_0$  thuộc  $A$  sao cho  $f(x_0) \leq f(x); \forall x \in A$  ("cực tiểu hóa") hoặc sao cho  $f(x_0) \geq f(x); \forall x \in A$  ("cực đại hóa"). Nhiều bài toán thực tế có thể được mô hình theo cách tổng quát trên. Lời giải khả thi nào cực tiểu hóa (hoặc cực đại hóa) hàm mục tiêu được gọi là lời giải tối ưu.

Trong hoạt động thực tiễn, chúng ta luôn mong muốn đạt được kết quả tốt nhất theo các tiêu chuẩn nào đó. Tất cả những mong muốn đó chính là lời giải của những bài toán tối ưu hóa. Mỗi vấn đề khác nhau trong thực tế dẫn đến các bài toán tối ưu khác nhau. Dựa trên nền tảng của toán học hình thành nên một lớp các phương pháp toán học giúp ta tìm ra lời giải tốt nhất cho các bài toán thực tế, gọi là phương pháp tối ưu hóa.

Với nguyện vọng muốn tìm hiểu về lý thuyết tối ưu hóa cũng như những lĩnh vực ứng dụng thực tế của chúng, tôi đã chọn đề tài "**Mô hình bài toán sản xuất đồng bộ, bài toán bổ nhiệm và ứng dụng**" làm Luận văn tốt nghiệp của mình. Mục đích của đề tài là tìm hiểu cơ sở toán học của lý thuyết tối ưu và một số mô hình trong kinh tế thường gặp, cách giải quyết những bài toán kinh tế này và bước đầu ứng dụng qua những ví dụ cụ thể.

Luận văn gồm 3 chương không kể phần mở đầu và phần kết luận với các nội dung chính sau:

Chương 1: Luận văn trình bày cơ sở của lý thuyết tối ưu hóa bao gồm giới thiệu tổng quan mô hình bài toán tối ưu tổng quát và phân loại các bài toán tối ưu cơ bản,

giới thiệu chi tiết mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính và cơ sở toán học của lý thuyết cực trị hàm nhiều biến số.

Chương 2: Luận văn nghiên cứu một số thuật toán giải các bài toán tối ưu đối với mô hình tổng quát của bài toán Quy hoạch tuyến tính, như thuật toán đơn hình, thuật toán phân phối, bài toán sản xuất đồng bộ, bài toán bổ nhiệm. Ngoài ra luận văn cũng đề cập đến thuật toán Hungary giải bài toán bổ nhiệm, một mô hình cơ bản trong lý thuyết thuật toán.

Chương 3: Luận văn đưa ra mô hình bài toán sản xuất đồng bộ ứng dụng vào thực tế lao động sản xuất tại Công ty cổ phần chế tạo thiết bị tàu thủy Hải Việt, với mục đích tìm ra kế hoạch sản xuất tối ưu của Công ty nhằm đạt năng suất hiệu quả cao nhất trong sản xuất.

## Chương 1

### MÔ HÌNH BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA

Trong chương này, luận văn sẽ trình bày một số kiến thức cơ bản về mô hình tổng quát của bài toán tối ưu hóa, việc phân loại các bài toán tối ưu và cơ sở toán học của bài toán tối ưu. Các kiến thức này được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3, 4].

#### 1.1 Các khái niệm cơ bản

##### 1.1.1 Mô hình tổng quát bài toán tối ưu hóa

Tối ưu hóa là một trong những lĩnh vực quan trọng của toán học có ảnh hưởng đến hầu hết các lĩnh vực khoa học, công nghệ và kinh tế và xã hội. Việc tìm giải pháp tối ưu cho một bài toán thực tế nào đó chiếm một vai trò hết sức quan trọng như việc tiến hành lập kế hoạch sản xuất hay thiết kế hệ thống điều khiển các quá trình ... Nếu sử dụng các kiến thức trên nền tảng của toán học để giải quyết các bài toán cực trị, người ta sẽ đạt được hiệu quả kinh tế cao. Điều này phù hợp với mục đích của các vấn đề đặt ra trong thực tế hiện nay.

Bài toán tối ưu tổng quát được phát biểu như sau:

Cực đại hóa (cực tiểu hóa) hàm:

$$f(X) \rightarrow \max(\min)$$

Với các điều kiện:

$$g(X) = b_i, \quad i \in J_1 \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} g_j(X) \leq b_j, & j \in J_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} g(X) \geq b_k, & k \in J_3 \end{cases} \quad (1.3)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (1.4)$$

Trong đó  $f(X)$  được gọi là hàm mục tiêu, Các điều kiện (1.1) được gọi là ràng buộc đẳng thức. Các điều kiện (1.2), (1.3) được gọi là ràng buộc bất đẳng thức. Các điều kiện (1.4) được gọi là ràng buộc về dấu.  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  là véc tơ thuộc không gian  $R^n$ . Tập các véc tơ  $X$  thỏa mãn hệ ràng buộc lập nên một miền  $D$  được gọi là miền phương án (hay miền chấp nhận được), mỗi điểm  $X \in D$  gọi là một phương án.

Một phương án  $x^* \in D$  làm cho hàm mục tiêu  $f(x)$  đạt max (min) được gọi là phương án tối ưu.

### 1.1.2 Phân loại bài toán tối ưu

Dựa trên mô hình tổng quát, người ta thường phân loại lớp các bài toán tối ưu như sau:

- **Qui hoạch tuyến tính:** là những bài toán mà hàm mục tiêu  $f(x)$  và tất cả các hàm ràng buộc  $g_i(x), g_j(x), g_k(x)$  là tuyến tính.
- **Qui hoạch phi tuyến:** là những bài toán một trong hàm mục tiêu  $f(x)$  hoặc các hàm ràng buộc  $g_i(x), g_j(x), g_k(x)$  là phi tuyến.
- **Qui hoạch lồi:** Là các bài toán qui hoạch mà các hàm mục tiêu  $f(x)$  là lồi trên tập các ràng buộc  $D$  lồi.
- **Qui hoạch lõm:** Là các bài toán qui hoạch mà các hàm mục tiêu  $f(x)$  là lõm trên tập các ràng buộc  $D$  lõm.
- **Qui hoạch rời rạc:** Bài toán tối ưu được gọi là qui hoạch rời rạc nếu miền ràng buộc  $D$  là tập hợp rời rạc. Trong trường hợp riêng khi các biến chỉ nhận giá trị nguyên thì ta có qui hoạch nguyên.
- **Qui hoạch đa mục tiêu:** Nếu trên cùng một miền ràng buộc ta xét đồng thời các hàm mục tiêu khác nhau (trong đó  $f(x)$  là hàm vec tơ).

Trong các lĩnh vực kinh tế kỹ thuật thì qui hoạch phi tuyến, qui hoạch tuyến tính là những bài toán thường gặp.

### 1.2 Bài toán quy hoạch tuyến tính

Từ một số các mô hình trong thực tế, ta có mô hình tổng quát cho bài toán quy hoạch tuyến tính như sau:

$$\text{Xác định các biến } x_j (j=1,2,\dots,n) \text{ sao cho: } F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Max}(\text{Min})$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i \in I_1 \subset M) \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i \in I_2 = M \setminus I_1) \quad (1.6)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in J \subset N) \quad (1.7)$$

Với  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $N = \{1, 2, \dots, n\}$

Vector  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn các điều kiện (1.5) - (1.7) được gọi là một phương án của bài toán. Tập các nghiệm thỏa mãn hệ ràng buộc được gọi là miền phương án ký hiệu là  $D$ . Phương án thỏa mãn điều kiện để hàm mục tiêu đạt Max(min) được gọi là phương án tối ưu.

**Dạng chính tắc** (Các ràng buộc ở dạng đẳng thức)

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i \in M)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in N)$$

**Dạng chuẩn tắc** (Các ràng buộc ở dạng bất đẳng thức)

$$F(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \text{Min}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad (i \in M)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in N)$$

Sử dụng các ký hiệu vector và ma trận, mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát được biểu diễn như sau:

$$f(X) = C^T X \rightarrow \text{Max(min)}$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Trong đó:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

### 1.3 Một số thuật toán kinh điển

#### 1.3.1 Thuật toán đơn hình

##### 1.3.1.1 Mô tả thuật toán gốc

Cơ sở của phương pháp này được Dantzig công bố năm 1947 có tên gọi là phương pháp đơn hình. Xuất xứ tên gọi như vậy vì những bài toán đầu tiên được giải bằng phương pháp đó có các ràng buộc dạng:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, x_j > 0, (j = 1, 2, \dots, n)$$

Mà tập các điểm  $x \in \square^n$  thỏa mãn các ràng buộc trên là một đơn hình trong không gian  $n$  chiều.

##### 1.3.1.2 Tư tưởng chung

Phương pháp đơn hình dựa trên hai nhận xét sau:

- Nếu bài toán QHTT có phương án tối ưu thì có ít nhất một đỉnh của  $D$  là phương án tối ưu.
- Đa diện lồi  $D$  có một số hữu hạn đỉnh.

Như vậy phải tồn tại một thuật toán hữu hạn. Thuật toán gồm 2 bước như sau:

*Bước 1:* Tìm 1 phương án cực biên.

*Bước 2:* Kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án đó.

+ Nếu điều kiện tối ưu được thỏa mãn thì phương án đó là tối ưu. nếu không ta chuyển sang phương án cực biên mới sao cho làm tốt hơn giá trị hàm mục tiêu.

+ Kiểm tra điều kiện tối ưu đối với phương án mới.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - ĐHTN

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

Người ta thực hiện một dãy các thủ tục như vậy cho đến khi nhận được phương án tối ưu, hoặc đến tình huống bài toán không có phương án tối ưu.

### 1.3.1.3 Cơ sở lý thuyết

Xét bài toán QHTT dưới dạng chính tắc:

$$\begin{aligned} f(x) = C^T X \Rightarrow \text{Min} \\ AX = b \end{aligned} \quad X \geq 0$$

Trong đó  $A = (a_{ij})_{n \times m}$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ;  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , giả sử rằng hạng của ma trận  $A$  là  $m$ .

Giả sử  $x$  là một phương án cực biên nào đó.

$$\text{Ta ký hiệu: } J^* = \{j \mid x_j > 0\} \quad (1.8)$$

Vì các véc tơ  $A_j, j \in J^*$  là độc lập tuyến tính nên  $|J^*| \leq m$ .

**Định nghĩa:** Phương án cực biên  $x$  được gọi là không suy biến nếu  $|J^*| = m$ , suy biến nếu  $|J^*| < m$ .

Ta chọn một hệ thống  $m$  véc tơ độc lập tuyến tính  $\{A_j, j \in J\}$  sao cho  $J \supseteq J^*$ . Hệ thống đó là cơ sở của  $X$ , các véc tơ  $A_j, j \in J$  và biến  $x_j, j \in J$  được gọi là các véc tơ và các biến cơ sở tương ứng. Các véc tơ và các biến  $A_j, x_j, (j \notin J)$  gọi là các véc tơ và các biến phi cơ sở.

Nếu  $x$  không suy biến thì tồn tại một cơ sở duy nhất, đó là  $J = J^*$ .

Mọi véc tơ  $A_k$  phi cơ sở có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các véc tơ cơ sở:

$$A_k = \sum_{j \in J} z_{jk} A_j \quad (1.9)$$

Trong các hệ số  $z_{jk}$  được xác định duy nhất bởi việc giải hệ phương trình:

$$a_{jk} = \sum_{j \in J} z_{jk} a_{ij}, (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.10)$$



Bài toán QHTT được gọi là không suy biến nếu tất cả các phương án cực biên của nó đều không suy biến.

Giả sử bài toán không suy biến và ta đã tìm được một phương án cực biên  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  và cơ sở của nó  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .

Đối với phương án cực biên này ta có:

$$\sum_{j=1}^m x_j A_j = b, x_j > 0, (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.11)$$

Với giá trị hàm mục tiêu:

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j = Z_0, x_j > 0, (j = 1, 2, \dots, m) \quad (1.12)$$

Ta tính các đại lượng sau:

$$\sum_{j=1}^m z_{jk} c_j = z_k \quad (1.13)$$

Ký hiệu:

$$\Delta_k = z_k - c_k = \sum_{j=1}^m z_{jk} c_j - c_k \quad (1.14)$$

**Định lý 1.1:** Nếu đối với các phương án cực biên  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$  mà các điều kiện sau được thỏa mãn:

$$\Delta_k \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n \quad (1.15)$$

thì  $x$  là phương án tối ưu.

Nhận xét:

1. Trong (1.9) nếu  $A_j$  là một véc tơ cơ sở khi đó tồn tại chỉ một hệ số  $z_{ij} = 1$ , tất cả các hệ số khác đều bằng 0 và ta có:  $\Delta_j = c_j - c_j = 0, j \in J$

Và trong thực tế để kiểm tra điều kiện tối ưu của phương án cực biên  $x$  ta chỉ kiểm tra:  $\Delta_k \geq 0, \forall k \notin J$

2. Người ta có thể chứng minh rằng nếu bài toán không suy biến thì (1.15) cũng là điều kiện cần của bài toán tối ưu.

**Định lý 1.2:** Nếu tồn tại một chỉ số  $k$  sao cho  $\Delta_k < 0$  thì ta có thể tìm được ít nhất một phương án  $x'$  mà đối với nó  $Z' > Z$ .

Trong thực tế Dantzig đã chứng minh rằng số các bước lặp sẽ giảm đáng kể nếu ta thay véc tơ  $A_k$  bởi véc tơ  $A_s$  thỏa mãn  $\Delta_s = \min_k \{\Delta_k \mid \Delta_k < 0\}$  và khi đó véc tơ  $A_r$  được xác định theo công thức:

$$\theta_s = \min \left\{ \frac{x_j}{z_{js}} \mid z_{js} > 0 \right\} = \frac{x_r}{z_{rs}} \quad (1.16)$$

Ta có phương án cực biên mới  $x'$  mà các thành phần của nó có dạng:

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \frac{x_r}{z_{rs}} z'_{js}, & j \neq r \\ \frac{x_r}{z_{rs}}, & j = r \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\text{Với cơ sở của nó là: } A_j, j \in J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\} \quad (1.18)$$

Xuất phát từ cơ sở lý thuyết trên, chúng ta có thuật toán sau đây.

#### 1.3.1.4 Thuật toán đơn hình

**Bước xuất phát:** Tìm một phương án cực biên  $x^0$  và cơ sở  $J_0$  tương ứng. Tìm các hệ số khai triển  $z_{jk}$  và các ước lượng  $\Delta_k$ .

**Bước 1:** Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu

- Nếu  $\Delta_k \leq 0, \forall k \notin J_0$  thì  $x^0$  là phương án tối ưu, thuật toán kết thúc.
- Nếu  $\Delta_k > 0$  thì chuyển sang bước 2.

**Bước 2:** Kiểm tra dấu hiệu hàm mục tiêu giảm vô hạn: Với mỗi  $k \notin J_0$  mà  $\Delta_k > 0$  thì kiểm tra các hệ số khai triển  $z_{jk}$  của cột  $A_k$  tương ứng:

+ Nếu có một  $\Delta_k > 0$  mà tất cả  $z_{ik} \leq 0 \forall i \in J_0$  thì kết luận hàm mục tiêu giảm vô hạn trên miền ràng buộc. Bài toán không có lời giải hữu hạn. Thuật toán kết thúc.

+  $\forall k \notin J_0$  mà  $\Delta_k > 0$  đều tồn tại ít nhất một hệ số  $z_{ik} > 0$  thì chuyển sang bước 3

**Bước 3:** Xác định cột xoay, dòng xoay, phần tử trục

- Chọn chỉ số  $s \notin J_0 : \Delta_s = \max\{\Delta_k > 0, k \notin J_0\}$ , đánh dấu cột  $s$  là cột xoay
- Tìm chỉ số  $r$  đạt min:  $\theta = \frac{x_r^0}{z_{rs}} = \min\left\{\frac{x_j^0}{z_{js}}, z_{js} > 0\right\}$ , đánh dấu hàng  $r$  là hàng xoay

**Bước 4:** Tính các  $x_j^1, f(x^1), \Delta_k^1, z_{jk}^1$  trong cơ sở mới  $J^1 = (J_0 \setminus r) \cup s$  theo các công thức trên. Ghi nhận các kết quả trong một bảng mới. Quay trở lại bước 1.

Để nhận được bảng đơn hình mới từ bảng đơn hình cũ ta làm như sau:

- + Thay  $A_r$  bằng  $A_s$ ,  $c_r$  bằng  $c_s$ .
- + Chia các phần tử xoay (hàng  $r$ ) cho phần tử trục  $z_{rk}$  ta được hàng  $r$  mới gọi là hàng chuẩn.
- + Mỗi phần tử khác ngoài hàng xoay trừ đi tích của phần tử cùng hàng với nó trên cột xoay với phần tử cùng cột với nó trên hàng chuẩn được phần tử cùng vị trí trong bảng đơn hình mới.

**1.3.1.5 Công thức đổi cơ sở, bảng đơn hình**

Ta xét các công thức chuyển từ phương án cực biên  $x$  với cơ sở  $J$ , sang phương án cực biên  $x'$  với cơ sở  $J'$ . Xuất phát từ công thức (1.17) cho phép tính các thành phần của  $x'$ . Ta cần thiết lập công thức tính các số  $z'_{jk}$ .

Ta có:

$$A_s = \sum_{j \in J} z_{ij} A_j \Rightarrow A_r = \frac{1}{z_{rs}} (A_s - \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq r}} z_{js} A_j) \quad (1.19)$$

Mặt khác:

$$A_k = \sum_{j \in J} (z_{jk} A_j + z_{rk} A_r) \quad (1.20)$$

Thay biểu thức của  $A_r$  từ (1.19) vào (1.20) ta có:

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{j \in J} z_{jk} A_j + \frac{z_{rk}}{z_{rs}} (A_s - \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq r}} z_{js} A_j) \\ A_k &= \sum_{\substack{j \in J \\ j \neq r}} (z_{jk} A_j - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js}) A_j + \frac{z_{sk}}{z_{rs}} \end{aligned}$$

Đây là công thức biểu diễn  $A_k$  qua cơ sở mới  $J' = J \setminus \{r\} \cup \{s\}$ . Khi đó ta có:

$$z'_{jk} = \begin{cases} z_{jk} - \frac{z_{rk}}{z_{rs}} z_{js}, j \neq r \\ \frac{z_{rk}}{z_{rs}}, j = r \end{cases}$$

$$\text{Sau khi có } z'_{jk} \text{ ta tính: } \Delta'_k = \sum_{j \in J} z'_{jk} c_j - c_k \quad (1.21)$$

Để dễ tính toán, tại mỗi bước lặp ta thiết lập bảng đơn hình

$c_j$	Cơ sở	Phương án	$c_1$ $A_1$	$c_2 \dots$ $A_2 \dots$	$c_j \dots$ $A_j \dots$	$c_r \dots$ $A_r \dots$	$c_m \dots$ $A_m \dots$	$c_k$ $A_k$	$\dots c_s$ $\dots A_s$	$\dots c_h$ $\dots A_h$
$c_1$	$A_1$	$x_1$	1	0...	0...	0...	0...	$z_{1k}$	$z_{1s}$	$z_{1n}$
$c_2$	$A_2$	$x_2$	0	1	0	0	0	$z_{2k}$	$z_{2s}$	$z_{2n}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$c_j$	$A_j$	$x_j$	0	0	1	0	0	$z_{jk}$	$z_{js}$	$z_{jn}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$c_r$	$A_r$	$x_r$	0	0	0	1	0	$z_{rk}$	$z_{rs}$	$z_{rn}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$c_m$	$A_m$	$x_m$	0	0	0	0	1	$z_{mk}$	$z_{ms}$	$z_{mn}$
		F	0	0...	0...	0...	0...	$\Delta_k$	$\dots \Delta_s$	$\dots \Delta_n$

**Bảng 1.1: Bảng đơn hình**

Sử dụng các phương pháp biến đổi theo thuật toán sau:

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - ĐHTN

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

- Nếu tất cả các số trong hàng cuối (trừ F) đều  $\geq 0$ , nghĩa là  $\Delta_k \geq 0, \forall k$ , khi đó  $x$  là phương án tối ưu. Thuật toán dừng.

- Nếu hàng cuối (không kể F) tồn tại số âm mà mọi số trong cột tương ứng đều  $\leq 0$  thì bài toán không tồn tại phương án tối ưu.

Ngược lại:

+ Chọn cột  $s$  sao cho:  $\Delta_s = \min \{ \Delta_k \mid \Delta_k < 0 \}$ , Cột  $s$  gọi là cột xoay. Véc tơ  $A_s$  được đưa vào cơ sở.

+ Chọn hàng  $r$  mà tỉ số:  $\theta_r = \frac{x_r}{z_{rs}} = \min \left\{ \frac{x_j}{z_{js}} \mid z_{js} > 0 \right\}$ . Hàng  $r$  gọi là hàng xoay.

Véc tơ  $A_r$  bị đưa ra khỏi cơ sở.

Phần tử  $z_{rs} > 0$  là giao của cột xoay và dòng xoay gọi là phần tử trục. Các phần tử  $z_{js}, j \neq r$  gọi là phần tử xoay.

Theo các công thức (1.17), (1.18), (1.21), bảng đơn hình mới suy được từ bảng đơn hình cũ bằng cách thay  $c_r, A_r$  trong hàng xoay bằng  $c_s, A_s$ . Sau đó thực hiện các phép biến đổi dưới đây:

- 1) Chia mỗi phần tử ở hàng xoay cho phần tử trục, kết quả thu được gọi là hàng chuẩn.
- 2) Đối với các hàng còn lại thực hiện biến đổi theo công thức

$$\text{Hàng mới} = \text{hàng cũ tương ứng} - \text{Hàng chuẩn} \times \text{phần tử xoay}.$$

Toàn thể phép biến đổi trên gọi là phép quay xung quanh trục  $z_{rs}$ . Sau khi thực hiện phép xoay ta có một phương án mới và một cơ sở mới, tiến hành kiểm tra điều kiện tối ưu.

### 1.3.2 Thuật toán đơn hình mở rộng

Xét bài toán

$$\begin{cases} f(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \Rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, (i=1 \dots m) \\ x_j \geq 0, (j=1 \dots n) \end{cases}$$

Ta đưa thêm vào một số ẩn cơ sở mới  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  và chuyển bài toán về dạng mới

$$\begin{cases} f^*(X) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \Rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, (i=1 \dots m) \\ x_j \geq 0, (j=1 \dots m+n) \end{cases}$$

Trong đó  $M$  là một số dương đủ lớn, các biến  $x_{n+i}$  gọi là biến giả (như vậy bài toán  $M$  có  $n+m$  biến). Lúc này bài toán mới thu được là dạng chính tắc có thể áp dụng phương pháp đơn hình để giải.

### **Một số chú ý**

+ Ta thấy rằng giá trị hàm mục tiêu  $f^*$  và các số kiểm tra  $\Delta_j^*$  là hàm bậc nhất đối với  $M$  theo dạng  $aM + b$ . Vì  $M > 0$  đủ lớn cho nên dấu của  $\Delta_j^*$  phụ thuộc vào dấu hệ số  $a$ . nếu  $a < 0 \Leftrightarrow \Delta_j^* < 0$  và  $a > 0 \Leftrightarrow \Delta_j^* > 0$ . Vì vậy khi lập bảng đơn hình ta sẽ tách dòng  $m+1$  thành hai dòng  $(m+1)$  và  $(m+2)$ . Số  $a$  và  $b$  lần lượt điền vào dòng  $(m+2)$  và  $(m+1)$  khi phải lập bảng mới sẽ chọn cột khóa dựa vào số dương lớn nhất ở dòng  $(m+2)$ , sau đó so sánh đến số ở dòng  $(m+1)$ .

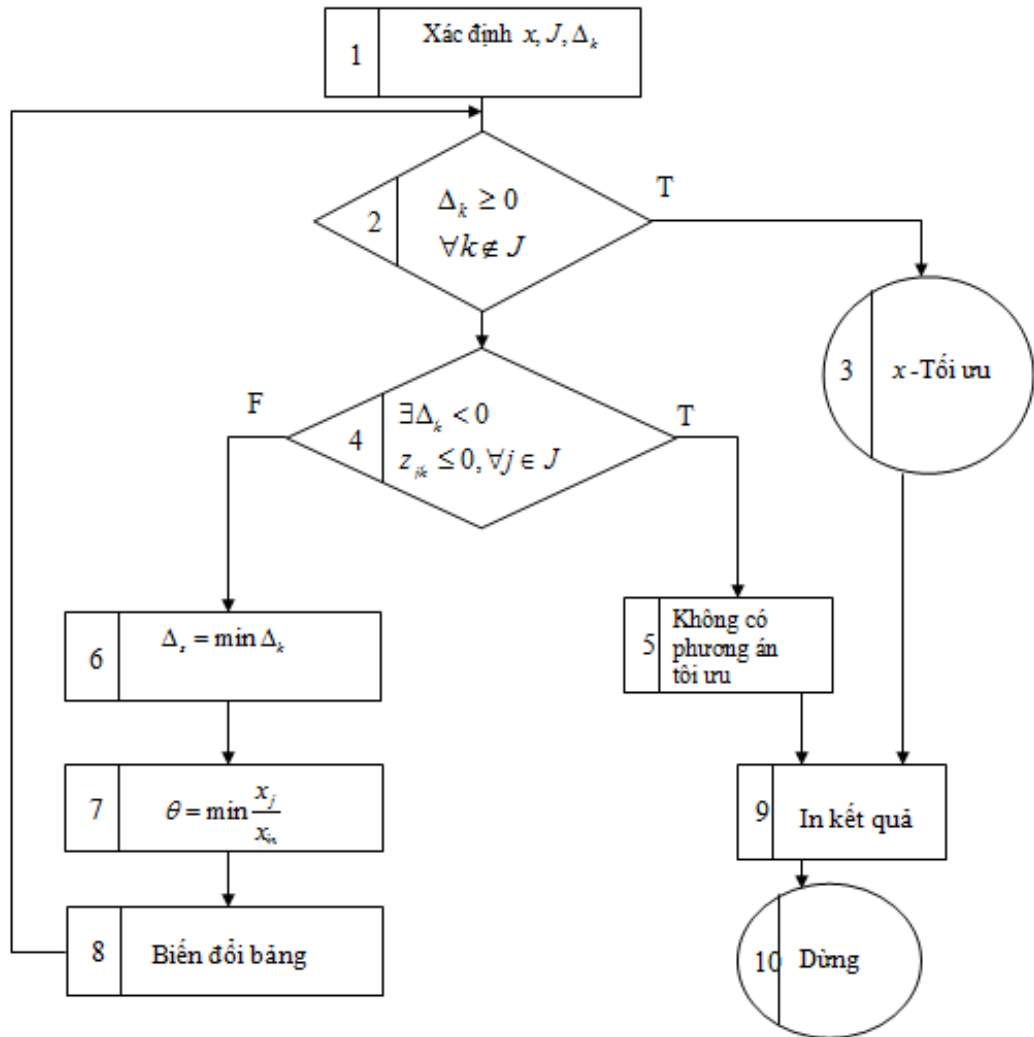
+ Khi viết bài toán  $M$ , cho bài toán gốc. Nếu bài toán gốc đã có một số véc tơ đơn vị thì ta chỉ cần thêm một số biến giả sao cho nó có đủ  $m$  véc tơ đơn vị.

+ Dòng khóa vẫn chọn như cũ, khi sang bảng mới nếu một véc tơ giả bị loại khỏi cơ sở thì các số liệu trên cột chứa véc tơ giả đó không phải tính nữa. Nếu như tất cả các véc tơ giả bị loại khỏi cơ sở thì phương án nhận được lúc đó chính là phương án cực biên của bài toán gốc và dòng  $(m+2)$  không cần đến nữa. Việc giải bài toán tiếp

tục bình thường.

+ Đối với bài toán max, nếu giải trực tiếp thì ta sẽ thêm  $-M$  vào hàm mục tiêu.

Trên cơ sở lý thuyết trên, thuật toán đơn hình tổng quát được mô tả bằng sơ đồ khối sau đây:



**Hình 1.1: Sơ đồ khối thuật toán đơn hình**

Thuật toán đơn hình có thể thực hiện trên máy tính điện tử thông qua một phần mềm tính toán. Với những bài toán QHTT có biến số quá lớn (như dạng bài toán vận tải), trong thực tế không thể giải bằng phương pháp đơn hình được, lúc này người ta sử dụng một thuật toán khác được gọi là thuật toán phân phối.

### 1.3.2 Thuật toán phân phối

### 1.3.2.1 Bài toán phân phối

Một loại hàng hoá nào đó cần được vận chuyển từ  $m$  nơi giao (trạm phát)  $A_1, A_2, \dots, A_m$  với các lượng hàng dự trữ tương ứng là  $a_1, a_2, \dots, a_m$  tới  $n$  nơi nhận (trạm thu)  $B_1, B_2, \dots, B_n$  với các yêu cầu tương ứng là  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Ký hiệu  $c_{ij}$  là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ nơi giao  $A_i$  tới nơi nhận  $B_j$ . Hãy xác định những đại lượng  $x_{ij}$  cho mọi con đường  $(i, j)$  sao cho tổng cước phí vận chuyển là nhỏ nhất. Bài toán được mô tả bằng bảng ma trận vận chuyển sau đây:

Đặt  $x_{ij}$  là số đơn vị hàng hoá cần vận chuyển từ địa điểm giao  $A_i$  đến địa điểm nhận  $B_j$ . Ta luôn coi bài toán là cân bằng thu – phát, tức là tổng số hàng hoá theo khả năng ở các nơi giao bằng tổng số hàng hoá theo nhu cầu ở các nơi nhận.

Nơi nhận hàng / nơi giao hàng	$B_1$	...	$B_j$	...	$B_n$	Dự trữ
$A_1$	$c_{11}$ $x_{11}$	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
...	...	...	...	...	...	...
$A_i$	$c_{i1}$ $x_{i1}$	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
...	...	...	...	...	...	...
$A_m$	$c_{m1}$ $x_{m1}$	...	$c_{mj}$ $x_{mj}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Yêu cầu	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$



**Bảng 1.2: Bảng ma trận vận chuyển**

Khi đó bài toán vận tải tương đương với mô hình bài toán tối ưu sau đây:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1.22)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1 \dots n) \quad (1.23)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1 \dots m) \quad (1.24)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1 \dots m; j = 1 \dots n. \quad (1.25)$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (1.26)$$

Hệ gồm  $m+n$  phương trình đại số tuyến tính với  $m \times n$  ẩn.

Trong số tất cả các nghiệm không âm của hệ (1.23) - (1.25) cần tìm một nghiệm sao cho hàm mục tiêu (1.26) đạt giá trị nhỏ nhất.

*Các tính chất của bài toán vận tải*

Bài toán vận tải luôn có phương án tối ưu

Nếu bài toán không cân bằng thu - phát thì ta luôn đưa được về dạng cân bằng bằng cách:

- $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$  thì thành lập thêm một trạm thu giả  $b_{n+1}$  với lượng hàng tương ứng là  $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$ , chi phí là  $c_{i,n+1} = 0, (\forall i = 1 \dots m)$ .
- $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$  thì thành lập thêm một trạm phát giả  $a_{m+1}$  với lượng hàng tương ứng là  $\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$ , chi phí là  $c_{m+1,j} = 0, (\forall j = 1 \dots n)$

Các véc tơ hệ số  $A_{ij}$  ứng với các ẩn số  $x_{ij}$  có tối đa  $m+n-1$  véc tơ độc lập tuyến

tính trong đó véc tơ  $A_{ij}$  có tọa độ trên dòng  $i$  và dòng  $m+j$  bằng 1, còn lại bằng 0.

Một số định nghĩa

Ô nằm trong dòng  $i$ , cột  $j$  ký hiệu là  $(i, j)$ . Một ô  $(i, j)$  mà  $x_{ij} > 0$  gọi là ô chọn, các ô còn lại được gọi là ô loại.

Một dãy các ô được gọi là dãy chuyền nếu dãy ô đó có tính chất cứ 2 ô liên tục của dãy thì cùng nằm trên một dòng (hoặc một cột). Cứ 3 ô liên tục của dãy thì không thể cùng nằm trên một dòng (hoặc một cột).

Chu trình (hay vòng) là một dãy chuyền mà ô đầu tiên và ô cuối cùng trên cùng một dòng (hoặc một cột).

Tập hợp tất cả các ô chọn tạo thành vòng gọi là vòng chọn.

Vòng loại (ứng với ô loại  $(i, j)$ ) là một vòng trong đó chỉ có ô loại  $(i, j)$  các ô còn lại là ô chọn.

Một phương án chứa vòng chọn nào đó gọi là phương án có chu trình hay là phương án chứa vòng. Một phương án không chứa chu trình nào gọi là phương án không có vòng.

**Định lí 1.3:** Điều kiện cần và đủ để một dãy ô chứa vòng là hệ véc tơ  $A_{ij}$  tương ứng phụ thuộc tuyến tính.

**Hệ quả:**

- + Một dãy ô không chứa vòng  $\Leftrightarrow$  Hệ véc tơ tương ứng độc lập tuyến tính.
- + Một phương án cực biên của bài toán vận tải có tối đa  $m+n-1$  ô chọn.

**Định nghĩa:** Một phương án cực biên có đúng  $m+n-1$  ô chọn gọi là phương án cực biên không suy biến.

Bất kỳ  $m+n$  ô trở lên đều chứa vòng.

**Định lý 1.4:** Nếu tập  $E$  gồm  $m+n-1$  không tạo thành vòng, khi thêm một ô không thuộc tập  $E$  vào tập  $E$  ta sẽ được một vòng duy nhất.

**Hệ quả:** Giả sử tập ô tạo thành vòng duy nhất thì khi bỏ đi một ô, các ô còn lại không tạo thành vòng.

### 1.3.2.2 Thuật toán phân phối

Giả sử ta có một phương án cực biên không suy biến  $X_0$ , xét một vòng loại ứng với ô loại  $(i, j)$ , bắt đầu từ ô loại  $(i, j)$  ta đánh số thứ tự  $1, 2, \dots$

Tập các ô có số thứ tự lẻ gọi là nửa vòng lẻ  $V_l$ .

Tập các ô có số thứ tự chẵn gọi là nửa vòng chẵn  $V_c$ .

Như vậy số ô của  $V_l$  bằng số ô của  $V_c$ .

Số kiểm tra của ô loại  $(i, j)$  là:

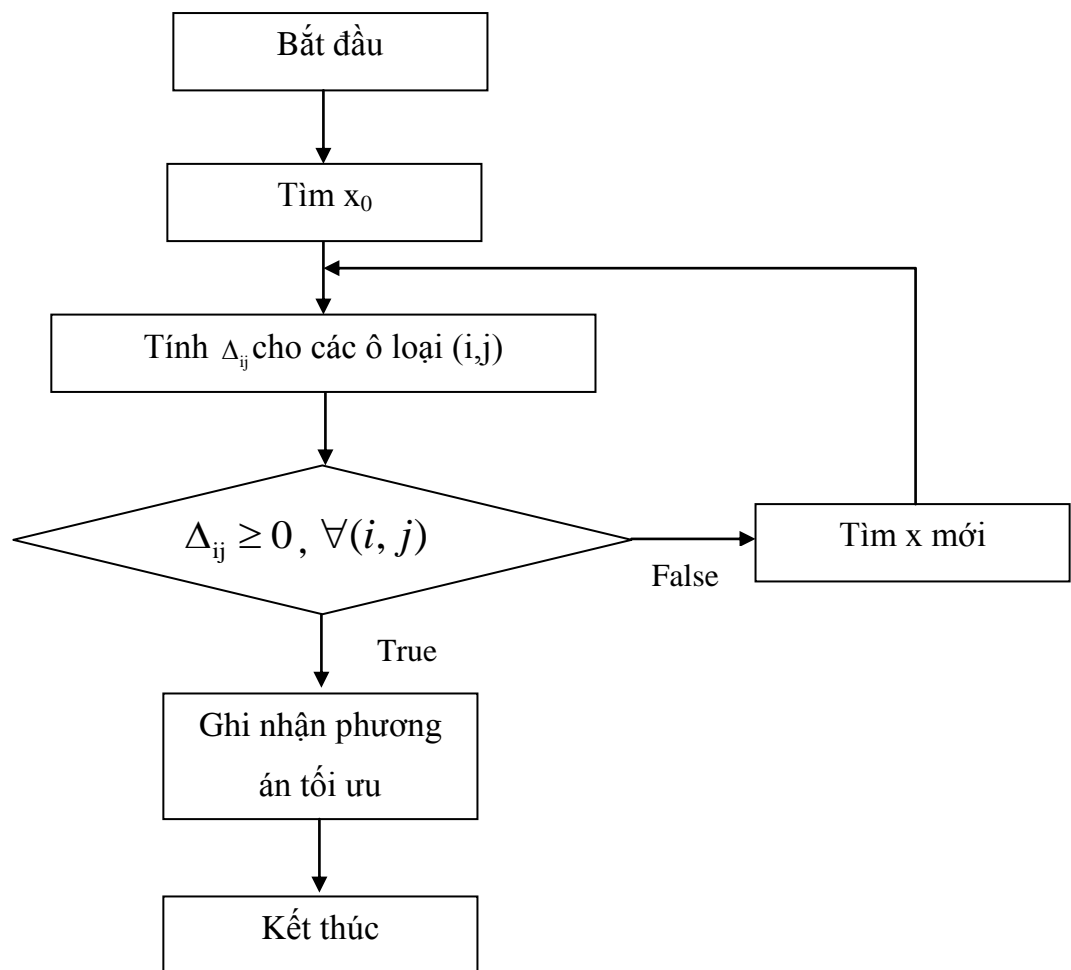
$$\Delta_{ij} = \sum_{(i,j) \in V_l} c_{ij} - \sum_{(i,j) \in V_c} c_{ij}$$

### **Định lý 1.5:**

+ Nếu với mọi ô loại  $(i, j)$  ta đều có  $\Delta_{ij} \geq 0$  thì  $X_0$  là phương án tối ưu.

+ Nếu tồn tại một ô loại  $(i, j)$  mà  $\Delta_{ij} < 0$  thì  $X_0$  chưa tối ưu và có phương án mới tốt hơn.

### 1.3.2.3 Sơ đồ mô tả thuật toán phân phối



**Hình 1.2: Sơ đồ thuật toán phân phối**

Điều kiện của phương án  $X_0$  là có  $m+n-1$  ô chọn không tạo thành vòng.

Thuật toán phân phối được thực hiện theo các bước như sau

Bước 1: Xác định phương án cực biên không suy biến ban đầu  $X_0$

Sử dụng 1 trong 3 phương pháp sau đây

a/ Phương pháp góc tây bắc:

Xây dựng nghiệm chấp nhận được của bài toán bắt đầu bằng việc chuyển chở lớn nhất có thể được từ điểm phát thứ nhất tới điểm thu thứ nhất (do đó được gọi là phương pháp góc tây bắc) tức là  $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$ . Quá trình lặp lại theo đúng quy tắc như vậy cho đến khi phân phối xong.

b/ Phương pháp cực tiểu cước phí:

Xác định ô  $(i_0, j_0)$  với  $c_{i_0, j_0} = \min\{c_{i, j}, \forall (i, j)\}$ . Nếu cực tiểu đạt tại nhiều ô thì ta chọn một ô theo quy tắc từ vụng. Sau đó phân phối hàng nhiều nhất có thể được theo tuyến  $i_0 \rightarrow j_0$  một lượng:  $x_{i_0, j_0} = \min\{a_{i_0}, b_{j_0}\}$ . Quá trình lặp lại cho đến khi phân phối xong.

c/ Phương pháp Fogel

**Định nghĩa:** Hiệu giữa giá trị cước phí nhỏ thứ nhì và nhỏ nhất trên cùng một cột (hoặc một dòng) được gọi là độ lệch của cột (dòng).

Để tìm phương án ban đầu ta làm như sau:

Bước 1: Chọn cột (dòng) có độ lệch lớn nhất ưu tiên phân phối trước, phân phối tối đa vào ô có cước phí min của cột (dòng) đã chọn (đối với bài toán max, độ lệch là cước phí lớn nhất và lớn nhì).

Lặp lại quá trình

Bước 2: Tính các số kiểm tra

Thực hiện theo phương pháp quy không ô chọn: Chọn các số  $r_i, s_j$  sao cho đối với các ô chọn thì  $c_{ij} + r_i + s_j = 0$ . Khi đó số kiểm tra của các ô loại lúc này là  $c_{ij} + r_i + s_j$ .

Nếu tồn tại một số kiểm tra bằng 0, mọi số kiểm tra còn lại đều dương thì bài toán có vô số phương án tối ưu.

Bước 3: Điều chỉnh để tìm phương án mới

Giả sử ô loại  $(i, j)$  có số kiểm tra  $\Delta_{ij} < 0$  ta điều chỉnh các số liệu của các ô thuộc vòng loại này như sau:

Chọn  $\theta = \min_{(i,j) \in V_c} \{x_{ij}\}$ . Khi đó:

+  $x'_{ij} = \theta$  nếu  $(i, j)$  là ô loại.

+  $x'_{ij} = x_{ij} - \theta$  nếu  $(i, j) \in V_c$ .

+  $x'_{ij} = x_{ij} + \theta$  nếu  $(i, j) \in V_l$ .

Khi điều chỉnh như vậy thì ô loại trở thành ô chọn và ít nhất một ô chọn trở thành ô loại.

Quay lại bước 2.

Tương tự như thuật toán đơn hình, thuật toán phân phối cũng được thực hiện bằng 1 phần mềm tính toán trên máy tính điện tử.

Trên cơ sở các thuật toán đã trình bày, chúng ta có thể sử dụng các ngôn ngữ lập trình cơ bản như C++, Pascal, Java để thực hiện thuật toán trên máy tính điện tử. Một trong những phương pháp thông dụng hiện nay đối với các kỹ sư không chuyên tin là sử dụng các phần mềm có sẵn để tìm nghiệm của các bài toán quy hoạch tuyến tính.

Sau đây là một phương pháp sử dụng phần mềm Matlab giải bài toán quy hoạch tuyến tính:

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - ĐHTN

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>

Hàm mục tiêu:  $f = c^T \cdot x \rightarrow \min$

Các ràng buộc:

$$A \cdot x \leq b$$

$$A^{eq} \cdot x = b^{eq}$$

Các biên của nghiệm:  $lb \leq x \leq ub$

(lb: lower bounds, ub: upper bounds)

Khi gặp bài toán  $f = c^T \cdot x \rightarrow \max$ , chỉ cần đặt  $\max f = -\min(-f)$

Lệnh thường dùng để giải QHTT là:

`[ x, fval, exitflag, output] = linprog (c, A, b, Aeq, beq, lb, ub)`

`[ x, fval, exitflag, output] = bintprog (c, A, b, Aeq, beq)`

Trong đó:

Lệnh `linprog` để lấy các nghiệm không âm.

Lệnh `bintprog` để lấy các nghiệm nguyên có giá trị 1 hoặc 0 (Số người, số máy, quyết định có hoặc không).

Trong dấu `()` là các véc tơ và ma trận đã cho của mục tiêu và các ràng buộc.

Trong dấu `[]` là các đại lượng cần tính:

`x`- giá trị tối ưu của nghiệm

`fval`- giá trị min của mục tiêu

`exitflag`- số nguyên thông báo kết thúc tính toán. Các kết quả tính toán khi `exitflag = 1`, được coi là thành công tốt đẹp, nghĩa là hàm số hội tụ về 1 nghiệm. Các kết quả tính tương ứng `exitflag ≤ 0` được coi là không thành công với các giải thích tương ứng.

`output`- cho các thông tin về phép tính đã thực hiện.

**Kết luận:** Nội dung chính của chương 1 luận văn đã trình bày các khái niệm về bài toán tối ưu, mô hình toán học và một số thuật toán cơ bản giải bài toán tối ưu như thuật toán đơn hình, thuật toán phân phối. Các kiến thức trên đã được tham khảo trong

các tài liệu [1, 2, 3, 4]. Đây là những kiến thức quan trọng làm cơ sở để trình bày những kết quả đưa ra trong chương 2 và chương 3 của luận văn.



## Chương 2:

### MỘT SỐ MÔ HÌNH CƠ BẢN

Trong chương này, luận văn sẽ tập chung trình bày các cơ sở lý thuyết giải bài toán sản xuất đồng bộ, bài toán bổ nhiệm, đây là những mô hình đóng vai trò quan trọng trong thực tế sản xuất, trên cơ sở mô hình toán học của các bài toán, luận văn sẽ nghiên cứu thuật toán điều chỉnh nhân tử giải bài toán sản xuất đồng bộ, thuật toán Hungary giải bài toán bổ nhiệm. Đây chính là các thuật toán đặc trưng trong ngành Công nghệ thông tin giải quyết các bài toán tối ưu hóa.

#### 2.1 Bài toán sản xuất đồng bộ

##### 2.1.1 Bài toán sản xuất đồng bộ

Giả sử có một số loại máy cùng tham gia vào một quy trình sản xuất các chi tiết cho một loại sản phẩm nào đó. Năng suất của các máy khi sản xuất các chi tiết khác nhau cũng khác nhau. Bài toán đặt ra là: phải bố trí công việc cho các máy trong một đơn vị thời gian sao cho việc sản xuất được “**đồng bộ**” để đạt được hiệu quả cao nhất, sản xuất ra nhiều sản phẩm nhất.

Bài toán được đặt ra với giả thiết: Mỗi loại máy chỉ có một cái và mỗi sản phẩm chỉ cần đúng một chi tiết cho mỗi loại. (một đơn vị thời gian được hiểu là một ca làm việc.)

Với mọi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ký hiệu:  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

##### 2.1.2 Mô hình bài toán sản xuất đồng bộ tổng quát

Có  $m$  loại máy  $M_i, (i \in I_m)$ , mỗi loại một cái, sản xuất ra  $n$  loại chi tiết  $C_j, (j \in I_n)$  của một loại sản phẩm. Mỗi sản phẩm chỉ cần một chi tiết của mỗi loại. Biết ma trận năng suất  $(a_{ij})_{m \times n}$ , trong đó  $a_{ij}$  là năng suất trong một ca của máy  $M_i$  khi sản xuất loại chi tiết  $C_j$ ,  $x_{ij}$  là phần thời gian trong một ca mà máy  $M_i$  dùng để sản xuất chi tiết  $C_j$ .

Yêu cầu lập kế hoạch phân công hoạt động cho các máy sao cho số sản phẩm được sản xuất ra là nhiều nhất.

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu - ĐHTN

<http://www.lrc-tnu.edu.vn/>  

$$z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot x_{ij}$$

Số lượng chi tiết  $j$  sản xuất được trong một ca là:

Với mọi  $i \in I_m$  và  $j \in I_n$ ,  $z$  là số sản phẩm được sản xuất ra trong một ca.

Ký hiệu vector  $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{m1}, \dots, x_{mn}, z)$  là  $(x_{ij}, z), i \in I_m, j \in I_n$ .

*Mô hình toán học:*

Tìm:  $(x_{ij}, z), i \in I_m, j \in I_n$  sao cho:  $z \rightarrow \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, & i \in I_m \\ z \leq z_j, & \forall j \in I_n \\ x_{ij} \geq 0, & (i, j) \in I_m \times I_n \\ z \geq 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Đây là một bài toán quy hoạch tuyến tính. Ký hiệu  $A_{ij}$  và  $A_z$  theo thứ tự là các vector cột trong ma trận điều kiện ứng với các ẩn  $x_{ij}$  và  $z$ . Như vậy  $A_{ij}$  có thành phần thứ  $i$  bằng 1 và thành phần thứ  $m+j$  bằng  $-a_{ij}$ ;  $A_z$  có  $m$  thành phần đầu bằng 0 còn  $n$  thành phần cuối đều bằng 1.

Bài toán có thể được biểu diễn dưới dạng bảng  $m$  hàng và  $n$  cột, như bài toán vận tải. Mỗi hàng đặc trưng cho một loại máy, mỗi cột đặc trưng cho một loại chi tiết. Ô  $(i, j)$  đặc trưng cho việc sử dụng máy  $i$  để sản xuất chi tiết  $j$  nên ô này ghi năng suất  $a_{ij}$  tương ứng (bảng 2.1):

Chi tiết Máy	$C_1$	...	$C_{n-1}$	$C_n$
$M_1$	$a_{11}$	...	$a_{1n-1}$	$a_{1n}$
$M_2$	$a_{21}$	...	$a_{2n-1}$	$a_{2n}$
...	...	...	...	...
$M_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mn-1}$	$A_{mn}$

**Bảng 2.1: Các tham số của bài toán**

Do đó bảng này còn được gọi là bảng năng suất của bài toán sản xuất đồng bộ.

**Các tính chất của bài toán:**

1) Vector  $(x_{ij}, z), i \in I_m, j \in I_n$  thỏa mãn tất cả các ràng buộc của bài toán là một phương án của bài toán. Tuy nhiên, bất kỳ vector  $(x_{ij})$  nào thỏa mãn các ràng buộc của bài toán cũng cho tương ứng một họ phương án với thành phần  $z$  được xác định bởi:

$$0 \leq z \leq \min_{j \in I_n} z_j$$

Với:

$$z_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \quad (j \in I_n)$$

Trong số đó, rõ ràng phương án có  $z = \min_{j \in I_n} z_j$  là tốt hơn cả. Vì vậy từ nay ta sẽ gọi vector  $(x_{ij}), i \in I_m, j \in I_n$ , hoặc ma trận  $(x_{ij})_{m \times n}$  thỏa mãn các ràng buộc của bài toán (SXĐB) là một phương án của bài toán với quy ước là thành phần  $z$  của nó bằng:

$$\min_{j \in J} \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij}.$$

2) Hàm mục tiêu của một bài toán sản xuất đồng bộ luôn bị chặn trên trong miền ràng buộc của nó, vì với mọi phương án  $(x_{ij})$  của bài toán:

$$z \leq \sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}$$

Ngoài ra, rõ ràng vector  $(x'_{ij})$  với  $x'_{ij} = \frac{1}{n}, \forall (i, j) \in I_m \times J$  với giả thiết năng lực của máy là làm không ít hơn  $n$  chi tiết trong 1 ca.

## 2.2 Phương pháp điều chỉnh nhân tử

Nếu tìm được một phương án  $(x_{ij}, z)$  của bài toán và một phương án  $(u_i, v_j)$  của bài toán đối ngẫu sao cho:

$$\begin{cases} x_{ij} \cdot (u_i - a_{ij}v_j) = 0, (i, j) \in I_m \times I_n \\ z \cdot \left( \sum_{j=1}^n v_j - 1 \right) = 0 \\ v_j \cdot \left( z - \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} \right) = 0, j \in I_n \end{cases} \quad (2.2)$$

thì  $(x_{ij}, z)$  là một phương án tối ưu của bài toán và  $(u_i, v_j)$  là một phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu.

Nội dung của phương pháp điều chỉnh nhân tử như sau:

Trước hết, chúng ta xây dựng một phương án cực biên suy rộng  $(u_i, v_j)$  của bài toán, đó là một hệ thống nhân tử hàng và nhân tử cột; đồng thời xác định các ô chọn. Gọi  $S$  là tập ô  $(i, j)$  tương ứng với  $m+n-1$  ràng buộc chặt độc lập tuyến tính dạng  $u_i - a_{ij}v_j = 0$ . Các ô thuộc  $S$  được lấy làm các ô chọn, nên  $S$  được gọi là tập ô chọn của phương án cực biên suy rộng  $(u_i, v_j)$ .

### 2.2.1 Thuật toán điều chỉnh nhân tử

**Bước 1:** Xây dựng hệ thống nhân tử  $(u_i, v_j)$  (hay phương án cực biên suy rộng của bài toán đối ngẫu:

Trước hết, xác định ô  $(i, j)$  có  $a_{ij}$  lớn nhất. Giả sử:  $a_{i_0 j_0} = \max_{i,j} a_{ij}$ . Đặt:  $v_{j_0} = 1$  và  $u_{i_0} = a_{i_0 j_0} \cdot v_{j_0}$ . Ô  $(i_0, j_0)$  được lấy làm ô chọn và được đánh dấu. Các nhân tử còn lại được xác định như sau:

- Trên hàng  $i$  đã có nhân tử  $u_i$ , tìm ô có năng suất lớn nhất nằm trên cột  $j$  chưa có nhân tử. Nhân tử của cột này được xác định bởi:  $v_j = \min_i \left( \frac{u_i}{a_{ij}} \right)$  trong đó min lấy với

mọi hàng  $i$  đã có nhân tử. Ô tương ứng với nhân tử  $v_j$  đó được lấy làm ô chọn và được đánh dấu.

- Trên cột  $j$  đã có nhân tử  $v_j$ , tìm ô có năng suất lớn nhất nằm trên hàng  $i$  chưa có nhân tử. Nhân tử của hàng này được xác định bởi:  $u_i = \max_j (a_{ij}v_j)$  / với mọi cột  $j$  đã có nhân tử ) Ô tương ứng nhân tử  $u_i$  đó được lấy làm ô chọn và được đánh dấu.

Tiếp tục quá trình trên cho đến khi xây dựng được toàn bộ hệ thống nhân tử. Như vậy, trừ ô chọn  $(i_0, j_0)$  đầu tiên tương ứng với hai nhân tử  $u_{i_0}$  và  $v_{j_0}$ ; sau đó, mỗi lần xây dựng được một nhân tử thì đồng thời cũng xác định được một ô chọn. Do đó, tổng số các ô chọn là  $m+n-1$ , và hiển nhiên chúng không tạo thành vòng.

Ký hiệu tập ô chọn là  $S$ , ta có:

$$\begin{cases} \forall i \in I_m, \forall j \in I_n, u_i - a_{ij}v_j \geq 0 \\ \forall (i, j) \in S, u_i - a_{ij}v_j = 0 \\ \sum_{j=1}^n v_j \geq 1 \\ \forall j \in I_n, v_j \geq 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$(u_i, v_j)$  vừa tìm được là một phương án cực biên suy rộng của bài toán đối ngẫu.

**Bước 2:** Xây dựng giả phương án  $(x_{ij}, z)$ :

$$z = \frac{\sum_{i=1}^m u_i}{\sum_{j=1}^n v_j}$$

Các  $x_{ij}$  được tính nhờ vào giá trị của  $z$  và hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i \in I_m \\ \sum_{i=1}^m a_{ij}x_{ij} = z, j \in I_n \\ x_{ij} = 0, (i, j) \notin S \end{cases} \quad (2.4)$$

Vì  $S$  không tạo thành vòng nên nó có ô treo (trên một hàng hay một cột nào đó chỉ có đúng một ô của  $S$ ).

- Nếu  $(i, j) \in S$  là ô treo trên hàng  $i$  thì  $x_{ij} = 1$ .

- Nếu  $(i, j) \in S$  là ô treo trên cột  $j$  thì  $x_{ij} = \frac{z}{a_{ij}}$ .

Sau khi đã tính được  $x_{ij}$  ứng với ô treo  $(i, j)$ , loại ô đó ra khỏi  $S$ ; tập ô chọn còn lại cũng không tạo thành vòng nên lại có ô treo. Dựa vào giá trị của  $z$ , và các  $x_{ij}$  đã tính, ta tính được mọi giá trị  $x_{ij}$  với  $(i, j) \in S$ . Chuyển sang bước 3.

**Bước 3:** Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu:

+ Nếu  $x_{ij} \leq 0$  với mọi  $(i, j) \in S$  thì  $(x_{ij}, z), (i \in I_m, j \in I_n)$  là một phương án cực biên của bài toán.

+ Nếu tồn tại một  $(i, j) \in S$  sao cho  $x_{ij} < 0$  thì  $(x_{ij}, z)$  vừa tìm được không phải là một phương án của bài toán.

Chuyển sang bước 4.

**Bước 4:** Điều chỉnh nhân tử và các ô chọn:

+ Nhân tử nào không bị điều chỉnh thì giữ nguyên, nhân tử nào bị điều chỉnh thì nhân với một số thực  $l$ , gọi là hệ số điều chỉnh.

+ Trong các ô thuộc  $S$  có  $x_{ij} < 0$ , chọn ô có  $x_{ij}$  nhỏ nhất; giả sử đó là ô  $(i_0, j_0)$ .

+ Không điều chỉnh  $v_{j_0} : v'_{j_0} = v_{j_0}$ ; điều chỉnh  $u_{i_0} : u'_{i_0} = lu_{i_0}$ .

+ Các nhân tử còn lại được điều chỉnh theo qui tắc sau:

- Trên hàng  $i$  đã điều chỉnh nhân tử, nếu có  $(i, j) \in S$  nằm trên cột chưa điều chỉnh nhân tử thì chúng ta điều chỉnh nhân tử cột này:  $v'_j = lv_j$ .

- Trên cột  $j$  đã điều chỉnh nhân tử, nếu có  $(i, j) \in S$  nằm trên hàng chưa điều chỉnh nhân tử thì chúng ta điều chỉnh nhân tử hàng này:  $u'_i = lu_i$ .

Việc điều chỉnh được thực hiện cho đến khi không còn điều chỉnh được nữa.

Đặt:  $K = \{(i, j) \mid u_i' = u_i, v_j' = lv_j\}$ .

Hệ số điều chỉnh  $l$  được xác định bởi:  $\lambda = \min_{(i,j) \in K} \left( \frac{u_i}{a_{ij} \cdot v_j} \right)$  giả sử:  $\lambda = \frac{u_r}{a_{rs} \cdot v_s}$ .

Thay  $l$  bằng giá trị vừa tìm được, ta có hệ thống nhân tử mới  $(u_i', v_j')$ . Đó là một phương án cực biên suy rộng tốt hơn phương án  $(u_i, v_j)$  của bài toán đối ngẫu, với tập ô chọn là:

$$S' = (S \setminus \{(i_0, j_0)\}) \cup \{(r, s)\}$$

Lặp lại quá trình trên từ bước 2 đối với  $(u_i', v_j')$ . Sau một số hữu hạn lần thực hiện phép lặp, chúng ta sẽ tìm được một phương án tối ưu.

## 2.2.2 Một số trường hợp mở rộng

### 1) Trường hợp bài toán có ma trận năng suất $(a_{ij})_{m \times n}$ , với $a_{ij} \geq 0$

Vẫn áp dụng được thuật toán. Tuy nhiên, khi điều chỉnh nhân tử, có thể xảy ra trường hợp tập  $K = \{(i, j) \mid u_i' = u_i, v_j' = lv_j\}$  gồm toàn những ô có  $a_{ij} = 0$ . Như vậy,  $l$  không xác định. Để tiếp tục thuật toán, người ta thay các ô có  $a_{ij} = 0$  bằng  $a_{ij} = e > 0$  và gọi là bài toán  $e$ . Dễ thấy rằng mọi phương án của bài toán đối ngẫu  $e$  đều trở thành phương án của bài toán đối ngẫu khi cho  $e = 0$ . Sử dụng  $e$  thực chất chỉ là để xác định ô đưa vào tập ô chọn mới nên ở mỗi bước có thể tính giá trị của  $z$  ứng với bài toán xuất phát.

### 2) Trường hợp mỗi loại có nhiều máy

Thuật toán giải bài toán dựa trên giả thiết: Mỗi loại máy chỉ có một cái và mỗi thành phẩm chỉ cần đúng một chi tiết cho mỗi loại.

Tuy nhiên mô hình trên có thể được mở rộng trong trường hợp có nhiều máy khác nhau.

**Ví dụ 2.1**

Một xí nghiệp có 1 máy loại M1, 3 máy loại M2 và 2 máy loại M3. Các máy này cùng sản xuất ra ba loại chi tiết C1, C2 và C3 của một loại sản phẩm S của xí nghiệp. Mỗi sản phẩm S gồm 2 chi tiết loại C1, 1 chi tiết loại C2 và 2 chi tiết loại C3. Năng suất (số chi tiết/ca làm việc) của một máy khi sản xuất mỗi loại chi tiết được cho trong bảng sau:

Chi tiết Máy	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	C <sub>3</sub>
M <sub>1</sub>	10	6	8
M <sub>2</sub>	8	3	6
M <sub>3</sub>	5	4	7

**Bảng 2.2: Bảng ma trận tham số của bài toán**

Hãy lập mô hình toán học và giải bài toán: Bố trí thời gian hoạt động trong một ca cho mỗi máy sao cho tổng số sản phẩm S được sản xuất ra là nhiều nhất.

Ta giải bài toán trên như sau:

Với mọi  $(i, j) \in (I_3)^2$ , đặt  $x_{ij}$  là phần thời gian trong một ca mà một máy  $M_i$  sản xuất loại chi tiết  $C_j$ , và  $z$  là tổng số sản phẩm S được sản xuất ra trong một ca. Dĩ nhiên  $x_{ij} \geq 0$  và  $z \geq 0$ .

+ Thời gian hoạt động của mỗi máy là 1 ca, nên:  $\sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1$

+ Số chi tiết các loại được sản xuất ra trong một ca:

$$C_1 : z_1 = 10x_{11} + 3.8x_{21} + 2.5x_{31}$$

$$C_2 : z_2 = 6x_{11} + 3.3x_{21} + 2.4x_{31}$$

$$C_3 : z_3 = 8x_{11} + 3.6x_{21} + 2.7x_{31}$$



+ Theo giả thiết, chúng ta phải có:

$$z \leq \frac{z_1}{2}; z \leq z_2; z \leq \frac{z_3}{2}$$

Mô hình toán học của bài toán là:

Hãy xác định các giá trị  $(x_{ij})_{3 \times 3}$  và  $z$  sao cho tổng số sản phẩm S được sản xuất ra là nhiều nhất tức là  $z \rightarrow \max$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 x_{ij} = 1 \\ z \leq 5x_{11} + 12x_{21} + 5x_{31} \\ z \leq 6x_{12} + 9x_{22} + 8x_{32} \\ z \leq 4x_{13} + 9x_{23} + 7x_{33} \\ z \geq 0; x_{ij} \geq 0; (i, j) \in (l_3)^2 \end{cases}$$

Bài toán được đưa về dạng bài toán (SXĐB), với ma trận năng suất là:

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 12 & 9 & 9 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Dùng thuật toán điều chỉnh nhân tử, bài toán có PATU' là:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{85}{126} & 0 & \frac{41}{126} \\ 0 & \frac{11}{42} & \frac{31}{42} \end{pmatrix}; z = \frac{170}{21}$$

Vậy, phải bố trí cho: Máy M1 sản xuất C2 trong toàn ca; 3 máy M2 sản xuất C1 trong ca, sản xuất C3 trong ca; 2 máy M3 sản xuất C2 trong ca, sản xuất C3 trong ca.

**Tổng quát:** Loại máy  $M_i (i \in I_m)$  có  $t_i$  máy tham gia vào quá trình sản xuất, và một đơn vị thành phẩm cần có  $k_j (j \in I_n)$  đơn vị chi tiết  $C_j$ . Năng suất trong một ca của một máy  $M_i$  khi sản xuất ra loại chi tiết  $C_j$  là  $a_{ij}$ .

Bảng phép biến đổi:

$$a'_{ij} = \frac{t_i a_{ij}}{k_j}, (i \in I_m, j \in I_n)$$

Bài toán được đưa về dạng sản xuất đồng bộ với ma trận năng suất  $(a'_{ij})_{m \times n}$ , gọi là ma trận năng suất quy ước.

Tương tự như thuật toán đơn hình và thuật toán phân phối, bài toán sản xuất đồng bộ cũng được thực hiện trên một phần mềm tính toán được lập trình bằng các ngôn ngữ lập trình cơ bản.

### 2.3 Mô hình bài toán bổ nhiệm

*Cần phân n việc cho n người, người i làm việc j thì chi phí là  $c_{ij}$  ( $i, j = 1..n$ ).*

*Hãy phân công việc cho n người để tổng chi phí thấp nhất.*

Đặt  $x_{ij} = 1$  nếu người  $i$  làm việc  $j$ ; ngược lại đặt  $x_{ij} = 0$ .

Mô hình toán học:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & (i = 1..n) \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 & (j = 1..n) \\ x_{ij} = 0 \text{ hay } 1 & (i, j = 1..n) \end{cases} \quad (2.5)$$

Ma trận  $C = (c_{ij})_{n \times n}$  gọi là ma trận chi phí.

Thực sự có thể bỏ hạn chế  $x_{ij} = 0$  hoặc 1 để thay  $x_{ij}$  là số tự nhiên thì mỗi ràng buộc đảm bảo  $x_{ij} = 0$  hoặc 1. Do đó, ràng buộc  $x_{ij} = 0$  hoặc 1 có thể được viết lại  $x_{ij} \geq 0$ , nguyên. Đây là mô hình thực sự của bài toán vận tải. Có thể dùng thuật toán thế vị để giải với thuật toán này có  $2n-1$  ô chọn. Tuy nhiên chỉ có  $n$  ô chọn khác 0, vì bài toán suy biến. Vì vậy có thể có nhiều bước lặp mà phương án mới không tốt hơn.

Rõ ràng mỗi phương án là một hoán vị của các số  $1..n$ . Ví dụ hoán vị  $(4,2,1,3)$  nghĩa là người 1 làm việc 4 và người 4 làm việc 3. Một cách viết hoán vị dạng ma trận  $M = (m_{ij})_{n \times n}$ , với  $m_{ij} = 1$  khi và chỉ khi người  $i$  làm việc  $j$ .

**Định lý 2.1:** Nếu ma trận chi phí của bài toán bổ nhiệm có các phần tử không âm và có ít nhất  $n$  số 0, thì một phương án tối ưu tồn tại nếu  $n$  số 0 nằm trong các vị trí các số 1 của ma trận hoán vị  $p_{n \times n}$ . Ma trận  $P$  biểu diễn phương án tối ưu.

Rõ ràng, mọi phương án đều có tổng chi phí không nhỏ hơn 0, nên 0 là nhỏ nhất.

Định lý này cung cấp một mục tiêu của thuật toán. Ta sẽ chứng tỏ rằng có thể thay đổi chi phí mà không thay đổi lời giải. Thuật toán sẽ trình bày cách sửa đổi để ma trận chi phí có chứa số 0 trên mỗi dòng và mỗi cột.

**Định lý 2.2:** Giải sử ma trận chi phí là  $C = (c_{ij})_{n \times n}$ . Giả sử  $X = (x_{ij})_{n \times n}$  là phương án tối ưu. Gọi  $C'$  là ma trận có được từ  $C$  bằng cách cộng hằng số  $\alpha$  vào dòng thứ  $r$ . Thì  $X$  cũng là phương án tối ưu của bài toán mới xác định  $C'$ .

### Chứng minh

Hàm mục tiêu của bài toán mới là

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C'_{ij} X_{ij} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + \sum_{j=1}^n (C_{rj} + \alpha) X_{rj} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + \alpha \sum_{j=1}^n X_{rj} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + \alpha \end{aligned}$$

Vì mỗi dòng có tổng bằng 1. Do đó giá trị nhỏ nhất cho  $g(x)$  nhận được khi  $f(x)$  nhỏ nhất. Hay hai bài toán cùng phương án tối ưu.

Phát biểu tương tự cho việc cộng thêm hằng số vào cột. Do đó, chiến thuật là sửa đổi C bằng cách cộng thêm vào mỗi dòng/cột các hằng số.

**Ví dụ 2.2:** Giả sử bài toán bổ nhiệm có ma trận chi phí

C =	4	5	2	5
	3	1	1	4
	12	3	6	3
	12	6	5	9

Bắt đầu rút gọn để mỗi dòng có số 0 bằng cách trừ mỗi dòng cho số nhỏ nhất trên dòng đó.

2	3	0	3
2	0	0	3
9	0	3	0
7	1	0	4

Cột 1 không có số 0, trừ các số trong cột cho 2 ta có

0	3	0	3
0	0	0	3
7	0	3	0
5	1	0	4

Bây giờ có ít nhất 1 số 0 trên mỗi cột/dòng.

Đánh dấu “\*” tại các số 0 trên ma trận chi phí để biểu hiện một bổ nhiệm. Phải đánh dấu “\*” tại vị trí (4,3) vì dòng 4 chỉ có một số 0. Còn lại bắt đầu từ dòng 1 là (1,1), dòng 2 là (2,2), dòng 3 là (3,4)

0*	3	0	3
0	0*	0	3
7	0	3	0*
5	1	0*	4

Ta thu được phương án tối ưu và tổng chi phí là:  $4 + 1 + 5 + 3 = 13$

Đây là ví dụ gặp may mắn tìm được phương án tối ưu một cách ngẫu nhiên và nhanh chóng, tuy nhiên không phải lúc nào cũng gặp may để tìm phương án tối ưu một cách dễ dàng.

**Ví dụ 2.3:** Giả sử bài toán bổ nhiệm có ma trận chi phí

C =

4	1	3	4
5	6	2	9
6	5	8	5
7	6	2	3

Trừ mỗi dòng cho phần tử nhỏ nhất ta được

C =

3	0	2	3
3	4	0	7

1	0	3	0
5	4	0	1

Trừ mỗi cột cho phần tử nhỏ nhất ta được

C =

2	0	2	3
2	4	0	7
0	0	3	0
4	4	0	1

Đánh dấu “\*” từng dòng ta được

2	0*	2	3
2	4	0*	7
0*	0	3	0
4	4	0	1

Ma trận này không biểu diễn một cách đầy đủ; người 4 chưa có việc. Có hai trường hợp: hoặc là không thể hoàn thành việc đánh dấu “\*” cho các số 0, hoặc là có nhưng thuật toán chưa tìm ra.

+ **Lưu ý:** Các số 0 trong ma trận  $n \times n$  có tính chất là tất cả các số 0 có thể được phủ bởi  $n$  dòng/cột. Ví dụ chọn  $n$  cột để phủ cả ma trận. Giả sử các số 0 có thể phủ với  $k$  dòng/cột,  $k < n$ . Gọi  $a$  là phần tử nhỏ nhất không phủ. Tạo ma trận  $C'$  mới bằng cách trừ  $a$  vào mỗi phần tử trên dòng không phủ và cộng  $a$  vào mỗi phần tử trên mỗi cột bị phủ. Mỗi phần tử không bị phủ bị giảm  $a$ , vì chúng thuộc dòng không phủ và cột không phủ. Mỗi phần tử bị phủ bởi dòng/cột thì không thay đổi: hoặc chúng thuộc dòng phủ hoặc cột không phủ thì giữ nguyên; hoặc chúng thuộc dòng không phủ và cột phủ nên chúng cộng thêm  $a$  rồi cũng trừ đi thêm  $a$  nên cũng giữ nguyên. Mỗi phần tử bị phủ cả dòng và cột (phủ kép) được cộng thêm  $a$ . Do đó  $C'$  có các phần tử 0 tại các vị trí mà  $C$  không có, và đó có thể là khả năng hoàn toàn bổ nhiệm. Thủ tục sửa đổi ma trận  $C$  có thể phát biểu đơn giản hơn: trừ  $a$  vào mỗi phần tử không bị phủ và cộng  $a$  vào mỗi phần tử bị phủ kép. Với ví dụ 2.3 ở trên ta thu được ma trận phủ cuối cùng như sau:

2	0	2	3
2	4	0	7
0	0	3	0

4	4	0	1
---	---	---	---

Phần tử nhỏ nhất trên  $C'$  không bị phủ là 1. Trừ 1 vào mỗi phần tử không phủ và cộng 1 vào mỗi phần tử phủ kép có

1	0	2	2
1	4	0	6
0	1	4	0
3	4	0	0

Dùng thuật toán bổ nhiệm cho ma trận cuối cùng có được

1	$0^*$	2	2
1	4	$0^*$	6
$0^*$	1	4	0
3	4	0	$0^*$

Thủ tục trên được dựa vào định lý sau và được chứng minh bởi Konig

**Định lý 2.3:** Số tối đa các số 0 được đánh dấu “\*” bằng số tối thiểu các dòng/cột cần để phủ tất cả các số 0.

Trong ví dụ 2, vì có thể phủ tất cả các số 0 với 3 dòng/cột, nên theo định lý trên thì nhiều nhất là 3 số 0 được đánh dấu “\*”. Nghĩa là không thể đánh dấu “\*” cho 4 số 0, và đánh dấu “\*” cho nhiều số 0 hơn phải dùng thủ tục mô tả ở trên. Một khả năng khác không hoàn thành bổ nhiệm là thuật toán tìm theo dòng thất bại.

**Ví dụ 2.5:** (minh họa định lý 2.3)

4	2	9	7
7	8	5	6



3	3	4	1
7	5	2	6

Trừ mỗi dòng cho phần tử nhỏ nhất ta có được

2	0	7	5
2	3	0	1
2	2	3	0
5	3	0	4

Trừ mỗi cột cho phần tử nhỏ nhất ta có được

0	0	7	5
0	3	0	1
0	2	3	0
3	3	0	4

Trên mỗi dòng đánh dấu “\*” cho phần tử 0 đầu tiên không nằm trên cột đã đánh dấu trước đó, ta có được

0*	0	7	5
0	3	0*	1
0	2	3	0*

3	3	0	4
---	---	---	---

Việc bổ nhiệm chưa hoàn thành. Tuy nhiên có 1 cách đánh dấu để hoàn thành

0	0*	7	5
0*	3	0	1
0	2	3	0*
3	3	0*	4

Như vậy cần phải có một chiến lược để tìm ra cách đánh dấu “\*”. Do đó Phương pháp Hungary ra đời để giải quyết vấn đề trên.

## 2.4 Thuật toán Hungary

### 2.4.1 Giới thiệu về thuật toán

- Là công trình của hai nhà toán học Konig và Egervary.
- Thuật toán Hungary dựa trên tính chất rút giảm của ma trận. Khi trừ đi hay cộng thêm các giá trị thích hợp vào ma trận chi phí ta có một ma trận chi phí cơ hội trong đó chi phí cơ hội được hiểu là giá trị thiệt hại khi có sự phân công chưa phải tối ưu nhất. Nếu ta có thể rút giảm ma trận đến khi có các phần tử có giá trị không “0” ở mỗi dòng và cột thì có thể đạt được sự phân công tối ưu vào các ô có giá trị không “0” đó.

### 2.4.2 Thuật toán Hungary

**Bước 1:** Lập bảng phân công công việc theo dữ liệu thực tế;

**Bước 2:** Tìm số nhỏ nhất trong từng hàng của bảng phân việc và trừ các số trong hàng cho số đó;

**Bước 3:** Tìm số nhỏ nhất trong từng cột và trừ các số trong từng cột cho số đó;

**Bước 4:** Tìm cách kẻ các đường thẳng đi qua hàng hoặc cột có các số 0 sao cho số đường thẳng kẻ được ít nhất. Thực hiện theo cách sau:

- *Trường hợp a:* Bắt đầu từ những hàng có 1 số 0, khoanh tròn số đó lại và kẻ một đường thẳng xuyên suốt cột;

- *Trường hợp b:* Tìm các cột có 1 số 0, khoanh tròn số đó lại rồi kẻ một đường xuyên suốt hàng.

**Bước 5:** Lặp lại bước 4 cho đến khi không còn có thể khoanh được nữa. Nếu số đường thẳng kẻ được ít nhất bằng số hàng (số cột) thì bài toán đã có lời giải tối ưu. Nếu số đường kẻ được nhỏ hơn số hàng (số cột) thì cần làm tiếp: Tìm số chưa bị gạch nhỏ nhất và lấy tất cả các số chưa bị gạch trừ đi số đó; các số bị gạch bởi 2 đường thẳng cộng với số đó; còn các số khác giữ nguyên.

**Bước 6:** Quay trở lại bước 4 và 5 cho đến khi tìm được lời giải tối ưu.

### Chi tiết bước 3

Gọi  $i_0$  là dòng không được đánh dấu được ở bước 2, trên dòng  $i_0$  phải có số 0 trên cột  $j_0$  mà cột  $j_0$  đã được đánh dấu, vì  $j_0$  chưa đánh dấu thì dòng  $i_0$  không thất bại. Gọi ô đánh dấu trên cột  $j_0$  là ô  $(i_1, j_0)$ . Bắt đầu từ ô  $(i_1, j_0)$ , xây dựng đường đi xen kẽ theo dòng rồi theo cột, mô tả như sau

0 tại  $(i_0, j_0)$  đến

$0^*$  tại  $(i_1, j_0)$  đến

0 tại  $(i_1, j_1)$  đến

$0^*$  tại  $(i_2, j_2)$  đến

.....

ở đây các cột  $j_0, j_1, \dots, j_n$  phải khác nhau. Các ô tiếp theo trong dãy nhận được như sau:

*Trường hợp A.* Giả sử đang ở ô  $(i_k, j_k)$ , tìm  $0^*$  trên cột  $j_k$ . Nếu có thì thêm vào dãy. Nếu không có  $0^*$  trên cột  $j_k$  thì đánh dấu lại trên ma trận  $C'$ : trên dãy từ  $(i_0, j_0)$  đến  $(i_k, j_k)$  đổi 0 thành  $0^*$  và ngược lại. Lưu ý, bằng cách này tạo một  $0^*$  trên dòng  $i_0$

và mỗi dòng trước đó có  $0^*$  vẫn giữ nguyên. Bây giờ lặp lại bước 3 cho dòng tiếp theo chưa đánh dấu.

Trường hợp B. Giả sử, cách khác, đang ở  $0^*$  tại ô  $(i_{k+1}, j_k)$ . Tìm 0 trên dòng  $i_{k+1}$  không nằm trên cột đã có trong dãy. Nếu có thì thêm vào dãy. Nếu không có 0 thì không thể sửa đổi như trường hợp A; mà quay lại đánh nhãn cột  $k$  là cột *cần thiết* và định hướng lại cách tìm. Thực hiện điều này bằng cách xóa  $0^*$  tại ô  $(i_{k+1}, j_k)$  và 0 tại ô  $(i_k, j_k)$ . thay cho dòng  $i_{k+1}$ . Đó là tìm 0 trên dòng  $i_k$  khác với 0 trên cột  $j_k$  (cột cần thiết) để không nằm trên cột đã có trong dãy.

Nếu  $k = 0$  thì tìm 0 khác trên dòng  $i_0$ , giả sử  $j'_0$ , xây dựng đường đi như trên bắt đầu tại  $(i_0, j'_0)$ . Nếu không tìm được phần tử 0 phù hợp khác trên dòng  $i_0$  thì chưa tạo được một bổ nhiệm hoàn thành.

Có hai cách xây dựng này có thể kết thúc. Một cách khi thay 0 thành  $0^*$  và ngược lại. Cách khác là khi tất cả các ô được xóa vì chúng nằm trên cột cần thiết. Trong trường hợp này, không thể bỏ nhiệm, và phải sang bước 4, để làm rõ hơn nội dung trên ta xét ví dụ sau:

### Ví dụ 2.6

C =	8	7	9	9
	5	2	7	8
	6	1	4	9
	2	3	2	6
C' =	1	0	2	0
	3	0	5	4
	5	0	3	6
	0	1	0	2

Đánh dấu 0 bắt đầu từ dòng 1 ở bước 2. Thấy dòng 2 là dòng đầu tiên không có 0 trên cột chưa đánh dấu. Ở điểm này,

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0^* & 2 & 0 \\ \hline 3 & 0 & 5 & 4 \\ \hline 5 & 0 & 3 & 6 \\ \hline 0^* & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Rồi bắt đầu xây dựng lại dãy 0 và  $0^*$  theo bước 3. Ô đầu tiên là ô (2,2), chứa 0. Tìm  $0^*$  trên cột 2 ở ô (1,2). Tìm 0 trên dòng 1 ở ô (1,4). Trên cột 4 không có. Rơi vào trường hợp A. Dãy ô là (2,2), (1,2), (1,4).

Đổi 0 thành  $0^*$  và ngược lại có,

$$C' = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 & 0^* \\ \hline 3 & 0^* & 5 & 4 \\ \hline 5 & 0 & 3 & 6 \\ \hline 0^* & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Tăng được  $0^*$  một phần tử. Bây giờ lặp lại bước 3 cho dòng 3.

Không có  $0^*$  trên dòng 3; do đó xây dựng dãy ô bắt đầu từ ô (3,2).  $0^*$  trên cột 2 ở ô (2,2). Nhưng không có 0 trên dòng 2. Rơi vào trường hợp B và cột 2 là cột cần thiết. Dãy ô là: 0 tại (3,2),  $0^*$  tại (2,2).

Vì tất cả các ô trong dãy đều nằm trên cột cần thiết nên phải sang bước 4 để xác định các dòng cần thiết.

Một dòng được gọi là cần thiết nếu có  $0^*$  trên cột không cần thiết. Bắt đầu với dòng 1, tìm  $0^*$  trên cột 4, vì vậy dòng 1 là dòng cần thiết. Trong 2 có  $0^*$  trên cột cần

thiết, cột 2. Do đó dòng 2 không cần thiết. Dòng 3 không có 0\* vì vậy không cần thiết. Dòng 4 có 0\* trên cột 1 nên là dòng cần thiết.

**Chi tiết bước 4**

Phủ mỗi dòng và cột cần thiết với một đường cho ra k đường phủ như mô tả trước đây. Thủ tục này tự động phủ tất cả các phần tử 0 của  $C'$ .  $C'$  được phủ như sau

$$C' =$$

1	0	2	$0^*$
3	$0^*$	5	4
5	0	3	6
$0^*$	1	0	2

Sang bước 5, trừ 3 vào mỗi phần tử không phủ, cộng 3 vào mỗi phần tử phủ kép,  $C'$  để quay lại bước 2 là

$$C' =$$

1	3	2	0
0	0	2	1
2	0	0	3
0	4	0	2

Hoàn thành bổ nhiệm ở bước 2 như sau:

1	3	2	$0^*$
$0^*$	0	2	1
2	$0^*$	0	3
0	4	$0^*$	2



Bây giờ có thể viết lại bước 3 trong thuật toán như sau: Giả sử không có 0 trên dòng  $i_0$  được đánh dấu và có một phần tử 0 tại  $(i_0, j_0)$ . Xây dựng một dãy theo cột rồi theo dòng xen kẽ từ 0 đến  $0^*$  đến 0, đến  $0^*$ , .... như sau

(A) Nếu đang 0 tại ô  $(i_k, j_k)$  tìm  $0^*$  trên cột  $j_k$ . Nếu có thì nối vào dãy. Nếu không có thì thay đổi trong dãy với 0 thành  $0^*$  và  $0^*$  thành 0 và tìm dòng tiếp theo không có  $0^*$ .

(B) Nếu đang  $0^*$  tại ô  $(i_{k+1}, j_k)$  tìm 0 trên dòng  $i_{k+1}$ . Nếu có thì nối vào dãy. Nếu không thì đánh dấu  $j_k$  là cột cần thiết và xóa các ô  $(i_k, j_k)$  và  $(i_{k+1}, j_k)$  ra khỏi dãy. Nếu có nhiều ô thì xem là  $0^*$  ở ô  $(i_k, j_{k-1})$ . Lặp lại trường hợp B. Nếu không có nhiều ô trong dãy, tìm phần tử 0 trên dòng  $i_0$  không nằm trên cột cần thiết. Nếu tìm thấy trên cột  $j_0$  thì lặp lại bước 3 bắt đầu từ ô  $(i_0, j_0)$ . Nếu không có thì sang bước 4.

### Tóm lại:

Phương pháp Hungary giải khi bài toán là dạng cực tiểu. Tuy nhiên có thể sửa đổi một chút để giải cho bài toán cực đại như sau: Nếu nhân -1 cho mọi chi phí thì chi phí dương thành âm và không áp dụng được tiêu chuẩn tối ưu của định lý 2.3. Để sử dụng phương pháp Hungary, sau khi nhân -1, cộng thêm chi phí lớn nhất trên ma trận gốc, thì tất cả các chi phí đều không âm

**Ví dụ 2.7:** Giả sử bài toán bổ nhiệm chi phí dạng cực đại cho bởi

C =

3	7	4	6
5	2	8	5
1	3	4	7
6	5	2	6

Lấy chi phí lớn nhất là 8 trừ cho tất cả các chi phí, có dạng bài toán cực tiểu tương ứng là

$$C = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 1 & 4 & 2 \\ \hline 3 & 6 & 0 & 3 \\ \hline 7 & 5 & 4 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 2 \\ \hline \end{array}$$

### **Kết luận:**

Nội dung chính của chương 2 đã trình bày cơ sở toán học của mô hình bài toán sản xuất đồng bộ, bài toán bổ nhiệm, thuật toán điều chỉnh nhân tử. Đây là một mô hình đặc biệt của bài toán quy hoạch tuyến tính có ứng dụng nhiều trong thực tế. Một trong những phương pháp quan trọng để giải bài toán là thuật toán Hungary cũng được nghiên cứu. Đây là cơ sở quan trọng để mô hình hóa và giải quyết các bài toán thực tế trong chương 3.

### Chương 3

## ỨNG DỤNG MÔ HÌNH BÀI TOÁN SẢN XUẤT ĐỒNG BỘ TẠI CÔNG TY CỔ PHẦN CHẾ TẠO THIẾT BỊ TÀU THỦY HẢI VIỆT

### 3.1 Giới thiệu sơ lược về công ty

Công ty được thành lập theo quyết định số 4596QĐ/TLCT – KHĐT ngày 06/02/2005 của Sở kế hoạch đầu tư Thành phố Hải Phòng. Trụ sở chính của công ty đặt tại số 310 Đường Lê Duẩn - Phường Bắc Sơn, Quận Kiến An, Thành phố Hải Phòng. Với quy mô sản xuất rộng lớn trên nền quỹ đất 1,5 ha với bốn khu nhà xưởng và chế tạo, một bến cảng hạ thủy tàu, một tòa nhà làm việc và điều hành chung với tổng số lượng nhân viên, cán bộ, kỹ sư và công nhân lên đến hơn 1.000 người.

Trải qua 10 năm xây dựng và phát triển công ty đã dần khẳng định được thương hiệu cũng như uy tín của mình trên thị trường, do đó quy mô của công ty ngày càng được mở rộng, các kíp sản xuất của công ty được duy trì liên tục 3 ca/1 ngày để đảm bảo hoàn thành các đơn hàng của khách hàng.

### 3.2 Mô hình bài toán trong thực tế sản xuất của công ty

Công ty cổ phần chế tạo thiết bị tàu thủy Hải Việt chuyên sản xuất chế tạo các thiết bị tàu thủy cung cấp cho thị trường đóng tàu Hải Phòng nói riêng và cả nước nói chung, theo yêu cầu ngày càng cao của thị trường, công ty đã đầu tư một dây chuyền sản xuất mới với tổ hợp của 6 loại máy (ký hiệu là  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ ), dùng để sản xuất các thiết bị bánh lái tàu (ký hiệu là  $C_1$ ), mỏ neo (ký hiệu là  $C_2$ ); ốc vít (ký hiệu là  $C_3$ ), bánh đà (ký hiệu là  $C_4$ ), bánh răng (ký hiệu là  $C_5$ )

Năng suất sản xuất của các máy được nhà thiết kế đưa ra như sau (số lượng chi tiết được sản xuất ra trong 1 ca làm việc tương đương 8h máy chạy liên tục):

Chi tiết Máy	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$
$M_1$	4	6	5	2	2
$M_2$	6	1	2	4	5
$M_3$	2	5	7	9	10

$M_4$	3	5	8	10	3
$M_5$	5	7	9	6	5
$M_6$	3	2	5	7	4

**Yêu cầu:** Hãy xây dựng lịch sản xuất cho các máy tại công ty để sao cho tổng số sản phẩm được sản xuất ra là nhiều nhất.

### 3.3 Phân tích mô hình

Kí hiệu  $x_{ij}$  là phần thời gian trong một ca mà một máy  $M_i$  sản xuất loại chi tiết  $C_j$ , và  $z$  là tổng số sản phẩm  $S$  được sản xuất ra trong một ca. Dĩ nhiên  $x_{ij} \geq 0$  và  $z \geq 0$ . Khi đó giá trị  $x_{ij}$  cần thỏa mãn các điều kiện sau đây:

+ Thời gian hoạt động của máy  $M_i$  dành cho sản xuất cả 5 loại sản phẩm là 1

ca, nên:  $\sum_{i=1}^5 x_{ij} = 1$ .

+ Số chi tiết các loại được sản xuất ra trong một ca:

$$C_1 : z_1 = 4x_{11} + 6x_{21} + 2x_{31} + 3x_{41} + 5x_{51} + 3x_{61};$$

$$C_2 : z_2 = 6x_{12} + 1x_{22} + 5x_{32} + 5x_{42} + 7x_{52} + 2x_{62};$$

$$C_3 : z_3 = 5x_{13} + 2x_{23} + 7x_{33} + 8x_{43} + 9x_{53} + 5x_{63};$$

$$C_4 : z_4 = 2x_{14} + 4x_{24} + 9x_{34} + 10x_{44} + 6x_{54} + 7x_{64};$$

$$C_5 : z_5 = 2x_{15} + 5x_{25} + 10x_{35} + 3x_{45} + 5x_{55} + 4x_{65};$$

*Mô hình toán học:*

Tìm:  $(x_{ij}, z)$  sao cho:  $z \rightarrow \max$  trong đó các ẩn số của bài toán phải thỏa mãn hệ ràng buộc

$$\sum_{j=1}^6 x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$z \leq 4x_{11} + 6x_{21} + 2x_{31} + 3x_{41} + 5x_{51} + 3x_{61};$$

$$z \leq 6x_{12} + 1x_{22} + 5x_{33} + 5x_{42} + 7x_{52} + 2x_{62};$$

$$z \leq 5x_{13} + 2x_{23} + 7x_{33} + 8x_{43} + 9x_{53} + 5x_{63};$$

$$z \leq 2x_{14} + 4x_{24} + 9x_{34} + 10x_{44} + 6x_{54} + 7x_{64};$$

$$z \leq 2x_{15} + 5x_{25} + 10x_{35} + 3x_{45} + 5x_{55} + 4x_{65};$$

$$x_{ij} \geq 0;$$

$$z > 0.$$

Như vậy, bài toán trên được đưa về mô hình của bài toán sản xuất đồng bộ với ma trận năng suất là:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 8 & 10 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Sử dụng thuật toán điều chỉnh nhân tử, chúng ta thu được kết quả như sau:

### 3.4 Kết quả khi thực hiện thuật toán điều chỉnh nhân tử

#### **Bước 1:**

Hệ thống nhân tử và ô chọn

M/C	$C_1 : 1$	$C_2 : 1$	$C_3 : 1$	$C_4 : 1$	$C_5 : 1$	$U_i$
$M_1 : 1$	4	6*	5	2	2	75/7
$M_2 : 1$	6*	1	2	4	5	15
$M_3 : 1$	2	5	7	9*	10*	10

$M_4 : 1$	3	5	8*	10*	3	100/9
$M_5 : 1$	5*	7*	9*	6	5	25/2
$M_6 : 1$	3	2	5	7*	0	70/9
$V_j$	5/2	25/14	25/18	10/9	1	

**Giá trị  $z = 8455/981$**

## **Bước 2**

Ma trận phương án

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>271/1962</b>	<b>1961/1962</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>18883/1962</b>	<b>0</b>	<b>730/1962</b>
<b>2569/4905</b>	<b>367/981</b>	<b>167/1635</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

Phương án tối ưu của bài toán là

M/C	$C_1 : 1$	$C_2 : 1$	$C_3 : 1$	$C_4 : 1$	$C_5 : 1$
-----	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

$M_1 : 1$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$M_2 : 1$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$M_3 : 1$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>271/1962</b>	<b>1961/1962</b>
$M_4 : 1$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>18883/1962</b>	<b>0</b>	<b>730/1962</b>
$M_5 : 1$	<b>2569/4905</b>	<b>367/981</b>	<b>167/1635</b>	<b>0</b>	<b>0</b>
$M_6 : 1$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>

Bảng kết quả phương án tối ưu thu được cho chúng ta kế hoạch sản xuất tối ưu của nhà máy cần tìm. Như vậy theo bảng trên nhà máy cần bố trí các máy làm việc trong một ca như sau:

- + Bố trí máy M1 chỉ sản xuất mủ neo (C2) trong toàn ca.
- + Bố trí máy M2 chỉ sản xuất bánh lái tàu (C1) trong toàn ca.
- + Bố trí máy M3 sản xuất bánh đà (C4) và bánh răng (C5) trong ca.
- + Bố trí máy M4 sản xuất ốc vít (C3) và bánh răng (C5) trong ca.
- + Bố trí máy M5 sản xuất bánh lái tàu (C1), mủ neo (C2), ốc vít (C3) trong ca.
- + Bố trí máy M6 chỉ sản xuất bánh đà (C4) trong toàn ca.

Trong đó, số lượng các sản phẩm thu được cụ thể trong một ca làm việc như sau:

+ Bánh lái tàu (C1):  $z_1 = 6 + 5 * \frac{2569}{4905} \approx 8,62$  sản phẩm

$$+ \text{Mỏ neo (C2): } z_2 = 6 + 7 * \frac{367}{981} \approx 8,62 \text{ sản phẩm}$$

$$+ \text{Ốc vít (C3): } z_3 = 8 * \frac{18883}{1962} + 9 * \frac{167}{1635} \approx 77 \text{ sản phẩm}$$

$$+ \text{Bánh đà (C4): } z_4 = 9 * \frac{271}{1962} + 7 \approx 8,24 \text{ sản phẩm}$$

$$+ \text{Bánh răng (C5): } z_5 = 10 * \frac{1961}{1962} + 3 * \frac{730}{1962} \approx 11,1 \text{ sản phẩm}$$

## KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn đề cập đến việc nghiên cứu các mô hình của bài toán quy hoạch tuyến tính dạng đặc biệt như: bài toán sản xuất đồng bộ, bài toán bổ nhiệm. Đây là các bài toán có ứng dụng nhiều trong thực tế sản xuất. Kết quả chính của luận văn gồm có:

1. Trình bày mô hình tổng quát của bài toán quy hoạch tuyến tính, cơ sở toán học của các thuật toán kinh điển như thuật toán đơn hình, thuật toán phân phối, thuật toán đối ngẫu.

2. Nghiên cứu 2 mô hình của 2 bài toán đặc biệt. Đó là mô hình của bài toán đồng bộ và bài toán bổ nhiệm, cơ sở toán học của thuật toán điều chỉnh nhân tử và thuật toán Hungary giải quyết các bài toán trên.



3. Tìm hiểu mô hình sản xuất đồng bộ của các nhà máy tại Công ty cổ phần chế tạo thiết bị tàu thủy Hải Việt, xây dựng mô hình bài toán tối ưu và ứng dụng thuật toán điều chỉnh nhân tử để xác định phương án tối ưu lập kế hoạch sản xuất cho công ty.

Hướng phát triển tiếp theo của luận văn là tiếp tục nghiên cứu các thuật toán tối ưu đối với lớp các bài toán quy hoạch tuyến tính rời rạc, ứng dụng giải các bài toán tối ưu phức tạp hơn trong thực tế.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tài liệu tiếng Việt

- [1] Nguyễn Đức Nghĩa (1999), Tối ưu hóa (Quy hoạch tuyến tính và rời rạc), Nhà xuất bản Giáo dục.
- [2] Bùi Thế Tâm, Trần Vũ Thiệu (1998), Các phương pháp tối ưu hóa, Nhà xuất bản Giao thông vận tải.
- [3] Bùi Minh Trí (2001), Quy hoạch toán học, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [4] Nguyễn Anh Tuấn (2011), Quy hoạch gần lời - gần lõm ứng dụng vào quy hoạch tuyến tính, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật.

### Tài liệu tiếng Anh

- [5] Alpha C. Chiang, Fundamental Methods of Mathematics for Economics, Third Edition. McGraw-Hill, Inc, 2004.
- [6] Dalton R.E, Llewellyn R.W., “An extension of the Gomory mixed-integer algorithm to mixed-discrete variable”, Manag. Sci., 1966, 12, N7, 562-575.
- [7] Edward T. Dowling, Introduction to Mathematical for Economics, 2/ed. Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Inc, 2011.
- [8] Land A.H, Doig A.G., “An automatic method of solving discrete programming problems”, Econometrica, 1960, 28, N3, 497-520.
- [9] Michael Hoy, John, Chris McKenna, Ray Rees, Thanasic Stengos, Mathematics for Economics, Addison Wesley Publishers Limited, 1996.
- [10] James M. Henderson and Richard E. Quandt, Microeconomic Theory, A Mathematical Approach, McGraw-Hill Company 3/ed, 1986.

Thái Nguyên, ngày 25 tháng 05 năm 2015

**Giáo viên hướng dẫn**

**Học viên thực hiện**

