

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS DE FISICA MODERNA

Por

RONALD GAUTREAU

*Instituto de Tecnología de Nueva Jersey
U.S.A.*

WILLIAM SAVIN

*Instituto de Tecnología de Nueva Jersey
U.S.A.*

TRADUCCION:

AUGUSTO RODRIGUEZ MOLANO

*Profesor de Física
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia*

REVISION:

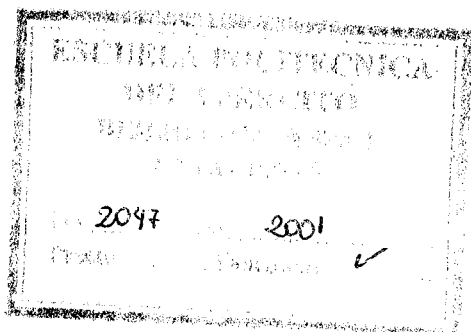
MAURICIO GARCIA CASTAÑEDA

*Profesor de física
Universidad Nacional de Colombia*

LIBRO DE CORTESIA



MEXICO



McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA
MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS
SIDNEY • TOKIO • TORONTO

FÍSICA MODERNA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

**DERECHOS RESERVADOS © 1988, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MEXICO, S.A. DE C.V.
Atiacumulco 499-501, Fracc. Industrial San Andrés Atoto
53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890**

ISBN 968-451-022-5

Traducido de la primera edición en inglés de
MODERN PHYSICS

Copyright © MCMLXXVIII, by McGraw-Hill Book Co., U. S. A.

ISBN 0-07-023062-5

8901234567

9123456780

Impreso en México

Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en Enero de 1990
en Impresora Rodelo, S.A.
Vicente Beristain No. 6
Col. Vista Alegre
Deleg. Cuauhtémoc
06860 México, D.F.

Se tiraron 1 000 ejemplares

Prólogo

El campo de la física moderna comprende temas que se han desarrollado desde, aproximadamente, el comienzo del siglo. Estos desarrollos pueden ser un reto intelectual como, por ejemplo, el efecto del tiempo predicho por Einstein en su Teoría especial de la relatividad, o muy prácticos, como los muchos dispositivos basados en los semiconductores, cuya explicación se encuentra en la teoría de la banda de los sólidos.

De la tabla de contenido, se puede inferir la riqueza temática de este libro. Cada capítulo consta de una presentación sucinta de los principios y la “crema” de un tema particular, seguida de un número importante de problemas resueltos, que de una manera natural, desarrollan el tema e ilustran los principios. Los autores están convencidos de que los problemas resueltos son un valioso instrumento para el aprendizaje; éstos han sido incluidos en orden de dificultad creciente, son cortos y precisos. A continuación, se incluye una sección de problemas suplementarios no resueltos, con sus respuestas, para que el lector pueda verificar su comprensión teórica del tema estudiado.

Hemos partido del supuesto de que el lector ha tomado los cursos introductorios de rigor, y de que el libro está dirigido a estudiantes del nivel universitario intermedio, aunque hemos incluido algunos problemas de mayor grado de dificultad. Aunque puede servir como suplemento de cualquier libro estándar de física moderna, éste es suficientemente comprensivo para aprender en él los principios básicos de la física moderna.

Queremos hacer llegar nuestros agradecimientos a David Beckwith por su meticuloso trabajo editorial y por el aporte que permitió mejorar la revisión final del libro. Los errores son nuestros, y mucho agradecemos que nos los hagan conocer. Finalmente, estamos muy reconocidos con nuestras familias por su enorme paciencia durante el tiempo que nos tomó la preparación de este trabajo.

RONALD GAUTREAU
WILLIAM SAVIN

Instituto Tecnológico de Nueva Jersey.

530.1
62.75

Contenido

PARTE 1: LA TEORIA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD

Capítulo 1	Transformaciones de Galileo	1
	1.1 Acontecimientos y coordenadas 1.2 Transformaciones de las coordenadas según Galileo 1.3 Transformaciones de la velocidad según Galileo 1.4 Transformaciones de la aceleración según Galileo 1.5 Invariancia de una ecuación	
Capítulo 2	Los postulados de Einstein	7
	2.1 El espacio absoluto y el éter 2.2 El experimento de Michelson-Morley 2.3 Medidas de lon- gitud y tiempo—un asunto de principio 2.4 Los postulados de Einstein	
Capítulo 3	Transformaciones de las coordenadas según Lorentz	12
	3.1 La velocidad de la luz es constante 3.2 La invariancia de las ecuaciones de Maxwell 3.3 Consideraciones generales para la solución de problemas que involucran transformaciones de Lorentz 3.4 Simultaneidad	
Capítulo 4	Medidas relativistas de longitud	17
	4.1 Definición de longitud	
Capítulo 5	Medidas relativistas de tiempo	20
	5.1 Tiempo propio 5.2 Dilatación del tiempo	
Capítulo 6	Medidas relativistas de espacio-tiempo	24
Capítulo 7	Transformaciones relativistas de la velocidad	33
	7.1 Las transformaciones de la velocidad según Lorentz y la velocidad de la luz 7.2 Considera- ciones generales para la solución de problemas sobre velocidad	
Capítulo 8	Masa, energía y momentum en relatividad	39
	8.1 Necesidad de redefinir el momentum clásico 8.2 La variación de la masa con la velocidad 8.3 La segunda ley de Newton en relatividad 8.4 Relación entre masa y energía: $E = mc^2$ 8.5 Relación entre momentum y energía 8.6 Unidades para la energía y el momentum 8.7 Con- sideraciones generales en la solución de problemas sobre masa-energía	
Capítulo 9	El efecto Doppler relativista	50

PARTE 2: LA TEORIA CUANTICA DE LA RADIACION ELECTROMAGNETICA

Capítulo 10	La teoría de los fotones	53
Capítulo 11	El efecto fotoeléctrico	57
	11.1 Resultados experimentales 11.2 Teoría del efecto fotoeléctrico	
Capítulo 12	El efecto Compton	63

CONTENIDO

Capítulo 13	Producción y aniquilación de pares	69
	13.1 Producción de pares 13.2 Aniquilación de pares	
Capítulo 14	Absorción de fotones	75

PARTE 3: ONDAS DE MATERIA

Capítulo 15	Ondas de De Broglie	78
	15.1 La dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética 15.2 La dualidad onda-partícula de la materia	
Capítulo 16	Comprobación experimental de la hipótesis de De Broglie	83
	16.1 La ley de difracción de Bragg 16.2 Experimento sobre difracción de electrones	
Capítulo 17	La interpretación probabilista de las ondas de De Broglie	89
	17.1 Una interpretación probabilista para la radiación electromagnética 17.2 Una interpretación probabilista de la materia	
Capítulo 18	El principio de incertidumbre de Heisenberg	92
	18.1 Mediciones e incertidumbre 18.2 La relación de incertidumbre para posición y momentum 18.3 La relación de incertidumbre para energía y tiempo 18.4 El principio de complementariedad	

PARTE 4: ATOMOS HIDROGENOIDES

Capítulo 19	El átomo de Bohr	100
	19.1 El espectro del hidrógeno 19.2 La teoría de Bohr del átomo de hidrógeno 19.3 Emisión de radiación en la teoría de Bohr 19.4 Diagramas de niveles de energía 19.5 Átomos hidrogenoides 19.6 Átomos mesónicos μ y mesónicos π	
Capítulo 20	Movimiento orbital del electrón y el efecto Zeeman	114
	20.1 El momentum angular orbital desde un punto de vista clásico 20.2 Tratamiento clásico del momento de dipolo magnético 20.3 Energía clásica de un dipolo magnético. Momento en un campo magnético externo 20.4 El experimento de Zeeman 20.5 La cuantización de la magnitud del momentum angular orbital 20.6 La cuantización de la dirección del momentum angular orbital 20.7 Explicación del efecto Zeeman	
Capítulo 21	El experimento de Stern y Gerlach y el spin	122
	21.1 El experimento de Stern y Gerlach 21.2 El spin del electrón	
Capítulo 22	Spin del electrón y la estructura fina	126
	22.1 Acoplamiento spin-órbita 22.2 Estructura fina 22.3 Momentum angular total (el modelo vectorial)	

PARTE 5: ATOMOS POLIELECTRONICOS

Capítulo 23	El principio de exclusión de Pauli	130
	23.1 Introducción 23.2 El principio de exclusión de Pauli 23.3 Una partícula en una caja unidimensional 23.4 Varias partículas en una caja unidimensional	
Capítulo 24	Átomos polielectrónicos y la tabla periódica	135
	24.1 Notación espectroscópica para configuraciones electrónicas en los átomos 24.2 La tabla periódica y el modelo atómico de capas 24.3 Notación espectroscópica para los estados atómicos 24.4 Estados atómicos excitados y acoplamiento LS 24.5 El efecto Zeeman anómalo	
Capítulo 25	Transiciones de electrones internos: Rayos X	151
	25.1 Aparato de rayos X 25.2 Producción de radiación de frenado (Bremsstrahlung) 25.3 Producción de espectros característicos de rayos X 25.4 La relación de Moseley 25.5 Picos de absorción de rayos X 25.6 Efecto Auger 25.7 Fluorescencia de rayos X	

PARTE 6: FISICA NUCLEAR

Capítulo 26	Propiedades del nucleón y del deuterón	165
	26.1 Los nucleones 26.2 Fuerzas entre nucleones 26.3 El deuterón	
Capítulo 27	Propiedades de los núcleos	170
	27.1 Designación de los núcleos 27.2 Número relativo de protones y de neutrones 27.3 El núcleo como una esfera 27.4 Energía de enlace nuclear	
Capítulo 28	Modelos nucleares	175
	28.1 El modelo de gota de líquido 28.2 Modelo de capas	
Capítulo 29	El decaimiento de núcleos inestables	186
	29.1 Introducción 29.2 La ley estadística del decaimiento radiactivo 29.3 Decaimiento gamma 29.4 Decaimiento alfa 29.5 El decaimiento beta y el neutrino	
Capítulo 30	Reacciones nucleares	201
	30.1 Introducción 30.2 Clasificación de las reacciones nucleares 30.3 Sistemas de laboratorio y de centro de masa 30.4 Aspectos energéticos de las reacciones nucleares 30.5 Sección transversal nuclear	
Capítulo 31	Fisión y fusión	211
	31.1 Fisión nuclear 31.2 Fusión nuclear	
Capítulo 32	Partículas elementales	218
	32.1 Genealogía de las partículas elementales 32.2 Interacción de partículas 32.3 Leyes de conservación 32.4 Conservación de leptones 32.5 Conservación de bariones 32.6 Conservación del spin isotópico 32.7 Conservación de la extrañeza 32.8 Conservación de paridad 32.9 Partículas de vida corta y resonancias	

PARTE 7: SISTEMAS ATOMICOS

Capítulo 33	Enlace molecular	230
	33.1 Enlace iónico 33.2 Enlace covalente 33.3 Otros tipos de enlaces	
Capítulo 34	Excitaciones de moléculas diatómicas	235
	34.1 Rotaciones moleculares 34.2 Vibraciones moleculares 34.3 Excitaciones combinadas	
Capítulo 35	Teoría cinética	244
	35.1 La ley del gas ideal	
Capítulo 36	Funciones de distribución	252
	36.1 Funciones de distribución discreta 36.2 Funciones de distribución continua 36.3 Funciones de distribución fundamental y densidad de estados	
Capítulo 37	Estadística clásica: La distribución de Maxwell-Boltzmann	259
Capítulo 38	Estadística cuántica	269
	38.1 Estadística de Fermi-Dirac 38.2 Estadística de Bose-Einstein 38.3 Límite de alta temperatura 38.4 Dos integrales útiles	
Capítulo 39	Teoría de bandas de los sólidos	289
Apéndice	299
Índice	308

Capítulo 1

Transformaciones de Galileo

1.1 ACONTECIMIENTOS Y COORDENADAS

Empecemos por considerar el concepto de acontecimiento físico. El acontecimiento que puede ser el golpe de un rayo sobre un árbol o el choque de dos partículas, ocurre en un lugar en el espacio y en un instante en el tiempo. El acontecimiento particular puede ser determinado por un observador al asignarle cuatro coordenadas: las tres coordenadas de posición x, y, z , que miden la distancia desde el origen de un sistema de coordenadas donde se encuentra el observador, y la coordenada del tiempo t , que el observador mide con su reloj.

Consideremos ahora dos observadores O y O' . Supongamos que O' viaja a velocidad constante v con respecto a O a lo largo de su eje común $x-x'$ (figura 1-1). Ambos observadores están provistos de metros y relojes, de tal manera que pueden medir las coordenadas de los acontecimientos. Supongamos, además, que ajustan los relojes en tal forma que cuando pasen uno frente a otro en $x = x' = 0$, la lectura en los relojes sea $t = t' = 0$. Cualquier acontecimiento P tendrá asociados ocho números: las cuatro coordenadas (x, y, z, t) asignadas por O y las cuatro coordenadas (x', y', z', t') asignadas (al mismo acontecimiento) por O' .

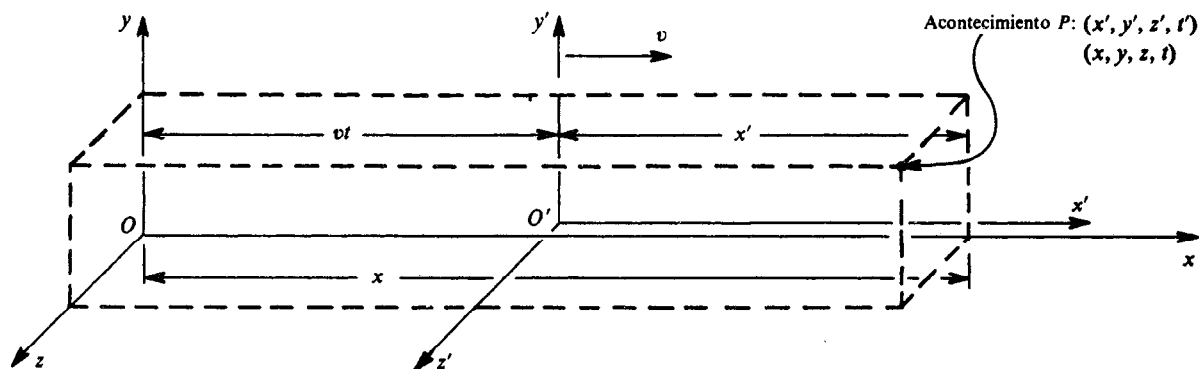


Fig. 1-1

1.2 TRANSFORMACIONES DE LAS COORDENADAS SEGUN GALILEO

La relación entre las medidas (x, y, z, t) obtenidas por O y las medidas (x', y', z', t') obtenidas por O' , para un acontecimiento particular, se encuentra examinando la figura 1-1:

$$x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

Además, en física clásica se supone que:

$$t' = t$$

Estas cuatro ecuaciones se conocen como *las transformaciones de las coordenadas según Galileo*.

1.3 TRANSFORMACIONES DE LA VELOCIDAD SEGUN GALILEO

Es interesante, además de las coordenadas de un acontecimiento, considerar la velocidad de una partícula. Los observadores O y O' describirán la velocidad de una partícula asignándole tres componentes, así: (u_x, u_y, u_z) medidas por O y (u'_x, u'_y, u'_z) medidas por O' .

La relación entre (u_x, u_y, u_z) y (u'_x, u'_y, u'_z) se obtiene derivando con respecto al tiempo las transformaciones de las coordenadas, según Galileo. Así, de $x' = x - vt$,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) \frac{dt}{dt'} = \left(\frac{dx}{dt} - v \right) (1) = u_x - v$$

En total, las transformaciones de la velocidad, según Galileo son

$$u'_x = u_x - v \quad u'_y = u_y \quad u'_z = u_z$$

1.4 TRANSFORMACIONES DE LA ACELERACION SEGUN GALILEO

La aceleración de una partícula es la derivada con respecto al tiempo de su velocidad, por ejemplo $a_x = du_x/dt$, etc. Para encontrar las transformaciones de la aceleración según Galileo basta derivar con respecto al tiempo las transformaciones de la velocidad y tener en cuenta que $t' = t$ y $v = \text{constante}$, para obtener

$$a'_x = a_x \quad a'_y = a_y \quad a'_z = a_z$$

Para todos los observadores que se muevan con velocidad uniforme relativa, la medida de las componentes de la aceleración es la misma.

1.5 INVARIANCIA DE UNA ECUACION

Se dice que hay *invariancia* en una ecuación cuando ésta presenta la misma forma al ser determinada por dos observadores. En la teoría clásica se supone que las medidas de espacio y tiempo obtenidas por dos observadores están relacionadas por las transformaciones de Galileo. Así, cuando un observador determina una forma particular para una ecuación, pueden aplicarse las transformaciones de Galileo para esta forma y encontrar así la forma para el otro observador. Si ambas formas coinciden, la ecuación es invariante bajo las transformaciones de Galileo. Ver problemas 1.11 y 1.12.

Problemas resueltos

- 1.1** Un pasajero de un tren que se mueve a 30 m/s pasa frente a un hombre que se encuentra en la plataforma de la estación en $t = t' = 0$. Veinte segundos después de que el tren lo pasa, el hombre de la plataforma encuentra que un pájaro que vuela a lo largo de la vía y en la misma dirección del tren, está a 800 m de distancia. ¿Cuáles son las coordenadas del pájaro determinadas por el pasajero?

Las coordenadas asignadas al pájaro por el hombre en la plataforma de la estación son

$$(x, y, z, t) = (800 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$$

La distancia x' del pájaro al pasajero, medida por éste, es

$$x' = x - vt = 800 \text{ m} - (30 \text{ m/s})(20 \text{ s}) = 200 \text{ m}$$

Por lo tanto, las coordenadas del pájaro determinadas por el pasajero son

$$(x', y', z', t') = (200 \text{ m}, 0, 0, 20 \text{ s})$$

- 1.2.** Referirse al problema 1.1. Cinco segundos después de hacer la primera medición de las coordenadas, el hombre de la plataforma encuentra que el pájaro está a 850 m de distancia. A partir de estos datos, hallar la velocidad del pájaro (suponiéndola constante) medida por el hombre en la plataforma y por el pasajero del tren.

Las coordenadas asignadas al pájaro, por el hombre de la plataforma, en la segunda posición son

$$(x_2, y_2, z_2, t_2) = (850 \text{ m}, 0, 0, 25 \text{ s})$$

Por lo tanto, la velocidad u_x del pájaro medida por el hombre en la plataforma es

$$u_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{850 \text{ m} - 800 \text{ m}}{25 \text{ s} - 20 \text{ s}} = +10 \text{ m/s}$$

El signo positivo indica que el pájaro vuela en dirección positiva del eje de x . El pasajero encuentra que, en la segunda posición, la distancia x'_2 al pájaro es

$$x'_2 = x_2 - vt_2 = 850 \text{ m} - (30 \text{ m/s})(25 \text{ s}) = 100 \text{ m}$$

Así, $(x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) = (100 \text{ m}, 0, 0, 25 \text{ s})$, y la velocidad u'_x del pájaro, medida por el pasajero, es

$$u'_x = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{100 \text{ m} - 200 \text{ m}}{25 \text{ s} - 20 \text{ s}} = -20 \text{ m/s}$$

de modo que, para el pasajero, el pájaro se está moviendo en la dirección negativa del eje x' . Nótese que este resultado está de acuerdo con el que se obtiene de las transformaciones de velocidad, según Galileo:

$$u'_x = u_x - v = 10 \text{ m/s} - 30 \text{ m/s} = -20 \text{ m/s}$$

- 1.3. Una muestra de material radiactivo, en reposo en el laboratorio, emite dos electrones en direcciones opuestas. Uno de los electrones tiene una velocidad de $0.6c$ y el otro, una velocidad de $0.7c$, medidas por un observador en el laboratorio. De acuerdo con las transformaciones clásicas de la velocidad, ¿cuál será la velocidad de un electrón medida en el marco de referencia del otro?

Sea O un observador en reposo, con respecto al laboratorio, y O' un observador en reposo, con respecto a la partícula que se mueve con velocidad $0.6c$ (tomada en la dirección positiva). Entonces, de la transformación de la velocidad según Galileo,

$$u'_x = u_x - v = -0.7c - 0.6c = -1.3c$$

Este problema demuestra que, en transformaciones de Galileo, son posibles velocidades mayores que las de la luz, resultado que está en oposición con la teoría especial de la relatividad.

- 1.4. Un tren que se mueve a 60 mi/h pasa frente a una estación a las $12:00$. Veinte segundos más tarde se observa un destello sobre la vía a una milla de la estación, en la misma dirección en que se mueve el tren. Hallar las coordenadas del destello, medidas por un observador en la estación y por el maquinista del tren.

La coordenada de tiempo medida por ambos observadores es

$$t = t' = (20 \text{ s}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = \frac{1}{180} \text{ h}$$

La coordenada espacial medida por el observador en la estación es $x = 1 \text{ mi}$. Y, para el maquinista del tren, la coordenada espacial es

$$x' = x - vt = 1 \text{ mi} - (60 \text{ mi/h}) \left(\frac{1}{180} \text{ h} \right) = \frac{2}{3} \text{ mi}$$

- 1.5. Un cazador en tierra dispara un proyectil en dirección Noreste y hace blanco en un venado que se encuentra a 0.25 millas del cazador. La velocidad del proyectil es de 1800 mi/h . Un aeroplano que vuela hacia el Este, a una altura de una milla y con una velocidad de 600 mi/h , pasa exactamente sobre el cazador en el instante en que éste dispara. Cuando el proyectil hace blanco en el venado, ¿cuáles son las coordenadas medidas por un observador en el aeroplano?

Utilizando las transformaciones de Galileo,

$$t' = t = \frac{0.25 \text{ mi}}{1800 \text{ mi/h}} = 1.39 \times 10^{-4} \text{ h}$$

$$x' = x - vt = (0.25 \text{ mi}) \cos 45^\circ - (600 \text{ mi/h})(1.39 \times 10^{-4} \text{ h}) = 0.094 \text{ mi}$$

$$y' = y = (0.25 \text{ mi}) \sin 45^\circ = 0.177 \text{ mi}$$

$$z' = z - h = 0 - 1 \text{ mi} = -1 \text{ mi}$$

- 1.6. Un observador en reposo con respecto a la tierra observa la siguiente colisión: una partícula de masa $m_1 = 3 \text{ kg}$ que se mueve con velocidad $u_1 = 4 \text{ m/s}$ a lo largo del eje x se aproxima a una partícula de masa $m_2 = 1 \text{ kg}$ que se mueve con velocidad $u_2 = -3 \text{ m/s}$ a lo largo del eje de x . Después de un choque frontal, el observador en tierra encuentra que m_2 lleva una velocidad $u_2^* = 3 \text{ m/s}$ a lo largo del eje de x . Hallar la velocidad u_1^* de m_1 después del choque.

momentum inicial = momentum final

$$\begin{aligned} m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 u_1^* + m_2 u_2^* \\ (3 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + (1 \text{ kg})(-3 \text{ m/s}) &= (3 \text{ kg})u_1^* + (1 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \\ 9 \text{ kg} \cdot \text{m/s} &= (3 \text{ kg})u_1^* + 3 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

Resolviendo, $u_1^* = 2 \text{ m/seg.}$

- 1.7. Un segundo observador O' , que se mueve con velocidad de 2 m/s relativa a la Tierra y a lo largo del eje de x , observa el choque descrito en el problema 1.6. ¿Cuál es el sistema de los momenta determinado por O' , antes y después del choque?

Utilizando las transformaciones de velocidad según Galileo,

$$\begin{aligned} u_1' &= u_1 - v = 4 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} \\ u_2' &= u_2 - v = -3 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s} = -5 \text{ m/s} \\ u_1^{*'} &= u_1^* - v = 2 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s} = 0 \\ u_2^{*'} &= u_2^* - v = 3 \text{ m/s} - 2 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s} \\ (\text{momentum inicial})' &= m_1 u_1' + m_2 u_2' = (3 \text{ kg})(2 \text{ m/s}) + (1 \text{ kg})(-5 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \\ (\text{momentum final})' &= m_1 u_1^{*'} + m_2 u_2^{*'} = (3 \text{ kg})(0) + (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

Así, como resultado de las transformaciones de Galileo, O' también encuentra que el momentum se conserva (pero con valor diferente del encontrado por O).

- 1.8. En un auto descubierto que viaja a 100 p/s , va un muchacho; éste lanza una pelota hacia arriba, con una velocidad de 20 p/s . Escriba la ecuación del movimiento de la pelota (dar la posición como una función del tiempo) vista (a) por el muchacho, (b) por un observador en reposo sobre la carretera.

(a) Para el muchacho en el auto, la pelota hace un recorrido en línea recta hacia arriba y hacia abajo, así

$$\begin{aligned} y' &= v_0 t' + \frac{1}{2} a t'^2 = (20 \text{ p/s})t' + \frac{1}{2}(-32 \text{ p/s}^2)t'^2 = 20t' - 16t'^2 \\ x' &= z' = 0 \end{aligned}$$

(b) De las transformaciones de Galileo, para un observador en tierra se obtiene

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + vt = 0 + 100t \quad y = y' = 20t - 16t^2 \quad z = z' = 0 \end{aligned}$$

- 1.9. Consideremos una masa atada a un resorte que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Demostrar, a partir de las leyes de transformaciones clásicas que las ecuaciones de movimiento de la masa determinadas por un observador en reposo con respecto a la superficie son

las mismas que las determinadas por un observador que se mueve con velocidad constante, en la dirección del resorte.

La ecuación del movimiento de la masa, determinada por un observador en reposo con respecto a la superficie, es $F = ma$, o

$$-k(x - x_0) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1)$$

Utilizando las transformaciones de Galileo para determinar la ecuación del movimiento encontrada por el segundo observador

$$x = x' + vt' \quad x_0 = x'_0 + vt' \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2}$$

Sustituyendo estos valores en (1) se obtiene

$$-k(x' - x'_0) = m \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (2)$$

Puesto que (1) y (2) tienen la misma forma, la ecuación del movimiento es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

1.10. Demostrar que la ecuación de onda electromagnética

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

no es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

La ecuación será invariante si conserva la misma forma al ser expresada en términos de las nuevas variables: x', y', z', t' . De las transformaciones de Galileo, encontramos primero, que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= 1 & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -v & \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 \\ \frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial t'}{\partial x} = \dots = 0 \end{aligned}$$

De la regla de la cadena y utilizando los resultados anteriores, tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$$

En forma análoga,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2}$$

Además,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -v \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} + v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación de onda se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} + \frac{1}{c^2} \left(2v \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} - v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} \right) = 0$$

Puesto que la forma de la ecuación ha cambiado, se concluye que ésta *no* es invariante bajo las transformaciones de Galileo.

La ecuación de onda electromagnética se deduce de las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética. Aplicando a las ecuaciones de Maxwell el procedimiento descrito aquí, encontramos que éstas *no* son invariantes bajo las transformaciones de Galileo. Compare con el problema 6.23.

Problemas suplementarios

- 1.11. Un hombre (O') se encuentra en la parte posterior de un vagón de plataforma de 20 pies de longitud que se mueve a 30 p/s. El hombre detecta un destello en la parte delantera del vagón, dos segundos después de haber pasado frente a un hombre (O) que se encuentra en tierra. Hallar las coordenadas del acontecimiento determinadas por cada observador. *Resp.* $(x', t') = (20 \text{ pies}, 2 \text{ s}); (x, t) = (80 \text{ pies}, 2 \text{ s})$
- 1.12. Un venado se aleja de un muchacho a una velocidad de 20 mi/h. El muchacho persigue al venado a una velocidad de 8 mi/h. ¿Cuál es la velocidad del venado relativa al muchacho? *Resp.* 12 mi/h
- 1.13. Un tren se mueve con una velocidad de 80 mi/h y en su interior un muchacho lanza una pelota hacia adelante con una velocidad de 20 mi/h. ¿Cuál es la velocidad de la pelota medida por un observador en tierra? *Resp.* 100 mi/h
- 1.14. Un pasajero camina hacia atrás a lo largo del pasillo de un tren, con una velocidad de 2 mi/h. El tren se mueve en un tramo rectilíneo a 60 mi/h con respecto a tierra. ¿Cuál es la velocidad del pasajero medida por un observador en tierra? *Resp.* 58 mi/h
- 1.15. Un conductor que se encuentra en la plataforma de una vía férrea sincroniza su reloj con el del maquinista que viaja en la parte delantera del tren. El tren mide $1/4$ de milla de longitud y viaja a 60 mi/h. Dos minutos después de que el tren sale de la plataforma, el guardafrenos que viaja en el vagón de cola, enciende un cigarrillo. ¿Cuáles son las coordenadas del guardafrenos, determinadas por el maquinista y por el conductor, cuando se enciende el cigarrillo? *Resp.* $(x', t') = (-\frac{1}{4} \text{ mi}, 2 \text{ min}); (x, t) = (1\frac{1}{4} \text{ mi}, 2 \text{ min})$
- 1.16. Un pasajero de un tren enciende dos cigarrillos con un intervalo de diez minutos entre uno y otro. El tren viaja en línea recta con una velocidad de 20 m/s. ¿Cuál es la separación espacial entre los dos acontecimientos, medida por un observador en tierra? *Resp.* 12 000 m.
- 1.17. Una esfera de 1 kg que se mueve hacia el Norte con velocidad de 3 m/s, efectúa un choque perfectamente elástico contra otra esfera idéntica que se encuentra en reposo. Después del choque ambas esferas se mueven a lo largo del eje Norte-Sur. Calcular, en el sistema de laboratorio, el momentum total antes y después del choque. *Resp.* 3 kg·m/s
- 1.18. En el problema 1.17, calcular la energía total antes y después del choque. *Resp.* 4.5 J
- 1.19. En el problema 1.17, calcular el momentum total antes y después del choque, medido por un observador que se mueve hacia el Norte con velocidad de 1.5 m/s. *Resp.* 0
- 1.20. Para el observador del problema 1.19, ¿cuál será la energía total antes y después del choque? *Resp.* 2.25 J
- 1.21. Repetir los problemas 1.19 y 1.20 para un observador que se mueve hacia el Este con velocidad de 2 m/s. *Resp.* 5 kg·m/s 37° al norte del oeste; 8.5 J
- 1.22. Una persona navega en un bote que se mueve hacia el Este, con una velocidad de 15 p/s. En el instante en que el bote pasa frente a un muelle, una persona allí ubicada lanza una piedra hacia el Norte. La piedra choca con el agua 6 s más tarde, a 150 pies de distancia del muelle. Hallar las coordenadas del punto de impacto de la piedra con el agua, medidas por la persona en el bote. *Resp.* $(x, y, t) = (-90 \text{ pies}, 150 \text{ pies}, 6 \text{ s})$
- 1.23. Consideremos un choque elástico, unidimensional, que se efectúa a lo largo del eje de x de un observador O . Demostrar, a partir de las ecuaciones de transformaciones clásicas, que la energía cinética también se conserva, cuando está determinada por otro observador O' que se mueve con velocidad constante u a lo largo del mismo eje de x .

Capítulo 2

Los postulados de Einstein

2.1 EL ESPACIO ABSOLUTO Y EL ÉTER

Una consecuencia de las transformaciones de la velocidad, según Galileo es la siguiente: si un observador encuentra que una señal luminosa viaja con velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s, cualquier otro observador que esté en movimiento con respecto al primero, determinará que la misma señal luminosa viaja a velocidad diferente de c . ¿Qué determina el sistema de referencia particular tal que si un observador está en reposo con relación a este sistema pueda medir el valor de c para la velocidad de la señal luminosa?

Antes de Einstein se creía, en general, que este observador privilegiado era el mismo para el cual eran válidas las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones describen la teoría electromagnética y predicen que las ondas electromagnéticas viajan con velocidad $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8$ m/s. El espacio que estaba en reposo, con respecto a este observador privilegiado, se llamó “espacio absoluto”. Cualquier otro observador en movimiento con respecto a este espacio absoluto, encontraría para la velocidad de la luz un valor diferente de c . Puesto que la luz es una onda electromagnética, los físicos del siglo XIX postularon la existencia de un medio a través del cual se propagara la luz. Fue así como se postuló que el “éter” estaba difundido en todo el espacio absoluto.

2.2 EL EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY.

Si existe un éter, entonces un observador sobre la Tierra y que se mueve a través del éter, notará un “viento de éter”. En 1881, Michelson diseñó un aparato con la sensibilidad necesaria para medir el movimiento de la Tierra a través del éter hipotético. El aparato fue perfeccionado por Michelson y Morley en 1887. Como resultado del experimento, *ningún movimiento a través del éter fue detectado*. Ver problemas 2.4, 2.5 y 2.6.

2.3 MEDIDAS DE LONGITUD Y TIEMPO— UN ASUNTO DE PRINCIPIO

Un elemento común tanto en el resultado negativo del experimento de Michelson-Morley como del hecho de que las ecuaciones de Maxwell sean válidas sólo para un observador privilegiado lo constituye el conjunto de transformaciones de Galileo. Estas “obvias” transformaciones fueron reexaminadas por Einstein desde un punto de vista “operacional”. Einstein propuso que cualquier cantidad importante, en teorías físicas, debería tener, al menos en principio, un procedimiento bien definido mediante el cual se la pudiera medir. Si no se pudiese formular tal procedimiento, la cantidad no debería emplearse en física.

Einstein no pudo encontrar la forma de justificar operacionalmente la transformación de Galileo $t' = t$; es decir, que dos observadores *puedan* medir el mismo tiempo para un acontecimiento. En consecuencia, la transformación $t' = t$, y con ella el resto de las transformaciones de Galileo, fueron rechazadas por Einstein.

2.4 LOS POSTULADOS DE EINSTEIN

La idea que orientó a Einstein, lo que él llamó *Principio de la relatividad*, consistió en que *todos* los observadores no acelerados deben tratarse por igual en todos los aspectos, aunque se muevan (a velocidad constante) unos con relación a otros. Este principio puede formalizarse como sigue:

Postulado 1: Las leyes de la física son las mismas (invariantes) para todos los observadores que se encuentren en sistemas inerciales (no acelerados) de referencia.

Las leyes de Newton para el movimiento concuerdan con el principio de la relatividad, pero las ecuaciones de Maxwell y las transformaciones de Galileo están en desacuerdo con él. Einstein no encontró razones para establecer diferencias básicas entre las leyes de la dinámica y el electromagnetismo. De esto se desprende su segundo postulado:

Postulado 2: La velocidad de la luz en el vacío medida por cualquier observador inercial es

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

independiente del movimiento de la fuente.

Problemas resueltos

- 2.1.** Supongamos que un reloj B está localizado a una distancia L de un observador. Describa la forma de sincronizar este reloj con un reloj A , que se encuentra en el sitio del observador.

Detener el reloj B en $t_B = L/c$. Enviar una señal luminosa hacia el reloj B en el instante $t_A = 0$ (medido en el reloj A). Poner en funcionamiento el reloj B tan pronto llegue a él la señal luminosa.

- 2.2.** Una lámpara de destellos se encuentra a 30 km de un observador. Este *observa* un destello a la 1:00 p.m. ¿A qué hora se produjo el destello?

El tiempo necesario para que la señal luminosa recorra los 30 km es

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{30 \times 10^3 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Por lo tanto, el destello se produjo 1×10^{-4} s antes de la 1:00 p.m.

- 2.3.** Una varilla se mueve de izquierda a derecha. Una cámara fotográfica, frente a la cual se encuentra una regla graduada estacionaria, es accionada cuando el extremo izquierdo de la varilla pasa frente a la cámara. Al revelar el negativo se encontró que el extremo izquierdo de la varilla coincidía con el cero y el extremo derecho, con la división 0.90 m de la regla graduada. Si la varilla se movía a $0.8c$ con respecto a la cámara, ¿cuál es la longitud *propia* de la varilla?

Para que la señal luminosa procedente del extremo derecho de la varilla sea detectada por la cámara, es necesario que salga de la marca 0.90 m con una anterioridad dada por

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{c} = \frac{0.90 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Durante este lapso, el extremo izquierdo de la varilla habrá avanzado una distancia Δs^* dada por (ver figura 2-1)

$$\Delta s^* = v \Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(3 \times 10^{-9} \text{ s}) = 0.72 \text{ m}$$

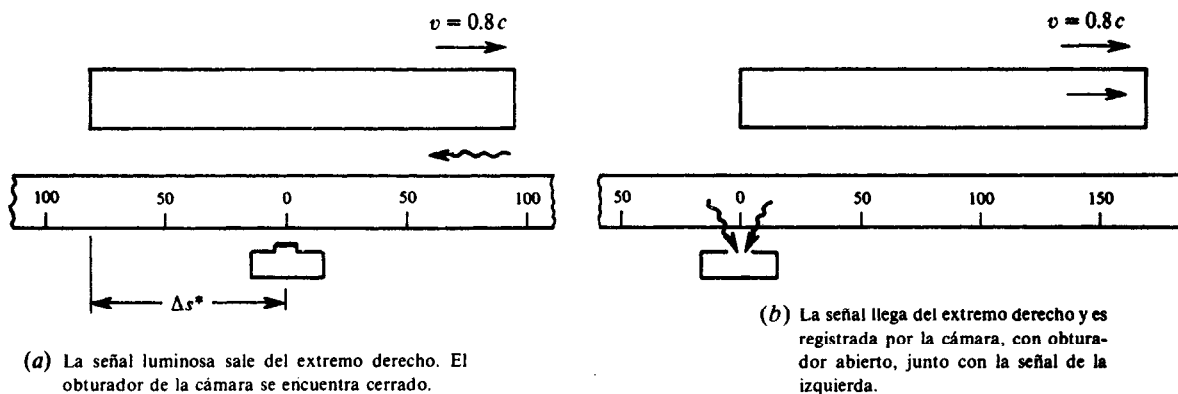
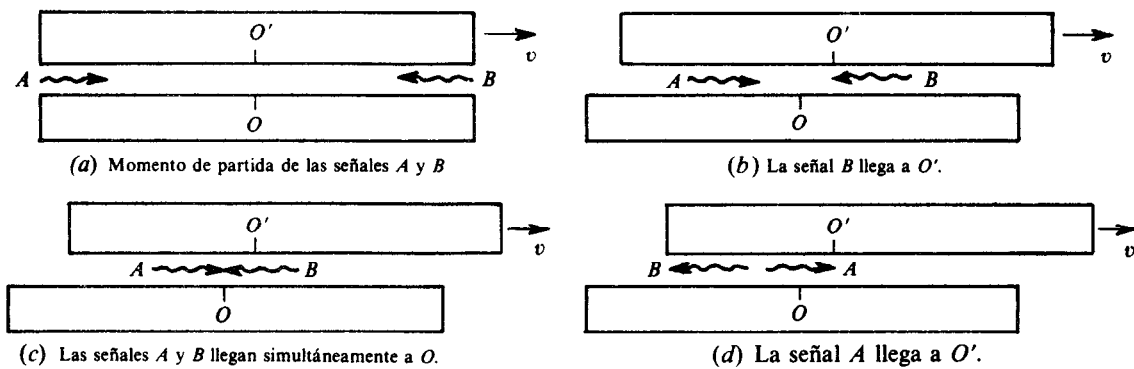


Fig. 2-1

Por lo tanto la longitud propia de la varilla es $L = 0.90 \text{ m} + 0.72 \text{ m} = 1.62 \text{ m}$. Este resultado muestra que la determinación de la longitud de una varilla en movimiento mediante una fotografía *no* proporciona su longitud propia.

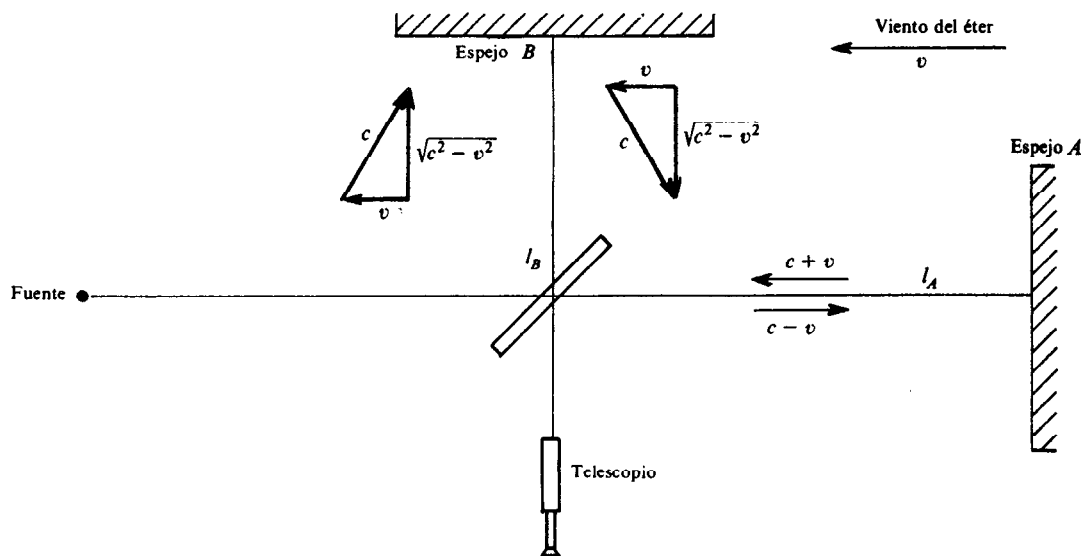
- 2.4. Supongamos que dos acontecimientos tienen lugar a distancias iguales de un observador. Si el observador define la "simultaneidad" de dos acontecimientos equidistantes así: "Dos acontecimientos son simultáneos, si las señales luminosas emitidas desde ellos llegan a mí al mismo tiempo". Siguiendo esta definición demuestre que la simultaneidad establecida por este observador *no* se cumple, en general, para otro observador que se mueva con relación al primero.

En la figura 2-2 se observa que si las señales luminosas llegan al observador (O) al mismo tiempo, llegarán necesariamente en tiempos diferentes al observador (O'). Aunque las dos señales fueron emitidas de sitios equidistantes de O' , este observador, de acuerdo con la definición anterior, no encontrará simultaneidad para los dos acontecimientos, puesto que B ocurre antes que A .



- 2.5. La figura 2-3 muestra un interferómetro de Michelson-Morley orientado de tal modo que su brazo (A) sea paralelo al "viento del éter". Demostrar que si el aparato se gira un ángulo de 90° , el número de franjas ΔN , que cruzan la retícula del telescopio, es en primer orden de $(v/c)^2$,

$$\Delta N = \frac{v^2}{\lambda c^2} (l_A + l_B)$$



Para el brazo A , el tiempo que tarda la luz en llegar al espejo A se obtiene dividiendo la longitud l_A por la velocidad de la luz, que según las transformaciones de Galileo es $c - v$. El rayo reflejado en el espejo A recorre la misma longitud l_A , pero con velocidad $c + v$. Por lo tanto, el tiempo empleado en el viaje de ida y regreso, a lo largo del brazo A es

$$t_A = \frac{l_A}{c - v} + \frac{l_A}{c + v} = \frac{2l_A/c}{1 - (v^2/c^2)}$$

Para viajar a lo largo del otro brazo, el rayo de luz debe estar dirigido de tal manera que el vector velocidad resultante (velocidad con respecto al éter más velocidad del éter con respecto al interferómetro) sea perpendicular al brazo A . Este valor de velocidad a lo largo del brazo l_B tanto a la ida como al regreso, es $\sqrt{c^2 - v^2}$ por lo tanto, el tiempo para el viaje de ida y regreso es

$$t_B = \frac{2l_B}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_B/c}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Si suponemos que $v/c \ll 1$, los tiempos t_A y t_B pueden obtenerse mediante una expansión de primer orden en $(v/c)^2$ y tomar luego la diferencia de tiempos. Así

$$t_A \approx \frac{2l_A}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \quad t_B \approx \frac{2l_B}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right)$$

y

$$\delta = t_A - t_B \approx \frac{2(l_A - l_B)}{c} + \frac{2l_A v^2}{c^3} - \frac{l_B v^2}{c^3}$$

Ahora, al girar el interferómetro 90° l_A y l_B se intercambian y la diferencia de tiempos será

$$\delta' \approx \frac{2(l_B - l_A)}{c} + \frac{l_A v^2}{c^3} - \frac{2l_B v^2}{c^3}$$

y el modelo de interferencia observado mostrara un desplazamiento de franjas de ΔN franjas, donde

$$\Delta N = \frac{\delta - \delta'}{T} = \frac{c(\delta - \delta')}{\lambda} = \frac{(l_A + l_B)v^2}{\lambda c^2}$$

T y λ son respectivamente el período y la longitud de onda de la luz.

- 2.6. Supongamos que la velocidad de la Tierra a través del éter sea igual a su velocidad orbital, esto es $v = 10^{-4}c$. Para un experimento de Michelson-Morley, en el cual los brazos del interferómetro miden cada uno 10 m, con uno de ellos orientado en la dirección del movimiento de la Tierra a través del éter, ¿cuál será la diferencia de tiempo para las dos ondas de luz que viajan a lo largo de los brazos?

Refiérase al problema 2.5.

$$\delta \approx \frac{2}{c} (l_A - l_B) + \frac{2v^2}{c^3} (l_A - \frac{1}{2}l_B) = \frac{2(10^{-4}c)^2}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})c^2} (5 \text{ m}) = 3.33 \times 10^{-16} \text{ s}$$

- 2.7. En el experimento original de Michelson-Morley, se utilizó un interferómetro con brazos de 11 m y luz de sodio, cuya longitud de onda es de 5900 Å. El experimento debería revelar un desplazamiento de franja equivalente a 0.005 franjas. ¿Qué velocidad límite en la velocidad de la tierra respecto al éter arrojaría un resultado nulo en el experimento?

Según el problema 2.5, el número de franjas ΔN que cruzan la retícula del telescopio es

$$\Delta N = \frac{v^2}{\lambda c^2} (l_A + l_B) = \frac{2lv^2}{\lambda c^2}$$

$$0.005 = \frac{2(11 \text{ m})v^2}{(5900 \times 10^{-10} \text{ m})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$

Resolviendo, $v = 3.47 \times 10^3 \text{ m/s}$.

Puesto que la velocidad orbital de la Tierra es de $3 \times 10^4 \text{ m/s}$, el interferómetro era lo suficientemente sensible como para detectar este movimiento, sin embargo, no fue posible observar ningún desplazamiento de franjas.

Problemas suplementarios

- 2.8. Repetir el problema 2.3 para el caso en el que la fotografía sea tomada cuando el extremo *derecho* de la varilla pase frente a la cámara. *Resp.* 0.18 m
- 2.9. En el instante en que el punto medio de una regla de un metro en movimiento pasa frente a una cámara, ésta le toma una fotografía junto con una regla graduada estacionaria, como en el problema 2.3. Si su velocidad relativa a la cámara es $0.8c$, ¿cuál será la longitud de la regla de un metro en movimiento, medida en la fotografía. *Resp.* 2.778 m
- 2.10. Con relación al problema 2.4, si las dos señales llegan simultáneamente a O' , ¿en qué orden aparecen los acontecimientos A y B ? *Resp.* A y luego B
- 2.11. Supongamos que la velocidad orbital de la Tierra $3 \times 10^4 \text{ m/s}$, sea igual a la velocidad de la Tierra a través del éter. Si la luz gasta t_A segundos para atravesar un dispositivo de Michelson-Morley de brazos iguales en dirección paralela a este movimiento, calcular el tiempo que emplea la luz para atravesar el dispositivo en dirección perpendicular a este movimiento. *Resp.* $(1 - 0.5 \times 10^{-8})t_A$

Capítulo 3

Transformaciones de las coordenadas según Lorentz

Las transformaciones de las coordenadas según Galileo no satisfacen el postulado 2 de la sección 2.4. Para lograrlo, Lorentz introdujo las siguientes transformaciones de las coordenadas:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad y' = y \quad z' = z \quad (3.1)$$

Estas ecuaciones se refieren a los dos observadores de la figura 1-1. Las inversiones de estas ecuaciones dan como resultados (ver problema 3.8)

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad y = y' \quad z = z' \quad (3.2)$$

En las ecuaciones (3.1) y (3.2), v es la velocidad de O' con respecto a O a lo largo de su eje común. El signo de v es positivo o negativo, según que O' se mueva en la dirección positiva o negativa del eje de x respectivamente. Además, supone que ambos orígenes coinciden en el instante de realizar el conteo del tiempo; es decir $t' = t = 0$ cuando $x' = x = 0$. Nótese que las transformaciones inversas pueden obtenerse del primer grupo de ecuaciones de transformaciones (3.1), tan sólo con intercambiar las variables primadas con las no primadas y tomar $-v$ en lugar de v . Esto era de esperarse, puesto que ambos observadores se encuentran en sistemas inerciales de referencia y, además, el observador O se mueve con velocidad $-v$ con respecto a O' .

3.1 LA VELOCIDAD DE LA LUZ ES CONSTANTE

Supongamos que, en el instante en que O y O' van a la par (en $t = t' = 0$), se envía una señal luminosa desde su origen común y en la dirección positiva de los ejes x - x' . Si para O las coordenadas de espacio y tiempo de la señal están relacionadas por $x = ct$, para O' , de acuerdo con (3.1), estas coordenadas estarán relacionadas así

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{ct - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{ct[1 - (v/c)]}{\sqrt{[1 - (v/c)][1 + (v/c)]}} = \sqrt{\frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}} ct$$
$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{t - \frac{v}{c^2}ct}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{t[1 - (v/c)]}{\sqrt{[1 - (v/c)][1 + (v/c)]}} = \sqrt{\frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}} t$$

De lo anterior se deduce que para O' la relación entre las coordenadas de espacio y tiempo está dada por $x' = ct'$, expresión que concuerda con el segundo postulado de Einstein. Nótese que para este acontecimiento $t' \neq t$, lo cual está en completo desacuerdo con la suposición de Galileo.

3.2 LA INVARIANCIA DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Tal como se discutió en los capítulos 1 y 2, las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo. Sin embargo, como lo demostró H. A. Lorentz (antes que Einstein), estas ecuaciones son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz. Ver problemas del 6.21 al 6.23.

3.3 CONSIDERACIONES GENERALES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Cuando se plantea un problema de espacio-tiempo, el concepto clave que debe tenerse en cuenta es el de "acontecimiento". La mayoría de los problemas se refieren a dos observadores que miden las coordenadas de espacio y tiempo de un acontecimiento (o acontecimientos). Con cada acontecimiento, están asociados ocho números: (x, y, z, t) , asignados por O y (x', y', z', t') asignados por O' . Las transformaciones de las coordenadas según Lorentz expresan las relaciones entre las coordenadas asignadas por O y las asignadas por O' .

En muchas ocasiones, los problemas se refieren a la determinación de intervalos de espacio y de tiempo, o de uno de los dos, entre dos acontecimientos. En estos casos, una técnica útil consiste en restar, una de la otra, las transformaciones de Lorentz que describen cada acontecimiento. Por ejemplo, supongamos que el observador O' mide los intervalos de espacio y de tiempo entre dos acontecimientos A y B y se desea obtener el intervalo de tiempo entre estos mismos acontecimientos en el sistema de coordenadas de O . De la ecuación (3.2) se obtiene al restar t_A de t_B

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + (v/c^2)(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad (3.3)$$

Es posible determinar el valor de $t_B - t_A$, puesto que todas las cantidades del lado derecho de esta ecuación son conocidas.

3.4 SIMULTANEIDAD

Dos acontecimientos son *simultáneos* para un observador, si éste logra determinar que aquéllos se realizan al mismo tiempo. A la luz de la física clásica, cuando un observador determina que dos acontecimientos son simultáneos y puesto que $t' = t$ en transformaciones de Galileo, cualquier otro observador también encontraría que los dos acontecimientos son simultáneos. No obstante, en física relativista, dos acontecimientos que para un observador son simultáneos, en general, no son simultáneos para otro observador.

Supongamos, por ejemplo, que el observador O' determina que los acontecimientos A y B son simultáneos, es decir, que $t'_A = t'_B$. De acuerdo con la ecuación (3.3), el observador O medirá la diferencia de tiempo entre los mismos acontecimientos, como

$$t_B - t_A = \frac{(v/c^2)(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Si los dos acontecimientos se realizan en el mismo lugar, es decir, $x'_B = x'_A$, entonces serán simultáneos para O . Pero, si $x'_B \neq x'_A$, los dos acontecimientos *no* serán simultáneos para O .

Obsérvese que si los dos acontecimientos se realizan en el mismo lugar del espacio, cada observador necesita *solamente* un reloj para determinar si son simultáneos. Ahora bien, si los dos acontecimientos están espacialmente separados, entonces, cada observador necesita *dos* relojes, sincronizados adecuadamente, para determinar si son o no simultáneos.

Problemas resueltos

- 3.1. Calcular $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ cuando (a) $v = 10^{-2}c$; (b) $v = 0.9998c$.

Para este cálculo utilizaremos la expansión binomial

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots$$

- (a) Reemplazando $x = -10^{-4}$ y $n = 1/2$ en la expansión binomial y tomando solamente los dos primeros términos por ser x demasiado pequeño, obtenemos

$$(1 - 10^{-4})^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}(-10^{-4}) = 1 - 0.00005 = 0.99995$$

(b)
$$\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \sqrt{1 - (0.9998)^2} = \sqrt{1 - (1 - 0.0002)^2}$$

Para calcular $(1 - 0.0002)^2$ utilizamos la expansión binomial para obtener

$$(1 - 0.0002)^2 \approx 1 - 2(0.0002) = 1 - 0.0004$$

Y reemplazando este valor en la expresión anterior, se obtiene

$$\sqrt{1 - (v^2/c^2)} \approx \sqrt{1 - (1 - 0.0004)} = \sqrt{0.0004} = 0.02$$

- 3.2. Para un observador O un destello de luz sale del punto $x = 100$ km, $y = 10$ km, $z = 1$ km en $t = 5 \times 10^{-4}$ s. ¿Cuáles son las coordenadas x' , y' , z' , t' de este acontecimiento, para un segundo observador O' que se mueve con respecto a O a lo largo del eje común $x-x'$, con velocidad de $-0.8c$?

De las transformaciones de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{100 \text{ km} - (-0.8 \times 3 \times 10^5 \text{ km/s})(5 \times 10^{-4} \text{ s})}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 367 \text{ km}$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{5 \times 10^{-4} \text{ s} - \frac{(-0.8)(100 \text{ km})}{3 \times 10^5 \text{ km/s}}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 12.8 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$y' = y = 10 \text{ km}$$

$$z' = z = 1 \text{ km}$$

- 3.3. Supongamos que una partícula se mueve respecto a O' con velocidad constante de $c/2$ en el plano $x'y'$, de tal manera que su trayectoria forma un ángulo de 60° con el eje x' . Si la velocidad de O' con respecto a O es de $0.6c$ a lo largo del eje $x-x'$, hallar las ecuaciones del movimiento de la partícula obtenidas por O .

Las ecuaciones del movimiento determinadas por O' son

$$x' = u'_x t' = \frac{c}{2} (\cos 60^\circ) t' \quad y' = u'_y t' = \frac{c}{2} (\sin 60^\circ) t'$$

Sustituyendo los valores de x' y t' de la ecuación (3.1) en la primera expresión, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} &= \frac{c}{2} (\cos 60^\circ) \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ x - (0.6c)t &= \frac{c}{2} (\cos 60^\circ) \left(t - \frac{0.6}{c}x \right) \\ x &= (0.74c)t \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de y' y t' de la ecuación (3.1) en la segunda expresión, da

$$y' = y = \frac{c}{2} (\sin 60^\circ) \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{c}{2} (\sin 60^\circ) \frac{t - (0.6)(0.74 t)}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = (0.30 c) t$$

- 3.4. Un tren de media milla de longitud (medida por un observador en el tren) viaja a 100 mi/h. Dos destellos de luz inciden simultáneamente en los extremos del tren para un observador en tierra. ¿Cuál es la diferencia de tiempo en este acontecimiento para un observador en el tren?

Convirtiendo mi/h a mi/s

$$(100 \text{ mi/h}) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right) = 2.78 \times 10^{-2} \text{ mi/s}$$

Sean A y B respectivamente la incidencia del destello de luz en cada extremo del tren. De acuerdo con la ecuación (3.3), para el observador en tierra se tiene

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2} (x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{2.78 \times 10^{-2} \text{ mi/s}}{(1.86 \times 10^5 \text{ mi/s})^2} (0.5 \text{ mi})}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Resolviendo $t'_B - t'_A = -4.02 \times 10^{-3} \text{ s}$. El signo menos indica que el acontecimiento A ocurrió después que B .

- 3.5. Para un observador O , dos acontecimientos están separados en el espacio y en el tiempo por 600 m y $8 \times 10^{-7} \text{ s}$. ¿Con qué velocidad debe moverse un observador O' con relación a O para que los acontecimientos aparezcan simultáneos a O' ?

Estableciendo la diferencia en tiempos de acuerdo con las transformaciones de Lorentz, obtenemos

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{8 \times 10^{-7} \text{ s} - \frac{v}{c} \left(\frac{600 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Resolviendo, $v/c = 0.4$.

- 3.6. Las coordenadas de espacio y tiempo para dos acontecimientos medidas por O son $x_1 = 6 \times 10^4 \text{ m}$, $y_1 = z_1 = 0 \text{ m}$, $t_1 = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$ y $x_2 = 12 \times 10^4 \text{ m}$, $y_2 = z_2 = 0 \text{ m}$, $t_2 = 1 \times 10^{-4} \text{ s}$. ¿Cuál debe ser la velocidad de O' con respecto a O , para que los dos acontecimientos aparezcan simultáneamente a O' ?

Efectuando la diferencia de tiempos como en el problema 3.5

$$t'_2 - t'_1 = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2} (x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

$$0 = \frac{(1 \times 10^{-4} \text{ s} - 2 \times 10^{-4} \text{ s}) - \frac{v}{c} \left(\frac{12 \times 10^4 \text{ m} - 6 \times 10^4 \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Resolviendo $v/c = -1/2$. Por lo tanto v está en la dirección negativa del eje de x .

- 3.7. Refiérase al problema 3.6. ¿Cuál es la separación espacial para los dos acontecimientos medidos por O' ?

La separación espacial, de acuerdo con las transformaciones de Lorentz, es

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Del problema 3.6, $v/c = -1/2$ ó $v = -1.5 \times 10^8$ m/s.

$$x'_2 - x'_1 = \frac{(12 \times 10^4 \text{ m} - 6 \times 10^4 \text{ m}) - (-1.5 \times 10^8 \text{ m/s})(1 \times 10^{-4} \text{ s} - 2 \times 10^{-4} \text{ s})}{\sqrt{1 - (-0.5)^2}} = 5.20 \times 10^4 \text{ m}$$

Problemas suplementarios

- 3.8. A partir de las ecuaciones (3.1), obtenga los resultados (3.2).
- 3.9. Para un observador O' , un destello de luz incide en $x' = 60$ m, $y' = z' = 0$, $t' = 8 \times 10^{-8}$ s. Si O' se mueve respecto a O con velocidad $0.6c$ a lo largo del eje de x , ¿cuáles son las coordenadas de espacio y tiempo para la incidencia del destello medidas por O ? Resp. $(x, y, z, t) = (93 \text{ m}, 0, 0, 2 \times 10^{-7} \text{ s})$
- 3.10. Un observador O' se mueve con velocidad de $0.8c$ respecto a O . Los relojes se ajustan de tal manera que $t = t' = 0$ en $x = x' = 0$. Si para O un destello de luz sale en $x = 50$ m y $t = 2 \times 10^{-7}$ s, ¿cuál es el tiempo de este acontecimiento medido por O' ? Resp. 1.11×10^{-7} s
- 3.11. Refiérase al problema 3.10. Si un segundo destello aparece en $x' = 10$ m y $t' = 2 \times 10^{-7}$ s para el observador O' , ¿cuál será el intervalo de tiempo entre los dos acontecimientos medidos por O ? Resp. 1.78×10^{-7} s
- 3.12. Refiérase al problema 3.11. ¿Cuál es la separación espacial entre los dos acontecimientos, medida (a) por O' , (b) por O ? Resp. (a) 6.67 m; (b) 46.67 m

Capítulo 4

Medidas relativistas de longitud

4.1 DEFINICION DE LONGITUD

Si un cuerpo está en reposo respecto de un observador, su longitud se determina midiendo la diferencia entre las coordenadas espaciales de los extremos del cuerpo. Como el cuerpo no está en movimiento, estas medidas pueden efectuarse en cualquier tiempo y la longitud así obtenida se denomina *longitud de reposo* o *longitud propia* del cuerpo.

Tratándose de un cuerpo en movimiento, el procedimiento es más complicado, puesto que las coordenadas de los puntos extremos del cuerpo *deben medirse al mismo tiempo*. La longitud del cuerpo se define como la diferencia entre estas coordenadas.

Supongamos ahora que una regla orientada en la dirección del eje $x-x'$ está en reposo con respecto a un observador O' . Queremos saber cómo están relacionadas las medidas de las longitudes obtenidas por los observadores O y O' , cuando O' se mueve con respecto a O en la dirección del eje $x-x'$ con velocidad v . Designemos con A y B los extremos de la regla. De las transformaciones inversas de Lorentz, se obtiene

$$x'_B - x'_A = \frac{(x_B - x_A) + v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

La diferencia $x'_B - x'_A = L_0$ es la longitud (propia) de la regla medida por O' . Si las medidas x_B y x_A son obtenidas por O al mismo tiempo, de modo que $t_B - t_A = 0$, entonces la diferencia $x_B - x_A = L$ será la longitud de la regla medida por O . Por lo tanto

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

Puesto que $\sqrt{1 - (v^2/c^2)} < 1$, entonces $L < L_0$, o sea que la longitud de la regla en movimiento obtenida por O está contraída. Este resultado se conoce como la *contracción de Lorentz-Fitzgerald*.

¡Una advertencia!

Es necesario aclarar la diferencia entre los conceptos de “separación espacial de las coordenadas” y “longitud”. Un error común en la solución de problemas consiste simplemente en multiplicar o dividir un determinado intervalo espacial por el término $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Esta aproximación es válida si se trata de hallar relaciones entre longitudes, entendiéndose por “longitud” lo definido anteriormente. Sin embargo, si se trata de un intervalo espacial entre dos acontecimientos que no tienen lugar simultáneamente, la respuesta se obtiene utilizando la técnica de sustracción de la sección 3.3 y *no* multiplicando o dividiendo la expresión espacial original por $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

Problemas resueltos

- 4.1. ¿A qué velocidad debe viajar un cohete, para que su longitud se contraiga al 99% de su longitud de reposo?

De la expresión para la contracción de la longitud,

$$\frac{L}{L_0} = 0.99 = \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \quad \text{ó} \quad v = 0.141c$$

- 4.2.** Calcular la contracción de Lorentz para el diámetro de la Tierra (en el plano de la eclíptica) medido por un observador O' estacionario con respecto al Sol.

Tomando para la velocidad orbital de la Tierra el valor de $3 \times 10^4 \text{ m/s}$ y para el diámetro de la misma 7920 mi, de la expresión para la contracción de Lorentz se obtiene,

$$D = D_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (7.92 \times 10^3 \text{ mi}) \sqrt{1 - \left(\frac{3 \times 10^4 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \right)^2} \approx (7.92 \times 10^3 \text{ mi})(1 - 0.5 \times 10^{-8})$$

Resolviendo, $D_0 - D = 3.96 \times 10^{-5} \text{ mi} = 2.51 \text{ pul}$. Se observa que los efectos relativistas son muy pequeños a velocidades de uso corriente.

- 4.3.** Una regla de 1 m forma un ángulo de 30° con el eje x' medido por O' . ¿Cuál debe ser el valor de la velocidad v para que la regla forme un ángulo de 45° con el eje de x para un observador O ?

Tenemos:

$$L'_y = L' \sin \theta' = (1 \text{ m}) \sin 30^\circ = 0.5 \text{ m} \quad L'_x = L' \cos \theta' = (1 \text{ m}) \cos 30^\circ = 0.866 \text{ m}$$

Debido a que la contracción se presenta solamente en la dirección del eje $x-x'$,

$$L_y = L'_y = 0.5 \text{ m} \quad L_x = L'_x \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (0.866 \text{ m}) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

Puesto que $\tan \theta = L_y/L_x$,

$$\tan 45^\circ = 1 = \frac{0.5 \text{ m}}{(0.866 \text{ m}) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Resolviendo, $v = 0.816c$.

- 4.4.** Refiérase al problema 4.3. ¿Cuál es la longitud de la regla de 1 metro medida por O ?

Utilizando el teorema de Pitágoras o, más simplemente,

$$L = \frac{L_y}{\sin 45^\circ} = \frac{0.5 \text{ m}}{\sin 45^\circ} = 0.707 \text{ m}$$

- 4.5.** El volumen (propio) de un cubo es de 1000 cm^3 . Hallar el volumen medido por un observador O' que se mueve con velocidad de $0.8c$ respecto al cubo y en la dirección paralela a una de sus aristas.

El observador encuentra que una de las aristas del cubo paralela a la dirección del movimiento tiene una longitud contraída de

$$l'_x = l_x \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (10 \text{ cm}) \sqrt{1 - (0.8)^2} = 6 \text{ cm}$$

Las longitudes de las otras aristas permanecen invariantes:

$$l'_y = l_y = l'_z = l_z = 10 \text{ cm}$$

Por lo tanto,

$$V' = l'_x l'_y l'_z = (6 \text{ cm})(10 \text{ cm})(10 \text{ cm}) = 600 \text{ cm}^3$$

Problemas suplementarios

- 4.6. Un aeroplano se mueve con respecto a tierra a una velocidad de 600 m/s. Si su longitud propia es de 50 m, ¿en cuánto aparece contraído para un observador en tierra? *Resp.* 10^{-10} m
- 4.7. ¿Cuál es la contracción en longitud para un tren de 1/2 milla cuando viaja a 100 mi/h?
Resp. 5.58×10^{-15} mi = 3.52×10^{-10} pul
- 4.8. ¿Qué velocidad debe llevar un observador que sobrepase la Tierra, para que ésta aparezca como una elipse, cuyo eje mayor sea seis veces su eje menor? *Resp.* $0.986c$
- 4.9. Un observador O' sostiene una regla de 1 m la cual forma un ángulo de 30° con la dirección positiva del eje de x' . O' viaja en la dirección positiva del eje $x-x'$ con velocidad de $0.8c$ respecto al observador O . ¿Cuáles son la longitud y el ángulo de la regla medidos por O ? *Resp.* 0.721 m; 43.9°
- 4.10. Un cuadrado de 100 cm^2 está en reposo en el sistema de referencia de O . El observador O' se mueve con velocidad de $0.8c$ respecto a O y en dirección paralela a uno de los lados del cuadrado. ¿Qué área mide O' ?
Resp. 60 cm^2
- 4.11. En el problema 4.10, hallar el área medida por O' si éste se mueve con velocidad $0.8c$ respecto a O a lo largo de una diagonal del cuadrado. *Resp.* 60 cm^2
- 4.12. Repetir el problema 4.5 si O' se mueve con la misma velocidad paralelamente a una de las diagonales del cubo.
Resp. 600 cm^3

Capítulo 5

Medidas relativistas de tiempo

5.1 TIEMPO PROPIO

Si un observador, por ejemplo O , determina que dos acontecimientos A y B ocurren en el mismo lugar, el intervalo de tiempo entre estos dos acontecimientos puede ser medido por O utilizando solamente un reloj. Este intervalo de tiempo $t_B - t_A = \Delta t_0$, medido por O con un solo reloj, se denomina *intervalo de tiempo propio* entre los dos acontecimientos.

5.2 DILATACION DEL TIEMPO

Consideremos ahora los mismos dos acontecimientos A y B vistos por un segundo observador O' , el cual se mueve con velocidad v respecto a O . El segundo observador determinará, necesariamente, que los dos acontecimientos ocurren en lugares diferentes y, por lo tanto, tendrá que utilizar dos relojes sincronizados adecuadamente para establecer la diferencia de tiempo $t'_B - t'_A = \Delta t'$ entre A y B . Con el fin de obtener la relación entre las separaciones de tiempo medidas por O y O' , establezcamos la diferencia entre las transformaciones de Lorentz para el tiempo

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0 - \frac{v}{c^2} (x_B - x_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Puesto que para O los dos acontecimientos ocurren en el mismo lugar, $x_B - x_A = 0$, entonces

$$\Delta t' = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

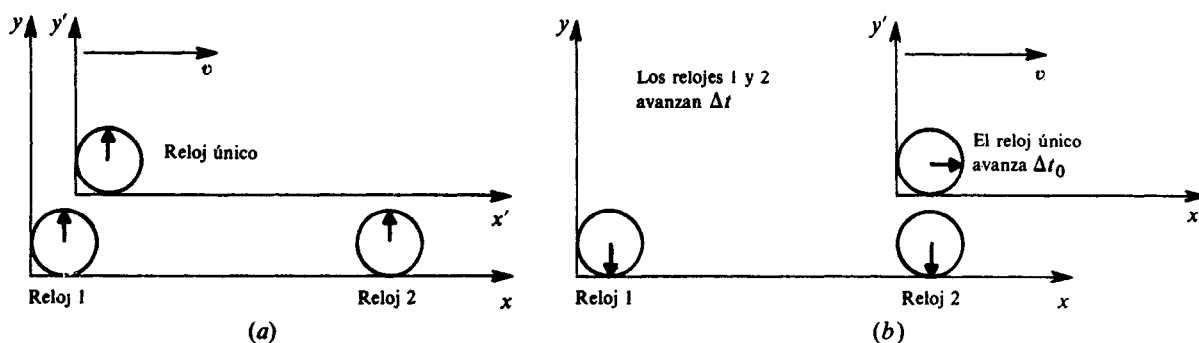
Como $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, $\Delta t' > \Delta t_0$, de tal manera que el intervalo de tiempo entre los dos acontecimientos medido por O' se encuentra *dilatado* (aumentado).

En el ejemplo anterior, hemos considerado el reloj en reposo con respecto a O . Al mismo resultado se hubiera llegado al considerar el reloj en reposo con respecto a O' . En general, un *solo* reloj mide un intervalo de tiempo Δt_0 . Si este reloj se mueve con velocidad v respecto a un observador, éste encontrará que sus dos relojes miden un intervalo de tiempo Δt dado por

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Ver figura 5-1.

La dilatación del tiempo es un efecto real. Supongamos que en la figura 5-1 se colocan cámaras fotográficas frente al reloj 2 y frente al reloj único y que cada cámara toma una fotografía en el instante en que el reloj único pasa frente al reloj 2. Cada fotografía mostrará lo mismo, es decir, que el reloj único ha avanzado Δt_0 mientras que el reloj 2 ha avanzado Δt , donde los intervalos Δt y Δt_0 están relacionados de acuerdo con la expresión para la dilatación del tiempo.

Fig. 5-1 Dilatación del tiempo vista por un observador O

¡Una advertencia!

Es importante establecer claramente la diferencia entre la "separación temporal" de dos acontecimientos y el "intervalo propio de tiempo" entre dos acontecimientos. Si los observadores O y O' miden la separación temporal entre dos acontecimientos, que para ambos observadores tienen lugar en diferentes sitios, estas separaciones temporales *no* se relacionan simplemente multiplicando o dividiendo por $\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$.

Problemas resueltos

- 5.1. El tiempo de vida promedio de los mesones μ con velocidad de $0.95c$ es de 6×10^{-6} s. Calcular el tiempo de vida promedio de los mesones μ en un sistema en el cual se encuentren en reposo.

El tiempo medido en un sistema en el cual los mesones μ están en reposo es el tiempo propio.

$$\Delta t_0 = (\Delta t) \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (6 \times 10^{-6} \text{ s}) \sqrt{1 - (0.95)^2} = 1.87 \times 10^{-6} \text{ s}$$

- 5.2. Un aeroplano se mueve respecto a la tierra con velocidad de 600 m/s. Medido por relojes en tierra, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que el reloj del aeroplano se atrase 2 microsegundos?

De la expresión para la dilatación del tiempo,

$$\Delta t_{\text{tierra}} = \frac{\Delta t_{\text{aeroplano}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t_{\text{aeroplano}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{6 \times 10^2 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} \approx \frac{\Delta t_{\text{aeroplano}}}{1 - 2 \times 10^{-12}}$$

$$(2 \times 10^{-12}) \Delta t_{\text{tierra}} \approx \Delta t_{\text{tierra}} - \Delta t_{\text{aeroplano}} = 2 \times 10^{-6} \text{ s}$$

$$\Delta t_{\text{tierra}} \approx 10^6 \text{ s} = 11.6 \text{ días}$$

Este resultado indica la pequeñez de los efectos relativistas a velocidades comunes.

- 5.3. Dos observadores O y O' se acercan el uno hacia el otro, con una velocidad relativa de $0.6c$. Si O encuentra que la distancia inicial que lo separa de O' es de 20 m, ¿cuánto tiempo transcurrirá, medido por O , para que los dos observadores se encuentren?

Tenemos:

$$\Delta t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{20 \text{ m}}{0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 11.1 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- 5.4.** En el problema 5.3, ¿cuánto tiempo transcurrirá, medido por O' , para que los dos observadores se encuentren?

Los dos acontecimientos considerados aquí son: (A) la posición de O' cuando O realiza su medición inicial y (B) el encuentro de O y O' . Ambos acontecimientos tienen lugar en el origen de O' . Por lo tanto, el intervalo de tiempo medido por O' es igual al tiempo propio entre los dos acontecimientos. De las expresiones para la dilatación del tiempo,

$$\Delta t_0 = (\Delta t) \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (11.1 \times 10^{-8} \text{ s}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 8.89 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Este problema puede resolverse también mediante la contracción de Lorentz, considerando que la distancia inicial medida por O' se relaciona con la distancia medida por O :

$$L' = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (20 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 16 \text{ m}$$

Entonces

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{16 \text{ m}}{0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 8.89 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- 5.5.** Los mesones π tienen una vida media de $1.8 \times 10^{-8} \text{ s}$. Un haz de mesones π sale de un acelerador a una velocidad de $0.8c$. Clásicamente, ¿qué distancia recorre el haz de mesones π , hasta producirse el decaimiento de la mitad de ellos?

Tenemos:

$$\text{distancia} = v \Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(1.8 \times 10^{-8} \text{ s}) = 4.32 \text{ m}$$

- 5.6.** Encontrar la respuesta para el problema 5.5 desde el punto de vista relativista.

La vida media para los mesones π de $1.8 \times 10^{-8} \text{ s}$ está calculada por un observador en reposo respecto al haz. Para un observador en el laboratorio, la vida media se encuentra incrementada debido a la dilatación del tiempo y está dada por

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{1.8 \times 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 3 \times 10^{-8} \text{ s}$$

Por lo tanto, la distancia recorrida es

$$d = v \Delta t = (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(3 \times 10^{-8} \text{ s}) = 7.20 \text{ m}$$

Para un observador en reposo, respecto al haz de mesones π , la distancia d_p que éstos tienen que recorrer es menor que la distancia d_l de laboratorio, debido a la contracción de Lorentz:

$$d_p = d_l \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = d_l \sqrt{1 - (0.8)^2} = 0.6d_l$$

El tiempo transcurrido mientras se recorre esta distancia es

$$\Delta t_0 = \frac{d_p}{v} \quad \text{ó} \quad 1.8 \times 10^{-8} \text{ s} = \frac{0.6d_l}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}$$

Resolviendo, $d_l = 7.20 \text{ m}$, lo cual coincide con la respuesta obtenida a partir de la dilatación del tiempo.

Problemas suplementarios

- 5.7.** Un átomo decae en $2 \times 10^{-6} \text{ s}$. ¿Cuál será el tiempo de decaimiento medido por un observador en el laboratorio, si el átomo se mueve con velocidad de $0.8c$. Resp. $3.33 \times 10^{-6} \text{ s}$

- 5.8. ¿Qué velocidad deberá tener una nave espacial para que un observador que viaje en ella envejezca la mitad de lo que envejece un observador en tierra? *Resp.* $0.866c$
- 5.9. Un cosmonauta tiene un plazo de 60 años para visitar una galaxia que se encuentra a 160 000 años luz de distancia. ¿Cuál debe ser su velocidad constante? *Resp.* $v/c = 1 - (0.703 \times 10^{-7})$
- 5.10. Una partícula que se mueve en el laboratorio decae después de recorrer 3 m. ¿Cuánto tiempo dura la partícula para un observador en el laboratorio? *Resp.* $1.25 \times 10^{-8} \text{ s}$
- 5.11. ¿Qué tiempo dura la partícula del problema 5.10 para un observador que viaje con ella?
Resp. $0.75 \times 10^{-8} \text{ s}$

Capítulo 6

Medidas relativistas de espacio-tiempo

En los capítulos anteriores discutimos, más o menos separadamente, las medidas relativistas de espacio y de tiempo. Existen muchos problemas en los cuales estas medidas no pueden tratarse separadamente por encontrarse íntimamente relacionadas.

Problemas resueltos

- 6.1.** Una regla de un metro se mueve en la dirección de su longitud, con velocidad de $0.6c$ respecto a usted. ¿Cuánto tiempo tardará la regla en pasar frente a usted?

La longitud de la regla medida por el lector se obtiene a partir de la contracción de Lorentz:

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (1 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 0.8 \text{ m}$$

El tiempo necesario para que la regla pase frente a usted se deduce de

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

$$0.8 \text{ m} = (0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}) \times \Delta t$$

$$\Delta t = 4.44 \times 10^{-9} \text{ s}$$

- 6.2.** El tiempo que tarda la luz en llegar hasta nosotros, desde los puntos más lejanos de nuestra galaxia es 10^5 años. ¿Sería posible que un ser humano, a velocidad constante, hiciera este recorrido en 50 años?

Para un observador en reposo con respecto a la Tierra, la distancia recorrida por la luz en 10^5 años es

$$d_0 = c(\Delta t) = 10^5 c$$

donde c puede estar, por ejemplo, en mi/año. Si este observador se mueve ahora con velocidad constante v respecto a la Tierra, la distancia d que se recorre está disminuida de acuerdo con la contracción de Lorentz:

$$d = d_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (10^5 c) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

El tiempo disponible para recorrer esta distancia es de 50 años, por lo tanto

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{10^5 c \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{50}$$

Resolviendo,

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - 2.5 \times 10^{-7}} \approx 0.999999875$$

Así, un ser humano que viaje a esta velocidad encontrará que al final de su recorrido habrá envejecido 50 años.

- 6.3. Un mesón μ con un promedio de vida de 2×10^{-6} s se crea en la atmósfera superior a una altura de 6000 m. En el momento de su creación tiene una velocidad de $0.998c$ dirigida hacia la Tierra. ¿Cuál es la distancia promedio recorrida antes de su decaimiento, medida por un observador en tierra? (Clásicamente esta distancia es

$$d = v \Delta t = (0.998 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 599 \text{ m}$$

por lo tanto, en promedio, los mesones μ no podrían llegar a la Tierra.)

Medido por un observador en tierra, el tiempo de vida está aumentado por la dilatación del tiempo:

$$\Delta t_{\text{tierra}} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{2 \times 10^{-6} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0.998)^2}} = 31.6 \times 10^{-6} \text{ s}$$

La distancia promedio recorrida medida por un observador en tierra, es

$$d = v \Delta t_{\text{tierra}} = (0.998 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(31.6 \times 10^{-6} \text{ s}) = 9470 \text{ m}$$

Así, para un observador en general, el mesón μ alcanza a llegar a tierra.

- 6.4. Consideremos un observador en reposo, con respecto a los mesones μ del problema 6.3. ¿Qué distancia se acerca la Tierra al observador antes de que el mesón μ se desintegre? Compare esta distancia con la que él mide desde el punto de creación del mesón μ hasta la Tierra.

Para un observador en reposo, con respecto al mesón μ , la distancia recorrida por la Tierra es

$$d = v \Delta t_0 = (0.998 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(2 \times 10^{-6} \text{ s}) = 599 \text{ m}$$

La distancia inicial L , desde el punto de creación del mesón μ hasta la Tierra, se encuentra acortada de acuerdo con la contracción de Lorentz:

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (6 \times 10^3 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.998)^2} = 379 \text{ m}$$

Por lo tanto, el mesón μ en general llegará a tierra para un observador en reposo respecto a él. Este resultado concuerda con el del problema 6.3.

- 6.5. El piloto de una nave espacial, que viaja con una velocidad de $0.6c$, ajusta su reloj a las 12 p.m. en el momento en que pasa frente a la Tierra. A las 12:30 p.m. la nave pasa frente a una estación espacial en reposo respecto a la Tierra. ¿Qué hora es en la estación al paso de la nave?

De la expresión para la dilatación del tiempo,

$$\Delta t_{\text{estación}} = \frac{\Delta t_{\text{nave}}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{30 \text{ min}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 37.5 \text{ min}$$

Consecuentemente, en la estación espacial son las 12:37.5 p.m.

- 6.6. En el problema 6.5, ¿cuál es la distancia de la Tierra a la estación espacial medida (a) por el piloto; (b) por un observador en la Tierra?

$$(a) \quad \text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} = (0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(30 \text{ min} \times 60 \text{ s/min}) \\ = 3.24 \times 10^{11} \text{ m}$$

$$(b) \quad \text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo} = (0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})(37.5 \text{ min} \times 60 \text{ s/min}) \\ = 4.05 \times 10^{11} \text{ m}$$

- 6.7. En el momento en que la nave de los problemas 6.5 y 6.6 pasa frente a la estación espacial, el piloto envía a la Tierra una señal de radio. ¿Cuándo se recibe en la Tierra esta señal, (a) para un observador en la tierra; (b) para el piloto?

(a) Para un observador en la Tierra,

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4.05 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 22.5 \text{ min}$$

Así, la señal llega a las

$$12:37.5 \text{ p.m.} + 22.5 \text{ min} = 1:00 \text{ p.m.}$$

(b) Para el piloto,

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{3.24 \times 10^{11} \text{ m}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 18 \text{ min}$$

Luego, la señal llega a las

$$12:30 \text{ p.m.} + 18 \text{ min} = 12:48 \text{ p.m.}$$

- 6.8. Supongamos que para un observador O dos acontecimientos se encuentran separados por una distancia de $3.6 \times 10^8 \text{ m}$ y se realizan con una diferencia de tiempo de 2 segundos. ¿Cuál es el intervalo de tiempo propio entre la realización de estos dos acontecimientos?

Existe un segundo observador O' , que se mueve con respecto al primero y para el cual estos dos acontecimientos se realizan en el mismo lugar del espacio. Este observador es quien determina el intervalo de tiempo propio entre los dos acontecimientos. Utilizando las transformaciones de Lorentz y denominando los acontecimientos con A y B , se tiene

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= \frac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ 0 &= \frac{3.6 \times 10^8 \text{ m} - v(2 \text{ s})}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ v &= 1.8 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.6c \end{aligned}$$

Para la obtención del intervalo de tiempo propio, con ayuda de las transformaciones de Lorentz, encontramos

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{2 \text{ s} - \frac{0.6 \times 3.6 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 1.6 \text{ s}$$

Este problema también se puede resolver utilizando v y la expresión para la dilatación del tiempo

$$\Delta t_0 = (\Delta t) \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (2 \text{ s}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 1.6 \text{ s}$$

- 6.9. Dos acontecimientos que tienen lugar a 600 km de distancia uno del otro, aparecen simultáneos para un observador O . ¿Cuál es la diferencia de tiempo entre estos dos acontecimientos medida por un observador O' para quien estos hechos están separados 1200 km?

Sean A y B los dos acontecimientos; de las transformaciones de Lorentz se obtiene

$$\begin{aligned} x'_B - x'_A &= \frac{(x_B - x_A) - v(t_B - t_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ 12 \times 10^5 \text{ m} &= \frac{6 \times 10^5 \text{ m} - v(0)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ \frac{v}{c} &= 0.866 \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo las transformaciones de Lorentz:

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{0 - \frac{0.866(6 \times 10^5 \text{ m})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}}{\sqrt{1 - (0.866)^2}} = -3.46 \times 10^{-3} \text{ s}$$

El signo menos significa que para el observador O' el acontecimiento A se realizó después que el acontecimiento B .

- 6.10.** Un observador O' que se mueve con velocidad de $0.8c$ respecto a una plataforma espacial, viaja hacia la estrella Alfa del Centauro, la cual se encuentra a 4 años luz de distancia de la plataforma. Tan pronto llega a la estrella, le da la vuelta y emprende su viaje de regreso a la misma velocidad. Compare la edad de O' a su llegada a la plataforma con la de su hermano gemelo O , quien permaneció en ella.

Para O la duración del viaje de ida es

$$\Delta t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4 \text{ años} \times (\text{distancia recorrida por la luz/año})}{0.8 \times (\text{distancia recorrida por la luz/año})} = 5 \text{ años}$$

Puesto que el viaje de regreso se efectúa a la misma velocidad, el tiempo total para el observador O , en la plataforma, es

$$\Delta t_{\text{ida y regreso}} = 10 \text{ años}$$

Para O' el intervalo de tiempo propio entre la salida de la plataforma y su llegada a la estrella, utilizando la expresión para la dilatación del tiempo, es

$$\Delta t_0 = (\Delta t) \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (5 \text{ años}) \sqrt{1 - (0.8)^2} = 3 \text{ años}$$

y el tiempo total medido por O' es

$$\Delta t_{\text{viaje}} = 6 \text{ años}$$

Por lo tanto, a su encuentro, O' está cuatro años más joven que O . Este resultado ilustra la famosa "paradoja de los gemelos" de la Teoría especial de la relatividad. Nótese que el movimiento de los gemelos es *definitivamente* asimétrico. Con el fin de regresar a la plataforma, el gemelo viajero debe girar alrededor de la estrella. Este giro es real (O' experimenta aceleraciones medibles), en contraste con el aparente giro que O' observa de O (quien no experimenta aceleración alguna durante todo el viaje). Luego, el movimiento de O' es equivalente al de dos observadores inerciales diferentes, uno que se mueve con velocidad $v = +0.8c$ y el otro con velocidad $v = -0.8c$. El gemelo O , por otra parte, es equivalente a un único observador inicial.

- 6.11.** Con relación al problema 6.10, supongamos que cada año, (medido por O), éste envía una señal luminosa a O' . ¿Cuántas señales recibe O' en cada etapa de su recorrido? (En otras palabras, ¿qué vería realmente O' si él mirara a su hermano O a través de un telescopio?)

Medido por O , el hermano O' llega a la estrella Alfa del Centauro en 5 años. Con el fin de que la señal luminosa llegue a Alfa del Centauro simultáneamente con O' , ésta debe ser enviada por O en un tiempo anterior determinado por

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4 \text{ años} \times (\text{distancia recorrida por la luz/año})}{(\text{distancia recorrida por la luz/año})} = 4 \text{ años}$$

Luego, una señal enviada por O en t igual 1 año llega a Alfa del Centauro simultáneamente con O' . Puesto que O envía un total de 10 señales, las señales restantes llegan todas a O' en su viaje de regreso.

- 6.12.** Refiérase a los problemas 6.10 y 6.11. Supongamos que cada año (medido por O'), éste envía una señal luminosa a O . Si la señal es enviada por O' tan pronto como ésta llega a la estrella, ¿cuál es el tiempo, medido por O , para que la señal sea recibida (es decir, *qué vería* el gemelo O si él mira a su hermano a través de un telescopio)?

Medido por O , el hermano O' llega a la estrella en $t = 5$ años. Una señal luminosa enviada por O' desde Alfa del Centauro llegará a O en un tiempo (medido por O) de

$$\Delta t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{4 \text{ años} \times (\text{distancia recorrida por luz/año})}{\text{distancia recorrida por la luz/año}} = 4 \text{ años}$$

Entonces, esta señal llega a O en $t = 5$ años + 4 años = 9 años. Por lo tanto, de las seis señales enviadas por O' , tres de ellas son recibidas por O durante los primeros nueve años (una cada tres años) y las tres restantes las recibe O durante el último año.

- 6.13.** Un hombre que viaja en la parte posterior de un cohete dispara un proyectil de alta velocidad hacia un blanco situado en la parte delantera del cohete. El cohete mide 60 m de largo y la velocidad del proyectil es de $0.8c$ ambas medidas hechas por el hombre. Hallar el tiempo de vuelo del proyectil medido por el hombre.

Tenemos:

$$\Delta t = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} = \frac{60 \text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.50 \times 10^{-7} \text{ s}$$

- 6.14.** Si el cohete del problema 6.13 viaja con velocidad de $0.6c$ con respecto a la Tierra, hallar el tiempo de vuelo del proyectil medido por un observador en tierra.

A partir de las transformaciones de Lorentz:

$$t'_B - t'_A = \frac{(t_B - t_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{2.5 \times 10^{-7} \text{ s} + \frac{(0.6)(60 \text{ m})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}}{\sqrt{1 - (0.6)^2}} = 4.63 \times 10^{-7} \text{ s}$$

- 6.15.** Las longitudes en reposo de dos naves espaciales A y B son 90 m y 200 m, respectivamente. Cuando las naves viajan en sentidos opuestos, el piloto de la nave A encuentra que la proa de la nave B tarda 5×10^{-7} s en recorrer la longitud de A . ¿Cuál es la velocidad relativa de las dos naves?

Para el piloto A ,

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{90 \text{ m}}{5 \times 10^{-7} \text{ s}} = 1.8 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.6c$$

- 6.16.** En el problema 6.15, ¿cuál es el intervalo de tiempo medido por el piloto que viaja en la proa de la nave B , comprendido entre el paso de los extremos de la nave A ?

Las velocidades relativas son las mismas para cada observador. El piloto de B encuentra que la nave A se ha contraído de acuerdo con

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (90 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.6)^2} = 72 \text{ m}$$

El intervalo de tiempo medido por B es entonces,

$$\Delta t_B = \frac{L}{v} = \frac{72 \text{ m}}{0.6 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 4 \times 10^{-7} \text{ s}$$

- 6.17.** Una nave espacial de 90 m de longitud, viaja a velocidad constante de $0.8c$ con respecto a la tierra. Tan pronto como la proa de la nave pasa frente a un observador en tierra, el piloto que va en la proa, envía una señal luminosa hacia la cola de la nave. ¿En qué tiempo llega la señal luminosa a la cola de la nave, medido (a) por el piloto; (b) por el observador en tierra?

(a) Llamemos A al envío de la señal luminosa y B la llegada de ésta a la cola de la nave. Puesto que la señal viaja a velocidad c en sentido negativo,

$$t'_B - t'_A = \frac{x'_B - x'_A}{-c} = \frac{-90 \text{ m}}{-3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3 \times 10^{-7} \text{ s}$$

(b) Por sustracción de las transformaciones inversas de Lorentz para el tiempo, se tiene

$$t_B - t_A = \frac{(t'_B - t'_A) + \frac{v}{c^2}(x'_B - x'_A)}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{3 \times 10^{-7} \text{ s} + (0.8) \frac{(-90 \text{ m})}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$$

6.18. ¿Cuánto tarda en pasar la cola de la nave del problema 6.17, (a) para el observador en tierra; (b) para el piloto?

(a) Para el observador en tierra, la longitud L de la nave es

$$L = L_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = (90 \text{ m}) \sqrt{1 - (0.8)^2} = 54 \text{ m}$$

Entonces

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{54 \text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 2.25 \times 10^{-7} \text{ s}$$

$$(b) \quad \Delta t' = \frac{L'}{v} = \frac{90 \text{ m}}{0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 3.75 \times 10^{-7} \text{ s}$$

6.19. La velocidad de una nave respecto a una estación espacial es de $2.4 \times 10^8 \text{ m/s}$, los observadores O' y O que están en las naves y en la estación respectivamente, sincronizan sus relojes de la manera acostumbrada (esto es, $t = t' = 0$ en $x = x' = 0$). Supongamos que O mira el reloj de O' a través de un telescopio. ¿Qué lee O en el reloj de O' cuando en el de O han transcurrido 30 s?

Sea A el acontecimiento que representa la emisión de la señal luminosa desde O' y B el acontecimiento que representa la recepción de dicha señal por O . Nuestro problema consiste en hallar t'_A . Aplicando las transformaciones inversas de Lorentz al acontecimiento A , obtenemos

$$t_A = \frac{t'_A + (v/c^2)x'_A}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{t'_A + (v/c^2)(0)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{t'_A}{0.6}$$

$$x_A = \frac{x'_A + vt'_A}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{0 + (0.8 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s})t'_A}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = (4.0 \times 10^8 \text{ m/s})t'_A$$

La señal luminosa viaja en sentido negativo a velocidad c , por lo tanto

$$x_B - x_A = -c(t_B - t_A)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior

$$0 - (4.0 \times 10^8 \text{ m/s})t'_A = \left(-3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(30 \text{ s} - \frac{t'_A}{0.6}\right)$$

Resolviendo, $t'_A = 10 \text{ s}$.

Este resultado y el del problema 6.20, están enfocados hacia la distinción entre *ver* un acontecimiento y medir las coordenadas del mismo.

6.20. Si en el problema 6.19, O' mira el reloj de O a través de un telescopio, ¿qué lee O' en su reloj, cuando en el de O han transcurrido 30 s?

Sea A el acontecimiento que representa la emisión de la señal luminosa desde O y B el acontecimiento que representa la recepción de la misma señal luminosa por O' . Nuestro problema consiste en calcular t'_B . Aplicando las transformaciones de Lorentz al acontecimiento A , tenemos,

$$x'_A = \frac{x_A - vt_A}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{0 - (3 \times 10^8 \text{ m/s})(30 \text{ s})}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = -150 \times 10^8 \text{ m}$$

$$t'_A = \frac{t_A - (v/c^2)x_A}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{30 \text{ s} - (v/c^2)(0)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = 50 \text{ s}$$

Para O' , la señal luminosa viaja en sentido positivo y con velocidad c , por lo tanto

$$x'_B - x'_A = c(t'_B - t'_A)$$

Reemplazando en la ecuación anterior,

$$0 - (-150 \times 10^8 \text{ m}) = (3 \times 10^8 \text{ m/s})(t'_B - 50 \text{ s})$$

Resolviendo, $t'_B = 100 \text{ s}$.

6.21. La ecuación de un pulso esférico de luz que parte del origen en $t = t' = 0$ es

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

Demostrar, a partir de las transformaciones de Lorentz, que para O' este pulso también es esférico, en concordancia con el segundo postulado de Einstein, que establece que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores.

De las transformaciones inversas de Lorentz

$$\begin{aligned} x^2 &= \left[\frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} (x'^2 + v^2 t'^2 + 2vx't') \\ t^2 &= \left[\frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \left(\frac{v^2}{c^4} x'^2 + t'^2 + \frac{2v}{c^2} x't' \right) \\ y^2 &= y'^2 \quad z^2 = z'^2 \end{aligned}$$

Reemplazando, se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2$$

Puesto que, $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$, tenemos

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

Por lo tanto, el pulso determinado por O' es también esférico.

6.22. Demuestre que la expresión diferencial

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$$

es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

Si la expresión es invariante, conservará la misma forma al ser llevada al sistema primado de coordenadas. De las transformaciones inversas de Lorentz se obtiene

$$\begin{aligned} dx^2 &= \left[\frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} (dx'^2 + v^2 dt'^2 + 2v dx' dt') \\ dt^2 &= \left[\frac{dt' + (v/c^2)dx'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right]^2 = \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \left(\frac{v^2}{c^4} dx'^2 + dt'^2 + \frac{2v}{c^2} dx' dt' \right) \\ dy^2 &= dy'^2 \quad dz^2 = dz'^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones se obtiene

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2 dt'^2$$

6.23. Demostrar que la ecuación de onda electromagnética

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.

La ecuación será invariante, si conserva la misma forma al expresarla en términos de las nuevas variables x', y', z', t' . Para expresar la ecuación de onda en términos de las variables primadas, calculamos las siguientes derivadas a partir de las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} & \frac{\partial x'}{\partial t} &= -\frac{v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ \frac{\partial t'}{\partial x} &= -\frac{v/c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} & \frac{\partial t'}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \\ \frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{\partial z'}{\partial z} = 1 & \frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial x} = \dots = 0 \end{aligned}$$

Con estos resultados, y utilizando la regla de derivación en cadena, tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{-v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial t'}$$

Derivando de nuevo con respecto a x , se obtiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{v^2}{c^4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{c^2 - v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'}$$

Análogamente se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \frac{-v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \frac{1}{1 - (v^2/c^2)} \left(v^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2} \right) - \frac{2v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial t'} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} \end{aligned}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación de onda se llega a

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t'^2}$$

con lo cual se ve que esta ecuación es invariante bajo las transformaciones de Lorentz. Recordemos que la ecuación no es invariante bajo las transformaciones de Galileo (problema 1.10).

Problemas suplementarios

- 6.24.** Una partícula inestable formada por un acelerador de alta energía, tiene un período de vida media de $4 \mu\text{s}$. La partícula es disparada con velocidad de $0.6c$ a través del laboratorio. (a) ¿Cuál es el período de vida media de la partícula medido por un observador en el laboratorio? (b) ¿Cuál es la distancia promedio recorrida por la partícula en el laboratorio antes de su desintegración? (c) ¿Qué distancia recorrería un observador que se encuentre en reposo respecto a la partícula, antes de que ésta se desintegre?

Resp. (a) $5 \mu\text{s}$; (b) 900 m ; (c) 720 m

- 6.25. Un mesón con un tiempo de vida de 8×10^{-6} s, se forma a 10 000 m de altura en la atmósfera superior y viaja en dirección a la Tierra. Si el mesón μ se desintegra en el momento en que llega a la superficie de la Tierra, ¿cuál es su velocidad respecto a la Tierra? *Resp.* $0.972c$
- 6.26. Una regla de 1 m se mueve a lo largo del eje de x con velocidad de $0.6c$. El punto medio de la regla pasa frente a O en $t = 0$. ¿Cuáles son los extremos de la regla en $t = 0$, medidos por O ? *Resp.* 40 cm y -40 cm
- 6.27. Para un observador O , el área de un círculo en el plano xy es de 12 cm^2 . ¿Cuál será el área del círculo para el observador O' que se mueve respecto a O con velocidad de $0.8c$? *Resp.* 7.2 cm^2
- 6.28. Para un observador O aparecen sobre el eje de x dos destellos de luz: uno rojo y 10^{-6} s después otro azul, a una distancia de 600 m el uno del otro. ¿Cuáles deben ser la magnitud y dirección de la velocidad de un segundo observador, O' , si le parece que los destellos rojo y azul ocurrieron simultáneamente? *Resp.* $+0.5c$
- 6.29. ¿Cuál es la distancia entre los destellos rojo y azul del problema 6.28, medida por O' ? *Resp.* 519.6 m
- 6.30. Una nave espacial de 150 m de longitud viaja a velocidad de $0.6c$. Cuando la cola de la nave pasa frente a un hombre que se encuentra en una plataforma espacial estacionaria, éste envía una señal luminosa en la dirección de la proa de la nave. (a) ¿A qué distancia de la plataforma se encuentra la nave cuando la señal luminosa llega a su proa? (b) Para un observador en la plataforma, ¿qué tiempo transcurre entre la emisión y la llegada de la señal? (c) ¿Cuál es el intervalo de tiempo entre la emisión y la llegada de la señal, para un observador que viaja en la proa de la nave? *Resp.* (a) 300 m; (b) 10^{-6} s; (c) 0.5×10^{-6} s
- 6.31. Para un observador, dos acontecimientos se realizan en el mismo lugar y con un intervalo de tiempo de 4 s entre uno y otro. Si para un segundo observador el intervalo de tiempo es de 5 s, ¿cuál será la respuesta acerca de la separación espacial entre los dos acontecimientos? *Resp.* 9×10^8 m
- 6.32. Un observador dispara dos señales luminosas sobre su eje de x ; la primera desde el origen a la 1:00 en punto, y la segunda en $x = 9 \times 10^8$ m 20 s más tarde. ¿Cuáles son las separaciones temporal y espacial entre las dos señales, para un segundo observador que se mueve a lo largo del eje común $x-x'$, con velocidad $-0.6c$ respecto al primero? *Resp.* 27.3 s; 56.3×10^8 m
- 6.33. La velocidad relativa de O y O' es de $0.8c$. Un proyectil es disparado desde $x' = 100$ m y en $t' = 2 \times 10^{-7}$ s. El proyectil viaja con velocidad constante en sentido negativo del eje x' y golpea un blanco que se encuentra en el origen de O' en $t' = 6 \times 10^{-7}$ s. Para el observador O , ¿qué velocidad lleva el proyectil y qué distancia recorre? *Resp.* -3×10^7 m/s; -6.67 m
- 6.34. Para un observador en tierra, un cohete gasta 5×10^{-7} s en recorrer la distancia comprendida entre dos marcas en tierra separadas 90 m. ¿Cuál es la velocidad del cohete medida por el observador en tierra? *Resp.* $0.6c$
- 6.35. Para un observador en el cohete del problema 6.34, ¿cuál es la distancia entre las dos marcas y cuál el intervalo de tiempo para cruzarlas? *Resp.* 72 m; 4×10^{-7} s
- 6.36. Un rayo láser rota a razón de 150 r.p.m. e incide sobre una pantalla que se encuentra a 50 000 millas. ¿Cuál es la velocidad de barrido del rayo a través de la pantalla? *Resp.* 7.85×10^5 mi/s (nota. $c = 1.86 \times 10^5$ mi/s)
- 6.37. Demostrar que las expresiones $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ y $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ no son invariantes bajo las transformaciones de Galileo.

Capítulo 7

Transformaciones relativistas de la velocidad

Para hallar las transformaciones de la velocidad, consideremos una distribución idéntica a la utilizada en las transformaciones de coordenadas según Lorentz (figura 1-1). Un observador O' se mueve a lo largo del eje común $x-x'$ a velocidad constante v respecto a un segundo observador O . Las componentes de la velocidad de una partícula, medidas por O son (u_x, u_y, u_z) y por O' son (u'_x, u'_y, u'_z) . A partir de las transformaciones de las coordenadas, según Lorentz, encontramos las siguientes *transformaciones de la velocidad según Lorentz* (ver problema 7.1):

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} \quad (7.1)$$

Como se estableció anteriormente, la velocidad v es positiva si O' se mueve en el sentido positivo del eje x y es negativa si O' se mueve en sentido contrario. Las transformaciones inversas son:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2)u'_x} \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 + (v/c^2)u'_x} \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 + (v/c^2)u'_x} \quad (7.2)$$

Obsérvese que, al igual que en las transformaciones de las coordenadas, según Lorentz, las transformaciones inversas de la velocidad se pueden obtener a partir de las transformaciones de velocidad (7.1), tan sólo con intercambiar las variables primadas con las no primadas y tomar $v \rightarrow -v$. Esto era de esperarse, debido a la simetría, puesto que según el postulado 1 de la sección 2.4, ambos observadores son completamente equivalentes y el observador O se mueve con velocidad $-v$ respecto de O' .

7.1 LAS TRANSFORMACIONES DE LA VELOCIDAD SEGUN LORENTZ Y LA VELOCIDAD DE LA LUZ

Consideremos ahora el experimento discutido en la sección 3.1, donde una señal luminosa es enviada en la dirección del eje $x-x'$, desde el origen común, cuando O y O' se encuentran en el instante $t = t' = 0$. Si O encuentra que las componentes de la velocidad de la señal son $u_x = c$, $u_y = u_z = 0$, entonces, aplicando la ecuación (7.1), O' medirá

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{c - v}{1 - (v/c^2)c} = c \quad u'_y = u'_z = 0$$

Por lo tanto, para O' la señal luminosa también viaja con velocidad c , en concordancia con el segundo postulado de Einstein.

7.2 CONSIDERACIONES GENERALES PARA LA SOLUCION DE PROBLEMAS SOBRE VELOCIDAD

En la solución de problemas de velocidad hay tres objetos involucrados: dos observadores O y O' y una partícula P . A la partícula P se encuentran asociadas dos velocidades (y de aquí surgen seis números): su

velocidad respecto a O , (u_x, u_y, u_z) , y su velocidad respecto a O' , (u'_x, u'_y, u'_z) . La cantidad v , que aparece en las transformaciones de velocidad, es la velocidad de O' con respecto a O .

Cuando se trata de plantear un problema de velocidad, lo primero que debe hacerse es determinar qué objetos del problema deben ser identificados como O , O' y P . Algunas veces, esta identificación viene explícita, otras veces puede hacerse arbitrariamente (ver por ejemplo el problema 7.3). Una vez hecha la identificación, se utiliza la adecuada transformación de Lorentz para la velocidad y obtener así la respuesta.

Cuando se trata de problemas de velocidad, el mejor modo de evitar errores consiste en no olvidar la frase "con respecto a". La frase "velocidad de un objeto" carece de significado (tanto clásica como relativistamente) puesto que la velocidad se mide siempre con respecto a algo.

Problemas resueltos

7.1. Deducir la transformación de Lorentz para la velocidad en la dirección del eje x .

Tomando diferenciales de las transformaciones de las coordenadas según Lorentz (3.1), se obtiene

$$dx' = \frac{dx - v dt}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad dt' = \frac{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Dividiendo dx' por dt' , llegamos a

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v dt}{dt - \left(\frac{v}{c^2}\right) dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x}$$

7.2. ¿A qué velocidades, las expresiones de Lorentz y Galileo para u'_x difieren en un 2%?

La transformación de Galileo es $u'_{xG} = u_x - v$ y la transformación de Lorentz es

$$u'_{xR} = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{u'_{xG}}{1 - (v/c^2)u_x}$$

Reagrupando,

$$\frac{u'_{xR} - u'_{xG}}{u'_{xR}} = \frac{vu_x}{c^2}$$

Luego, si el producto vu_x es mayor que $0.02 c^2$, el error cometido al utilizar la transformación de Galileo en vez de la de Lorentz, sobrepasará el 2%

7.3. Un cohete A viaja hacia la derecha con velocidad de $0.8c$ y otro cohete B hacia la izquierda con velocidad de $0.6c$ con respecto a la Tierra. ¿Cuál es la velocidad del cohete A medida desde B ?

Asociemos los observadores O , O' y la partícula, con la Tierra, el cohete B y el cohete A , respectivamente. Entonces

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0.8c - (-0.6c)}{1 - \frac{(-0.6c)(0.8c)}{c^2}} = 0.946c$$

El problema también puede resolverse utilizando otras asociaciones. Por ejemplo, a los observadores O , O' y la partícula, asociemos el cohete A , el cohete B y la Tierra, respectivamente. Luego

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} \quad \text{ó} \quad 0.6c = \frac{-0.8c - v}{1 - (v/c^2)(-0.8c)}$$

Resolviendo, $v = -0.946c$, lo que concuerda con la respuesta anterior. (El signo menos aparece debido a que v es la velocidad de O' con respecto a O , que para la asociación elegida aquí, corresponde a la velocidad del cohete B con respecto al cohete A .)

- 7.4. Repetir el problema 7.3 si el cohete A viaja con velocidad de $0.8c$ en sentido positivo del eje de y relativa a la Tierra. (El cohete B continúa viajando en sentido negativo del eje de x .)

Asociemos los observadores O , O' y la partícula, con la Tierra, los cohetes B y A , respectivamente. Entonces

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0 - (-0.6c)}{1 - 0} = 0.6c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0.8c) \sqrt{1 - (0.6)^2}}{1 - 0} = 0.64c$$

la magnitud y dirección de la velocidad buscada se obtienen a partir de estas componentes, así:

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.6c)^2 + (0.64c)^2} = 0.88c$$

y

$$\tan \phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.64c}{0.60c} = 1.07 \quad \text{ó} \quad \phi' = 46.8^\circ$$

- 7.5. Para un observador O , una partícula se mueve con velocidad de $0.8c$, formando un ángulo de 30° con el eje de x . ¿Cuál es la velocidad de la partícula para un observador O' que viaja con velocidad de $-0.6c$ a lo largo del eje común $x-x'$?

Para el observador O , tenemos

$$u_x = (0.8c) \cos 30^\circ = 0.693c \quad u_y = (0.8c) \sin 30^\circ = 0.400c$$

Para el observador O' , utilicemos las transformaciones de Lorentz. Entonces

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0.693c - (-0.6c)}{1 - \frac{(-0.6c)}{c^2}(0.693c)} = 0.913c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0.4c) \sqrt{1 - (0.6)^2}}{1 - \frac{(-0.6c)}{c^2}(0.693c)} = 0.226c$$

La velocidad medida por O' es

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(0.913c)^2 + (0.226c)^2} = 0.941c$$

y el ángulo ϕ' que forma la velocidad con el eje x' es

$$\tan \phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.226c}{0.913c} = 0.248 \quad \text{ó} \quad \phi' = 13.9^\circ$$

- 7.6. Consideremos un núcleo radiactivo que se mueve a velocidad constante de $0.5c$ con respecto al laboratorio. El núcleo se desintegra y emite un electrón en la misma dirección del movimiento con velocidad de $0.9c$ respecto al núcleo. Hallar la velocidad del electrón en el sistema de referencia del laboratorio.

Asociemos al observador en el laboratorio, el núcleo radiactivo y el electrón, con O , O' y la partícula, respectivamente. Entonces

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2)u'_x} = \frac{0.9c + 0.5c}{1 + \frac{(0.5c)(0.9c)}{c^2}} = 0.966c$$

- 7.7. Si al desintegrarse el núcleo del problema 7.6, emite un electrón con velocidad de $0.9c$ en dirección perpendicular a la del movimiento, medida por un observador en reposo respecto al núcleo, ¿cuál es la velocidad del electrón medida por un observador en el sistema de referencia del laboratorio?

Con la misma asociación utilizada en el problema 7.6, se tiene

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (v/c^2)u'_x} = \frac{0 + 0.5c}{1 + 0} = 0.5c$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 + (v/c^2)u'_x} = \frac{(0.9c) \sqrt{1 - (0.5)^2}}{1 + 0} = 0.779c$$

luego

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(0.5c)^2 + (0.779c)^2} = 0.926c$$

y

$$\tan \phi = \frac{u_y}{u_x} = \frac{0.779c}{0.5c} = 1.56 \quad \text{ó} \quad \phi = 57.3^\circ$$

- 7.8. En $t = 0$ un observador O emite un fotón en dirección que forma un ángulo de 60° con el eje de x . Un segundo observador O' viaja a velocidad de $0.6c$ a lo largo del eje común $x-x'$. ¿Qué ángulo forma la dirección del fotón con el eje x' para el observador O' ?

Tenemos:

$$u_x = c \cos 60^\circ = 0.500c \quad u_y = c \sin 60^\circ = 0.866c$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0.5c - 0.6c}{1 - \frac{(0.6c)(0.5c)}{c^2}} = -0.143c$$

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{(0.866c) \sqrt{1 - (0.6)^2}}{1 - \frac{(0.6c)(0.5c)}{c^2}} = 0.990c$$

Así

$$\tan \phi' = \frac{u'_y}{u'_x} = \frac{0.990c}{-0.143c} = -6.92$$

y por lo tanto, $\phi' = 81.8^\circ$ por encima del eje de x en sentido negativo. La magnitud de la velocidad medida por O' es

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{(-0.143c)^2 + (0.990c)^2} = c$$

como era de esperarse.

- 7.9.** La velocidad de la luz en agua tranquila es c/n , donde n , el índice de refracción del agua, tiene un valor aproximado de $4/3$. En 1851, Fizeau encontró que la velocidad de la luz (con respecto al laboratorio), podía expresarse como

$$u = \frac{c}{n} + kV$$

donde el “coeficiente de arrastre” k medido por él fue de 0.44 aproximadamente. Calcular el valor de k predicho por las transformaciones de Lorentz para la velocidad.

Un observador en reposo con respecto al agua, medirá para la velocidad de la luz el valor de $u'_x = c/n$. Considerando la luz como una partícula, el observador en el laboratorio encontrará que la velocidad es

$$u_x = \frac{u'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} u'_x} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{c^2} \frac{c}{n}} = \left(\frac{c}{n} + V \right) \left(1 + \frac{V}{nc} \right)^{-1}$$

Para valores pequeños de V , la aproximación

$$\left(1 + \frac{V}{nc} \right)^{-1} \approx 1 - \frac{V}{nc}$$

da

$$u_x \approx \left(\frac{c}{n} + V \right) \left(1 - \frac{V}{nc} \right) \approx \frac{c}{n} + \left[1 - \frac{1}{n^2} \right] V$$

donde los términos de orden V^2/c han sido despreciados. Así

$$k \approx 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{(4/3)^2} = 0.438$$

que concuerda con el resultado experimental de Fizeau.

Problemas suplementarios

- 7.10.** Un cohete se mueve con velocidad de $c/3$ respecto a un hombre que sostiene una linterna. El piloto del cohete mide la velocidad de la luz que le llega de la linterna. Calcular esta velocidad a partir de las transformaciones de Lorentz para la velocidad. *Resp.* c
- 7.11.** El piloto de un cohete que se mueve a velocidad de $0.8c$ relativa a la Tierra observa un segundo cohete que se aproxima en dirección opuesta con velocidad de $0.7c$. ¿Qué velocidad medirá un observador en tierra para el segundo cohete? *Resp.* $0.227c$
- 7.12.** Un observador en un cohete A encuentra que los cohetes C y B se alejan de él en sentidos opuestos, con velocidades de $0.6c$ y $0.8c$, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad de C medida por B ? *Resp.* $0.946c$ (clásicamente, $1.4c$)
- 7.13.** Un observador O' se mueve a lo largo del eje $x-x'$ con velocidad de $c/2$ respecto a otro observador O . El observador O encuentra que la velocidad de una partícula que se mueve en la dirección positiva del eje de O es de $c/\sqrt{3}$. Calcular la velocidad de la partícula medida por O' . *Resp.* $c/\sqrt{2}$, 135°
- 7.14.** Un hombre que se encuentra en una plataforma espacial, observa dos naves espaciales que se aproximan a él desde direcciones opuestas, con velocidades de $0.9c$ y $0.8c$. ¿Con qué velocidad se aproxima una nave respecto a la otra? *Resp.* $0.988c$

- 7.15.** Deduzca las transformaciones de Lorentz para la velocidad en las direcciones de y y z .
- 7.16.** A partir de las transformaciones de Lorentz para la velocidad, ecuación (7.1), deducir las transformaciones inversas de Lorentz para la velocidad, ecuación (7.2).
- 7.17.** Un mesón K^0 , en reposo, decae en un mesón π^+ y en un mesón π^- , cada uno con velocidad de $0.827c$. Cuando un mesón K^0 decae lleva una velocidad de $0.6c$, ¿cuál es la máxima velocidad que puede tener uno de los mesones π ? *Resp.* $0.954c$

Capítulo 8

Masa, energía y momentum en relatividad

8.1 NECESIDAD DE REDEFINIR EL MOMENTUM CLASICO

Uno de los principales cambios que surgieron de la Teoría especial de la relatividad consiste en la variación de la masa de un cuerpo con la velocidad. Para esta variación, puede darse el siguiente argumento heurístico.

Consideremos un experimento de balística, donde un observador, por ejemplo O' , dispara un proyectil en la dirección del eje y' . El proyectil penetra en un bloque que permanece inmóvil respecto al observador. Es lógico suponer que la cantidad de proyectil que penetra en el bloque pueda determinarse a partir de la componente en y' del momentum del proyectil, dado por $p'_y = m' u'_y$, donde m' es la masa del proyectil medida por O' .

Ahora consideremos el mismo experimento desde el punto de vista del observador O , para quien O' se mueve a lo largo del eje común $x-x'$ con velocidad v . Puesto que el orificio dejado por el proyectil forma ángulo recto con la dirección del movimiento relativo, O y O' estarán de acuerdo en cuanto al valor de la distancia que el proyectil penetra en el bloque y, por lo tanto, esperan que el valor de la componente en y del momentum del proyectil sea el mismo para ambos.

El momentum medido por O es $p_y = m u_y$, donde m es la masa medida por O . De las transformaciones de Lorentz para la velocidad y teniendo en cuenta que $u'_x = 0$, se obtiene

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 + (v/c^2) u'_x} = u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

por lo tanto $p_y = m u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Puesto que $p'_y = m' u'_y$, se ve que ambos observadores asignan el mismo valor a la masa, es decir, $m' = m$, luego $p'_y \neq p_y$, contrario a lo que se esperaba.

8.2 LA VARIACION DE LA MASA CON LA VELOCIDAD

En este punto tenemos dos alternativas. O suponemos que los principios sobre momentum —en particular, su conservación— no se cumplen a grandes velocidades; o buscamos la forma de redefinir el momentum de un cuerpo, con el fin de que los principios sobre momentum sean aplicables a la relatividad especial. Esta última alternativa fue seleccionada por Einstein. Demostró que para todos los observadores son válidos los principios sobre momentum, si la masa m de un cuerpo varía de acuerdo con

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

donde m_0 , la *masa en reposo*, es la masa del cuerpo medida cuando éste se encuentra en reposo respecto al observador. Ver problema 8.1.

8.3 LA SEGUNDA LEY DE NEWTON EN RELATIVIDAD

La expresión clásica de la segunda ley de Newton establece que la fuerza neta que obra sobre un cuerpo es igual a la tasa de cambio del momentum del cuerpo. Para introducir los efectos relativistas, debemos

aceptar que la masa varía con su velocidad. Así, la generalización relativista de la segunda ley de Newton es

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \right] = \frac{d}{dt} (m\mathbf{u})$$

8.4 RELACION ENTRE MASA Y ENERGIA: $E = mc^2$

Tanto en mecánica relativista, como en mecánica clásica, la energía cinética K , de un cuerpo, es igual al trabajo hecho por una fuerza externa al aumentar la velocidad del cuerpo de cero hasta algún valor u , es decir,

$$K = \int_{u=0}^{u=u} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

Utilizando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = d(m\mathbf{u})/dt$, encontramos (problema 8.21) que esta expresión se reduce a

$$K = mc^2 - m_0c^2$$

La energía cinética K representa la diferencia entre la *energía total* E , de la partícula en movimiento y la *energía en reposo* E_0 , de la partícula cuando está en reposo, por lo tanto

$$E - E_0 = mc^2 - m_0c^2$$

Si se escoge la energía en reposo de tal manera que $E_0 = m_0c^2$, obtenemos la famosa relación de Einstein

$$E = mc^2$$

que muestra la equivalencia de masa y energía. Así, aunque un cuerpo esté en reposo, posee energía dada por $E_0 = m_0c^2$, es decir, que en principio, un cuerpo masivo puede transformarse por completo en otro, o más familiarmente, se transforma en energía.

8.5 RELACION ENTRE MOMENTUM Y ENERGIA

Puesto que el momentum se conserva, mas no la velocidad, es a menudo útil expresar la energía de un cuerpo en función de su momentum y no de su velocidad. Para tal fin, si la expresión

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

se multiplica a ambos lados por $c^4[1 - (u^2/c^2)]$, se obtiene

$$m^2c^4 - m^2u^2c^2 = m_0^2c^4$$

Utilizando los resultados $E = mc^2$, $E_0 = m_0c^2$, y $|\mathbf{p}| = mu$, obtenemos la siguiente relación entre E y p

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \quad \text{ó} \quad (K + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$$

8.6 UNIDADES PARA LA ENERGIA Y EL MOMENTUM

El *electrón-voltio* (eV) es la energía cinética de un cuerpo cuya carga es igual a la de un electrón, al moverse a través de la diferencia de potencial de un voltio

$$1 \text{ eV} = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV} \quad 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$$

La relación $1602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$ puede considerarse como un factor de conversión entre dos unidades diferentes de energía.

La unidad patrón para el momentum es el $\text{kg} \cdot \text{m/s}$. No obstante, en cálculos relativistas se utilizan frecuentemente para el momentum las unidades de MeV/c . Estas unidades provienen de la expresión que relaciona la energía y el momentum

$$p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$

El factor de conversión es

$$1 \frac{\text{MeV}}{c} = 0.534 \times 10^{-21} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

8.7 CONSIDERACIONES GENERALES EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS SOBRE MASA-ENERGIA

Un error común en la solución de problemas sobre masa-energía consiste en utilizar la expresión equivocada para la energía cinética, así

$$K \neq \frac{1}{2} m_0 u^2 \quad \text{y} \quad K \neq \frac{1}{2} m u^2$$

La expresión correcta para la energía es

$$K = (m - m_0)c^2$$

Del mismo modo, tratándose del momentum, notamos que

$$p \neq m_0 u$$

Problemas resueltos

8.1. Demostrar que la relación de Einstein para masa-velocidad resuelve la dificultad del experimento de balística de la sección 8.1.

Teniendo en cuenta que $u'_x = 0$, para el observador O' , la masa del proyectil será

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x'^2 + u_y'^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_y'^2}{c^2}}}$$

mientras que para O , con $u_x = v$, la masa del proyectil es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2 + u_y^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + u_y^2}{c^2}}}$$

Si aplicamos las transformaciones de Lorentz a la cantidad bajo la última raíz cuadrada, tenemos

$$1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_y^2}{c^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(u_y' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{u_y'^2}{c^2} \right)$$

por lo tanto

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{m'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Luego

$$p_y = mu'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \left(\frac{m'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \right) u'_y \sqrt{1 - (v^2/c^2)} = m' u'_y = p'_y$$

- 8.2. Utilizando los valores para masas en reposo dados en el apéndice, calcular la energía en reposo de un electrón. Expresar la respuesta en julios y en electrón-voltios.

$$\text{Tenemos: } E_0 = m_0 c^2 = (9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.187 \times 10^{-14} \text{ J, y}$$

$$(8.187 \times 10^{-14} \text{ J}) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}} \right) \left(\frac{1 \text{ MeV}}{10^6 \text{ eV}} \right) = 0.511 \text{ MeV}$$

- 8.3. Un cuerpo en reposo se rompe espontáneamente en dos partes que se mueven en sentidos opuestos. Las masas en reposo y las velocidades de las partes son: 3 kg a $0.8c$ y 5.33 kg a $0.6c$. Hallar la masa en reposo del cuerpo original.

Puesto que $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$,

$$m_0 c^2 = \frac{m_{01} c^2}{\sqrt{1 - (v_1^2/c^2)}} + \frac{m_{02} c^2}{\sqrt{1 - (v_2^2/c^2)}} = \frac{(3 \text{ kg}) c^2}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} + \frac{(5.33 \text{ kg}) c^2}{\sqrt{1 - (0.6)^2}}$$

$$m_0 = 11.66 \text{ kg}$$

Obsérvese que la masa en reposo no se conserva (ver también el problema 8.26).

- 8.4. ¿Cuál es la velocidad de un electrón que es acelerado a través de una diferencia de potencial de 10^5 voltios?

Puesto que $K = e \Delta V = 10^5 \text{ eV} = 0.1 \text{ MeV}$, tenemos

$$0.1 \text{ MeV} = K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2$$

Sustituyendo $m_0 c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ (problema 8.2) y resolviendo se obtiene $v = 0.548c$.

- 8.5. Calcular el momentum para un electrón de 1 MeV.

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

$$(1 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV})^2 = (pc)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2$$

$$p = 1.42 \text{ MeV}/c$$

- 8.6. Calcular la energía cinética de un electrón, cuyo momentum es $2 \text{ MeV}/c$.

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

$$(K + 0.511 \text{ MeV})^2 = \left(\frac{2 \text{ MeV}}{c} \times c \right)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2$$

$$K = 1.55 \text{ MeV}$$

- 8.7. Calcular la velocidad de un electrón, cuya energía cinética es de 2 MeV.

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2$$

$$2 \text{ MeV} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - 0.511 \text{ MeV}$$

$$v = 0.98c$$

- 8.8. Calcular la cantidad de movimiento lineal de un electrón, cuya velocidad es de $0.8c$.

$$p = mv = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \left(\frac{v}{c^2} \right) = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} \left(\frac{0.8}{c} \right) = 0.681 \frac{\text{MeV}}{c}$$

- 8.9. La masa en reposo de un mesón μ es de $207 m_{0e}$ y su tiempo de vida promedio en reposo es de 2×10^{-6} s. ¿Cuál es la masa de un mesón μ si su tiempo de vida promedio en el laboratorio es 7×10^{-6} s?

De la expresión para la dilatación del tiempo, se tiene,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \frac{7}{2}$$

por lo tanto

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = (207 m_{0e}) \left(\frac{7}{2} \right) = 725 m_{0e}$$

- 8.10. ¿Cuál es la masa efectiva de un fotón, cuya longitud de onda es 5000 \AA ?

$$m_{\text{ef}} c^2 = E_{\text{fotón}} = h\nu = hc/\lambda$$

(Ver capítulo 10.) Por lo tanto

$$m_{\text{ef}} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(5 \times 10^{-7} \text{ m})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} = 4.42 \times 10^{-36} \text{ kg}$$

- 8.11. Un electrón alcanza una energía de 2 GeV en un ciclotrón. ¿Cuál es la relación entre la masa del electrón y su masa en reposo?

$$\text{De } mc^2 = K + m_0 c^2,$$

$$\frac{m}{m_0} = \frac{mc^2}{m_0 c^2} = \frac{K + m_0 c^2}{m_0 c^2} = \frac{2000 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV}}{0.511 \text{ MeV}} = 3915$$

- 8.12. Al fisionar un núcleo de ^{235}U , se libera una energía de 200 MeV. ¿Qué porcentaje de la energía total disponible representa esta cantidad?

La masa en reposo de un átomo de ^{235}U , en términos de la masa atómica unificada (u), es 235 u. Utilizando el factor de conversión $1 \text{ u} = 931.5 \text{ MeV}$, tenemos:

$$\text{energía total disponible} = \text{energía en reposo de } ^{235}\text{U} = (235 \text{ u}) \frac{931.5 \text{ MeV}}{\text{u}} = 219 \times 10^3 \text{ MeV}$$

$$\% \text{ de la energía total} = \frac{200 \text{ MeV}}{219 \times 10^3 \text{ MeV}} \times 100\% = 0.0913\%$$

- 8.13. Un electrón se acelera desde el reposo hasta obtener una velocidad de $0.5c$. Calcule el cambio de energía.

$$\text{el cambio de energía es} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (0.5)^2}} - 0.511 \text{ MeV} = 0.079 \text{ MeV}$$

- 8.14. ¿A qué fracción de la velocidad de la luz debe moverse una partícula para que su energía cinética sea el doble de su energía en reposo?

$$K = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} - m_0 c^2 = 2m_0 c^2 \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = 3$$

Resolviendo, $v = 0.943c$.

- 8.15. La velocidad de un electrón es de 5×10^7 m/s. ¿Cuánta energía se necesita para duplicar esta velocidad?

$$\text{energía inicial} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.5 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} = 0.518 \text{ MeV}$$

$$\text{energía final} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{(2v)^2}{c^2}}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 \times 10^8 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}\right)^2}} = 0.542 \text{ MeV}$$

$$\text{cambio de energía} = 0.024 \text{ MeV}$$

- 8.16. Un fotón de 1 MeV choca con un electrón estacionario, en la vecindad de un núcleo pesado y es absorbido. (Un electrón libre no puede absorber un fotón.) Si despreciamos la energía de retroceso del núcleo, ¿cuál es la velocidad del electrón después del choque?

De $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$,

$$E_p + m_0 c^2 + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} + m_0 c^2 \quad \text{ó} \quad 1 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Resolviendo, $v = 0.941c$.

- 8.17. En el sistema de referencia del laboratorio, un electrón se mueve con velocidad de $0.6c$. Un observador se mueve con velocidad de $0.8c$ en la misma dirección y sentido del electrón. ¿Cuál es la energía del electrón medida por el observador?

A partir de las transformaciones de Lorentz para la velocidad

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (v/c^2)u_x} = \frac{0.6c - 0.8c}{1 - (0.8)(0.6)} = 0.385c$$

y

$$K' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u'_x/c)^2}} - m_0 c^2 = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (-0.385)^2}} - 0.511 \text{ MeV} = 0.043 \text{ MeV}$$

- 8.18.** Una partícula tiene una energía total de $6 \times 10^3 \text{ MeV}$ y un momentum de $3 \times 10^3 \text{ MeV}/c$. ¿Cuál es su masa en reposo?

A partir de $E^2 = (pc)^2 + E_0^2$,

$$(6 \times 10^3 \text{ MeV})^2 = [(3 \times 10^3 \text{ MeV}/c)c]^2 + E_0^2$$

Resolviendo $E_0 = 5.2 \times 10^3 \text{ MeV}$, y (ver problema 8.12)

$$m_0 = (5.2 \times 10^3 \text{ MeV}) \left(\frac{1 \text{ u}}{931.5 \text{ MeV}} \right) = 5.58 \text{ u}$$

- 8.19.** ¿Cuál es la energía de la partícula del problema 8.18, en un sistema de referencia en el cual su momentum sea de $5 \times 10^3 \text{ MeV}/c$?

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 = [(5 \times 10^3 \text{ MeV}/c)c]^2 + (5.2 \times 10^3 \text{ MeV})^2$$

Resolviendo, $E = 7.2 \times 10^3 \text{ MeV}$

- 8.20.** El mesón K^0 en reposo decae en dos mesones π^0 . Si la energía en reposo del K^0 es de 498 MeV y la del π^0 es de 135 MeV , ¿cuál es la energía cinética de cada π^0 ?

Puesto que en el sistema de referencia del laboratorio los momenta inicial y final deben ser iguales, entonces los π^0 se mueven en sentidos opuestos con igual energía cinética.

$$\begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= E_{\text{final}} \\ 498 \text{ MeV} &= 2(135 \text{ MeV}) + 2K \\ K &= 114 \text{ MeV} \end{aligned}$$

- 8.21.** Para un movimiento unidimensional, demuestre que

$$K = \int_{u=0}^{u=u} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = mc^2 - m_0c^2$$

Para un movimiento unidimensional,

$$\begin{aligned} K &= \int_{u=0}^{u=u} F dx = \int_{u=0}^{u=u} \frac{d}{dt} (mu) dx = \int_{u=0}^{u=u} d(mu) \frac{dx}{dt} \\ &= \int_{u=0}^{u=u} (m du + u dm) u = \int_{u=0}^{u=u} (mu du + u^2 dm) \end{aligned} \quad (1)$$

De la expresión de la variación de la masa con la velocidad, tenemos

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \quad \text{ó} \quad m^2c^2 - m^2u^2 = m_0^2c^2$$

Tomando diferenciales en ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$2mc^2 dm - m^2 2u du - u^2 2m dm = 0$$

simplificando

$$mu du + u^2 dm = c^2 dm \quad (2)$$

El lado izquierdo de la ecuación (2) es exactamente la integral de (1), por lo tanto

$$K = \int_{m=m_0}^{m=m} c^2 dm = c^2(m - m_0)$$

- 8.22. Demostrar a partir de la expansión binomial que $E - E_0$ se reduce a $\frac{1}{2} m_0 u^2$, cuando $u/c \ll 1$.

$$\begin{aligned} E - E_0 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] \\ &= m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) - 1 \right] \approx \frac{1}{2} m_0 u^2 \end{aligned}$$

- 8.23. ¿Cuál es la máxima velocidad que una partícula debe tener para que su energía cinética pueda expresarse como $\frac{1}{2} m_0 v^2$ con un error no mayor del 0.5 %?

A la máxima velocidad,

$$\frac{K - \frac{1}{2} m_0 u^2}{K} = 0.005 \quad \text{ó} \quad K = \frac{\frac{1}{2} m_0 u^2}{0.995}$$

Pero como en el problema 8.22,

$$\begin{aligned} K &= m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] = m_0 c^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{u^4}{c^4} + \dots \right) - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 u^2 \left(\frac{u^2}{c^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\frac{1}{2} m_0 u^2}{0.995} \approx \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 u^2 \left(\frac{u^2}{c^2} \right)$$

Resolviendo, $v \approx 0.082c$

- 8.24. Supongamos que una fuerza F actúa sobre una partícula en la misma dirección y sentido que su velocidad. Hallar la expresión correspondiente para la segunda ley de Newton.

La fuerza F es la derivada con respecto al tiempo del momentum.

$$\begin{aligned} F &= \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \right] = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \frac{du}{dt} + \frac{m_0 u}{[1 - (u^2/c^2)]^{3/2}} \frac{u}{c^2} \frac{du}{dt} \\ &= \frac{m_0 \frac{du}{dt}}{[1 - (u^2/c^2)]^{3/2}} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} + \frac{u^2}{c^2} \right) = \frac{m_0 \frac{du}{dt}}{[1 - (u^2/c^2)]^{3/2}} \end{aligned}$$

- 8.25. Utilizando la segunda ley de Newton, hallar la expresión para la velocidad relativista de una partícula de carga q que se mueve en un círculo de radio R y en ángulo recto con el campo magnético B .

En forma vectorial, la segunda ley de Newton es

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{u}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/c^2)}} \right]$$

Efectuando la diferenciación según la regla de la cadena, se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/c^2)}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{m_0}{[1 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}/c^2)]^{3/2}} \frac{\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}}{c^2} \mathbf{u}$$

En un campo magnético la velocidad y la aceleración son perpendiculares, por lo tanto

$$\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = 0$$

Además,

$$F_r = quB \quad \text{y} \quad \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| = \frac{u^2}{R}$$

Así

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \frac{u^2}{R} \quad \text{ó} \quad u = \frac{qBR/m_0}{\sqrt{1 + (qBR/m_0c)^2}}$$

Clásicamente la velocidad se obtiene de la expresión anterior, dejando tender c a ∞ .

- 8.26.** Dos cuerpos idénticos, cada uno de ellos con masa en reposo m_0 se aproximan el uno al otro con velocidades iguales u . Los cuerpos realizan un choque perfectamente inelástico y quedan unidos después de él. Calcular la masa en reposo del cuerpo compuesto.

Puesto que las velocidades iniciales deben ser iguales en magnitud y el momentum final es cero,

$$\begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= E_{\text{final}} \\ \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} &= M_0c^2 \\ M_0 &= \frac{2m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} > 2m_0 \end{aligned}$$

- 8.27.** ¿Cuál es la masa en reposo del cuerpo compuesto del problema 8.26, determinada por un observador que se encuentra en reposo respecto a uno de los cuerpos iniciales?

Supongamos que el cuerpo A se mueva en la dirección $+x$. La velocidad v de un observador O' en reposo respecto al cuerpo A es igual a la velocidad de A , $v = u$. El segundo cuerpo B , tiene una velocidad $u_B = -u$ medida por O . Su velocidad u'_B , medida por O' se obtiene a partir de la transformación de Lorentz para la velocidad:

$$u'_B = \frac{u_B - v}{1 - \frac{u_B v}{c^2}} = - \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

Puesto que el cuerpo compuesto C está en reposo respecto al laboratorio (observador O), su velocidad respecto a O' es $u'_C = -u$. El principio de conservación del momentum aplicado por O' da,

$$\frac{m_0 u'_A}{\sqrt{1 - (u_A'^2/c^2)}} + \frac{m_0 u'_B}{\sqrt{1 - (u_B'^2/c^2)}} = \frac{M_0 u'_C}{\sqrt{1 - (u_C'^2/c^2)}}$$

Pero $u'_A = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \frac{-2u}{1 + (u^2/c^2)}}{\sqrt{1 - \left[\frac{2u/c}{1 + (u^2/c^2)} \right]^2}} &= \frac{M_0(-u)}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \\ M_0 &= \frac{2m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \end{aligned}$$

en concordancia con el valor encontrado por el observador O (problema 8.26), a partir de consideraciones energéticas.

- 8.28.** Una partícula de masa en reposo m_0 que se mueve con velocidad de $0.8c$ realiza un choque completamente inelástico con una partícula de masa en reposo $3m_0$ inicialmente en reposo. ¿Cuál es la masa en reposo del cuerpo resultante?

$$\text{De } p_{\text{final}} = p_{\text{inicial}},$$

$$\frac{M_0 u_f}{\sqrt{1 - (u_f^2/c^2)}} = \frac{m_0 u_i}{\sqrt{1 - (u_i^2/c^2)}} = \frac{m_0(0.8c)}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} = \frac{4}{3} m_0 c$$

$$\text{De } E_{\text{final}} = E_{\text{inicial}},$$

$$\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1 - (u_f^2/c^2)}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (u_i^2/c^2)}} + 3m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - (0.8)^2}} + 3m_0 c^2 = 4.67 m_0 c^2$$

Resolviendo estas dos ecuaciones simultáneamente, se obtiene

$$u_f = 0.286c \quad M_0 = 4.47m_0$$

- 8.29.** Hallar el aumento de masa de 100 Kg de cobre si su temperatura se eleva en 100°C . (Calor específico del cobre es $C = 93 \text{ cal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$.)

La energía agregada al bloque de cobre es

$$\Delta E = mC(\Delta T) = (100 \text{ kg})(93 \text{ cal/kg} \cdot ^\circ\text{C})(100^\circ\text{C})(4.184 \text{ J/cal}) = 39 \times 10^5 \text{ J}$$

Si esta energía aparece como aumento de masa, entonces

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{39 \times 10^5 \text{ J}}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 4.33 \times 10^{-11} \text{ kg}$$

Este aumento es demasiado pequeño como para ser medido.

Problemas suplementarios

- 8.30.** A partir de las masas en reposo dadas en el apéndice, calcular la masa en reposo de una unidad atómica de masa, expresada en julios. *Resp.* $1.49 \times 10^{-10} \text{ J}$
- 8.31.** Calcular la energía cinética de un protón, cuya velocidad es $0.8c$. *Resp.* 625.5 MeV
- 8.32.** ¿Cuál es el momentum de un protón, cuya energía cinética es de 200 MeV ? *Resp.* $644.5 \text{ MeV}/c$
- 8.33.** Calcular la energía cinética de un neutrón, cuyo momentum es de $200 \text{ MeV}/c$. *Resp.* 21.0 MeV
- 8.34.** Si la energía cinética de un protón es de 200 MeV , ¿cuál es su velocidad? *Resp.* $0.566c$
- 8.35.** ¿Cuál es la masa de un protón, cuya energía cinética es de 1 GeV ? *Resp.* $m = 2.07m_{0p}$
- 8.36.** ¿Qué velocidad debe tener una partícula que se mueve de tal manera que su energía cinética sea igual a su energía en reposo? *Resp.* $0.866c$

- 8.37. Si la masa relativista de una partícula es 5% mayor que su masa en reposo, ¿cuál es su velocidad?
Resp. $0.305c$
- 8.38. ¿Cuál es la relación entre la masa relativista a la masa de reposo, para (a) un electrón, (b) un protón, al ser acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 15 megavoltios?
Resp. (a) 30.35; (b) 1.015
- 8.39. ¿Cuál es la masa de un electrón que se mueve a través de una diferencia de potencial tal que, de acuerdo con la física clásica, es capaz de acelerarlo hasta la velocidad de la luz? *Resp.* $\frac{3}{2}m_0$
- 8.40. ¿Cuál es la velocidad y el momentum de cada π^0 del problema 8.20? *Resp.* $0.84c$; $209 \text{ MeV}/c$
- 8.41. Supongamos que un haz de electrones describe un círculo de 0.2 m de radio en un campo magnético uniforme de densidad de flujo 0.03 T. ¿Cuál es la velocidad y la energía cinética de los electrones?
Resp. $0.962c$; 1.36 MeV
- 8.42. ¿Cuál es la energía mínima necesaria para acelerar una nave espacial hasta una velocidad de $0.8c$, si la masa en reposo de su carga final es de 5000 kg? *Resp.* $3 \times 10^{20} \text{ J}$
- 8.43. Un electrón de 0.8 MeV se mueve dentro de un campo magnético en una trayectoria circular de 5 cm de radio. ¿Cuál es la inducción magnética? *Resp.* $8.07 \times 10^{-2} \text{ T}$
- 8.44. Un electrón de 20 MeV se mueve en una trayectoria circular que forma un ángulo recto con un campo magnético uniforme de densidad de flujo 5 T. ¿Cuál es el radio de la trayectoria? *Resp.* 1.37 cm
- 8.45. Una partícula de masa en reposo m_0 que se mueve con velocidad de $0.6c$, choca y se adhiere a otra partícula idéntica inicialmente en reposo. ¿Cuál es la masa en reposo y la velocidad de la partícula compuesta?
Resp. $2.12m_0$; $0.333c$
- 8.46. Una partícula con una masa en reposo m_0 y energía cinética de $3m_0c^2$, realiza un choque completamente inelástico con una partícula estacionaria de masa en reposo $2m_0$. ¿Cuál es la velocidad y la masa en reposo de la partícula compuesta? *Resp.* $0.645c$; $4.58m_0$
- 8.47. Un mesón π^+ , cuya energía en reposo es de 140 MeV se crea a 100 km sobre el nivel del mar en la atmósfera de la Tierra. El mesón π^+ tiene una energía total de $1.5 \times 10^5 \text{ MeV}$ y se mueve verticalmente hacia abajo. Si se desintegra $2 \times 10^{-8} \text{ s}$ después de su creación, medido en su propio sistema de referencia, ¿a qué altura sobre el nivel del mar tiene lugar la desintegración? *Resp.* 93.6 km

Capítulo 9

El efecto Doppler relativista

Consideremos una fuente que emite una radiación electromagnética de frecuencia ν_0 medida por un observador en reposo respecto a la fuente. Supongamos que esta misma fuente está en movimiento respecto a un observador para quien la frecuencia de la radiación recibida de la fuente es ν . Con el ángulo θ y la velocidad v de la fuente, indicadas en la figura 9-1, la frecuencia ν medida por el observador O , se obtiene a partir de la *ecuación de Doppler*

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c) \cos \theta}$$

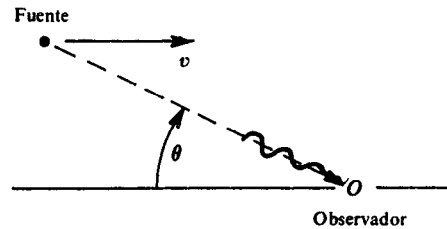


Fig. 9-1

Si la fuente y el observador se mueven el uno hacia el otro, $\theta = 0$ y por lo tanto

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

En este caso, $\nu > \nu_0$.

Si la fuente y el observador se están *alejando* el uno del otro, $\theta = 180^\circ$, entonces

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

En este caso, $\nu < \nu_0$.

Si la radiación es *perpendicular* a la dirección del movimiento, $\theta = 90^\circ$, luego

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$$

Así, $\nu < \nu_0$.

Puesto que para todos los observadores la velocidad de la luz es c , las ecuaciones anteriores también permiten el cambio en la longitud de onda lograda a partir de $\lambda = c/\nu$.

Problemas resueltos

- 9.1. Calcular la aproximación de primer orden en v/c para la ecuación de Doppler, cuando la fuente y el observador se alejan el uno del otro.

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \times \frac{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v}{c}}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} \approx \nu_0 \frac{c}{c + v}$$

que es la expresión clásica para el efecto Doppler, cuando el receptor se encuentra estacionario con respecto al medio.

- 9.2. Un automóvil se aproxima a un radar detector de velocidad a 80 mi/h. Si el radar opera a una frecuencia de 20×10^9 Hz, ¿qué cambio en la frecuencia observa el agente en el instrumento de radar?

Dentro de una aproximación de primer orden en v/c , la frecuencia recibida por el auto es

$$\nu' = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \approx \nu_0 \sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

El automóvil se comporta entonces como una fuente en movimiento con esta frecuencia. La frecuencia recibida por el aparato de radar es

$$\nu'' \approx \nu' \left(1 + \frac{v}{c}\right) \approx \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 \approx \nu_0 \left(1 + \frac{2v}{c}\right)$$

Reemplazando los valores de ν y ν_0 ($80 \text{ mi/h} = 35 \text{ m/s}$)

$$\nu'' - \nu_0 \approx 2 \frac{v}{c} \nu_0 = \frac{2 \times 35 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} \times 20 \times 10^9 \text{ Hz} = 4.67 \times 10^3 \text{ Hz}$$

- 9.3. Una estrella se aleja de la tierra a una velocidad de $5 \times 10^{-3}c$. ¿Cuál es el corrimiento en la longitud de onda para la línea D_2 del sodio (5890 Å)?

La ecuación de Doppler da

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} \quad \text{ó} \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}} = (5890 \text{ Å}) \sqrt{\frac{1 + 0.005}{1 - 0.005}} = 5920 \text{ Å}$$

Por lo tanto, $\Delta\lambda = 5920 \text{ Å} - 5890 \text{ Å} = 30 \text{ Å}$. El corrimiento consiste en un aumento en la longitud de onda (*hacia el rojo*).

- 9.4. Supongamos que el corrimiento de Doppler en la línea D_2 del sodio (5890 Å) es de 100 Å cuando se observa la luz de una estrella lejana. Calcular la velocidad con que la estrella se aleja de la Tierra.

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}} \quad \text{ó} \quad 5990 \text{ Å} = (5890 \text{ Å}) \sqrt{\frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)}}$$

Resolviendo, $v = 0.017c$

- 9.5. El piloto de una nave espacial que se aleja de una plataforma a velocidad de $0.6c$, envía a ésta una

señal luminosa de 5000 \AA de longitud de onda. ¿Cuál es la frecuencia de la luz vista por un observador en la plataforma?

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}} \sqrt{\frac{1 - 0.6}{1 + 0.6}} = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

- 9.6. ¿Cuál es la frecuencia de la luz, en el problema 9.5, vista por un pasajero de una segunda nave que se mueve en sentido opuesto con velocidad de $0.8c$ respecto a la plataforma espacial?

La velocidad de la primera nave respecto a la segunda se obtiene a partir de la transformación de Lorentz para la velocidad.

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} = \frac{0.6c - (-0.8c)}{1 - \frac{(-0.8c)(0.6c)}{c^2}} = 0.946c$$

La frecuencia observada en la segunda nave está dada por

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - (u'_x/c)}{1 + (u'_x/c)}} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{5 \times 10^{-7} \text{ m}} \sqrt{\frac{1 - 0.946}{1 + 0.946}} = 1.0 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

Problemas suplementarios

- 9.7. ¿Cuál es la variación de Doppler para una fuente de luz de longitud de onda 5500 \AA que se aproxima a un observador con velocidad de $0.8c$? *Resp.* -3667 \AA
- 9.8. Supongamos que la mayor longitud de onda visible es de 6500 \AA . ¿Con qué velocidad debe viajar un cohete para que la luz verde ($\lambda = 5000 \text{ \AA}$) emitida por él, sea invisible para un observador en tierra? *Resp.* $0.257c$ alejándose del observador
- 9.9. ¿Con qué velocidad debe alejarse una estrella de la Tierra, para que la variación en la longitud de onda sea del 0.5% ? *Resp.* $4.99 \times 10^{-3}c$

PARTE 2: La teoría cuántica de la radiación electromagnética

Capítulo 10

La teoría de los fotones

El postulado básico de la interpretación cuántica establece que la radiación electromagnética está formada por paquetes discretos de energía que se comportan como partículas, llamados *fotones* o *cuantos*. Cada fotón tiene una energía E que depende únicamente de la frecuencia ν de la radiación y está dada por

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$$

donde $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ es la *constante de Planck*. Cada fotón interactúa a la manera de todo o nada, puesto que ceden toda su energía o no la ceden.

Debido a que los fotones viajan a la velocidad de la luz, su masa en reposo, de acuerdo con la teoría relativista, debe ser cero; por lo tanto, su energía es totalmente cinética. Si un fotón existe, entonces se mueve a la velocidad de la luz c y deja de existir tan pronto deje de moverse a velocidad c . Para $m_0 = 0$, la relación relativista entre momentum y energía (sección 8.5), se convierte en $E = pc$. Así cada fotón tiene un momentum igual a

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Desde el punto de vista cuántico, un haz de energía electromagnética está formado por fotones que viajan a velocidad c . La intensidad del haz será proporcional al número de fotones que atraviesan la unidad de área en la unidad de tiempo. Luego, si el haz es monocromático (una sola frecuencia), la intensidad I estará dada por

$$I = (\text{energía de un fotón}) \times \frac{\text{número de fotones}}{\text{área} \times \text{tiempo}}$$

Finalmente, para simplificar los cálculos conviene utilizar las expresiones siguientes en unidades no muy comunes.

$$h = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

$$hc = 12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}$$

donde $1 \text{ eV} = 10^{-3} \text{ keV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ y $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$.

Problemas resueltos

10.1. Hallar la longitud de onda y la frecuencia de un fotón de 1.0 keV.

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{1.0 \text{ keV}} = 12.4 \text{ \AA}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{12.4 \times 10^{-10} \text{ m}} = 2.42 \times 10^{17} \text{ Hz}$$

- 10.2. Calcular el momentum de un fotón de 12.0 MeV.

$$p = \frac{E}{c} = 12 \text{ MeV}/c$$

- 10.3. Calcular la frecuencia de un fotón producido cuando un electrón de 20 keV queda en reposo al chocar con un núcleo pesado.

Suponiendo que toda la energía cinética del electrón se utiliza para producir el fotón, se tiene

$$\begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= E_{\text{final}} \\ K + m_0 c^2 &= h\nu + m_0 c^2 \\ 20 \times 10^3 \text{ eV} &= (4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})\nu \\ \nu &= 4.84 \times 10^{18} \text{ Hz} \end{aligned}$$

- 10.4. Demostrar que en el problema 10.3 el momentum no se conserva.

El momentum inicial del electrón se encuentra a partir de

$$(K + E_0)^2 = (p_e c)^2 + E_0^2 \quad \text{ó} \quad (0.02 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV})^2 = (p_e c)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2$$

luego $p_e = 0.144 \text{ MeV}/c$. Pero

$$p_{\text{final}} = p_{\text{fotón}} = \frac{E_{\text{fotón}}}{c} = \frac{0.02 \text{ MeV}}{c}$$

El momentum restante es absorbido por el núcleo que detiene al electrón. Puesto que la masa del núcleo es mucho mayor que la del electrón, la variación de energía del núcleo en el problema 10.3, puede despreciarse.

- 10.5. Hallar la longitud de onda máxima del fotón que puede separar una molécula, cuya energía de enlace es de 15 eV.

De $E = hc/\lambda$,

$$15 \text{ eV} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} \quad \text{ó} \quad \lambda = 827 \text{ \AA}$$

- 10.6. ¿Qué energía debe tener un fotón para que su momentum sea igual al de un electrón de 3 MeV?

El momentum y la energía de un electrón están relacionados por

$$E^2 = (p_e c)^2 + E_0^2 \quad \text{ó} \quad (3 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV})^2 = (p_e c)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2$$

luego $p_e = 3.47 \text{ MeV}/c$. La energía del fotón es

$$E = pc = p_e c = (3.47 \text{ MeV}/c)c = 3.47 \text{ MeV}$$

- 10.7. Sobre una superficie de 4 cm^2 de área incide normalmente luz monocromática de 3000 \AA de longitud de onda. Si la intensidad de la luz es de $15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2$, calcular el número de fotones por segundo que golpean la superficie.

La energía por fotón es

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{3 \times 10^{-7} \text{ m}} = 6.63 \times 10^{-19} \text{ J}$$

El flujo total de energía es

$$IA = (15 \times 10^{-2} \text{ W/m}^2)(4 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 6 \times 10^{-5} \text{ W} = 6 \times 10^{-5} \text{ J/s}$$

Por lo tanto, el número de fotones por segundo que golpea la superficie es

$$\frac{6 \times 10^{-3} \text{ J/s}}{6.63 \times 10^{-19} \text{ J/fotón}} = 9.05 \times 10^{13} \text{ fotones/s}$$

- 10.8.** Una estación de radio funciona con una frecuencia de 103.7 MHz con una potencia de salida de 200 kW. Calcular la tasa de emisión de cuantos de la estación.

La energía de cada cuanto es

$$E = h\nu = (6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(103.7 \times 10^6 \text{ s}^{-1}) = 6.88 \times 10^{-26} \text{ J}$$

así

$$\frac{\text{número de cuantos}}{\text{tiempo}} = 200 \times 10^3 \frac{\text{J}}{\text{s}} \times \frac{1 \text{ cuanto}}{6.88 \times 10^{-26} \text{ J}} = 2.91 \times 10^{30} \frac{\text{cuantos}}{\text{s}}$$

Problemas suplementarios

- 10.9.** Calcular la longitud de onda y la frecuencia de un fotón de 1 MeV.
Resp. $1.24 \times 10^{-2} \text{ Å}$; $2.42 \times 10^{20} \text{ Hz}$
- 10.10.** Hallar la longitud de onda y la frecuencia de un fotón, cuyo momentum es 0.02 MeV/c.
Resp. $6.20 \times 10^{-1} \text{ Å}$; $4.84 \times 10^{18} \text{ Hz}$
- 10.11.** ¿Cuál es el momentum de un fotón de 4 keV? *Resp.* 4 keV/c
- 10.12.** Calcular la energía de un fotón, cuyo momentum es de 10 MeV/c. *Resp.* 10 MeV
- 10.13.** Hallar la energía de un fotón, cuya longitud de onda es de 4000 Å. *Resp.* 3.1 eV
- 10.14.** ¿Cuál es la energía y el momentum de un fotón de frecuencia 10^6 Hz .
Resp. $4.14 \times 10^3 \text{ MeV}$; $4.14 \times 10^3 \text{ MeV/c}$
- 10.15.** Hallar el momentum de un fotón de longitud de onda 10 Å. *Resp.* 1.24 MeV/c
- 10.16.** Después de un choque simple, que lo deja en reposo, un electrón de 1 MeV produce un fotón. Hallar la longitud de onda del fotón. *Resp.* $12.4 \times 10^{-3} \text{ Å}$
- 10.17.** Si la máxima longitud de onda de un fotón necesaria para separar una molécula diatómica es de 3000 Å, ¿cuál es su energía de enlace? *Resp.* 4.13 eV
- 10.18.** ¿Cuál es el momentum de un fotón que tiene la misma energía que una partícula Alfa de 10 MeV?
Resp. 10 MeV/c
- 10.19.** Una estación de radio tiene una potencia de salida de 150 kW a una frecuencia de 101.1 MHz. Hallar el número de fotones que atraviesa una unidad de área por unidad de tiempo, a una milla de distancia de la estación. Suponga que la estación emite uniformemente en todas direcciones. *Resp.* $6.39 \times 10^{21} \text{ fotones/p}^2 \cdot \text{s}$

- 10.20.** Una onda electromagnética plana de 300 MHz incide normalmente sobre una superficie de 50 cm² de área. Si la intensidad de la onda es de $9 \times 10^{-5} \text{ W/m}^2$, calcular el número de fotones por unidad de tiempo que chocan con la superficie. *Resp.* 2.26×10^{18} fotones/s
- 10.21.** Una fuente luminosa de frecuencia 6×10^{14} Hz produce 10 W. ¿Cuántos fotones se producen en 1 segundo? *Resp.* 2.52×10^{19} fotones
- 10.22.** Considerando la estación de radio del problema 10.8 como una fuente puntual que irradia en todas direcciones, hallar el número de fotones que llegan a un receptor cúbico de 20 cm de lado, ubicado a 15 km de la estación de radio. *Resp.* 2.75×10^{10} fotones

Capítulo 11

El efecto fotoeléctrico

11.1 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En un experimento fotoeléctrico, la luz incide sobre una superficie metálica que se encuentra dentro de un tubo al vacío y los electrones son emitidos de esta superficie, como se indica en la figura 11-1. La frecuencia ν , la intensidad I de la luz, el voltaje de retardo V y el material del emisor pueden variar. Si los electrones son lo suficientemente energéticos, pueden sobrepasar el potencial de retardo V y llegar al colector para ser medidos como corriente i en el amperímetro A. Para que los electrones puedan llegar al colector, la energía cinética de éstos debe ser mayor o igual que la energía potencial eléctrica que deben sobrepasar cuando van del emisor al colector, es decir

$$\frac{1}{2} m_e v^2 \geq eV$$

Si su energía es menor que este valor, regresarán antes de llegar al colector y, por lo tanto, no podrán ser medidos como corriente.

Los resultados experimentales son:

- (1) La corriente empieza casi instantáneamente, aun para luz de muy baja intensidad. La demora desde cuando la luz incidente llega a la superficie, hasta cuando los electrones son observados, es de unos 10^{-9} s y es independiente de la intensidad.
- (2) Cuando la frecuencia y el potencial de retardo permanecen fijos, la corriente es directamente proporcional a la intensidad de la luz incidente.
- (3) Cuando la frecuencia y la intensidad de la luz permanecen fijas, la corriente decrece cuando el potencial de retardo aumenta y se aproxima a cero para cierto voltaje de frenado V_s . Este voltaje de frenado es independiente de la intensidad.
- (4) Para un mismo material del emisor, el voltaje de frenado varía linealmente con la frecuencia, de acuerdo con la relación

$$eV_s = h\nu - eW_0$$

El valor del término constante, eW_0 , varía de un material a otro, pero la pendiente h permanece igual para todos los materiales y numéricamente, es igual a la constante de Planck (ver problema 11.2).

- (5) Para cada material existe una *frecuencia umbral*, ν_0 , por debajo de la cual no hay emisión de electrones; esto ocurre por grande que sea la intensidad de la luz.

11.2 TEORIA DEL EFECTO FOTOELECTRICO

El resultado (2) —aumento de corriente con la intensidad— puede explicarse solamente con una descripción ondulatoria de la luz, puesto que a mayor intensidad de la luz, mayor energía transmitida por la

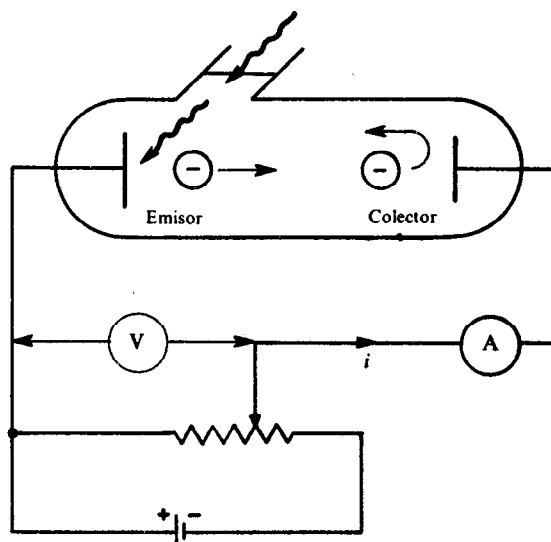


Fig. 11-1

onda; entonces, un mayor número de electrones serán emitidos. Los demás resultados son completamente inexplicables con base en una descripción ondulatoria de la luz (ver problema 11.1).

La interpretación cuántica de la luz puede explicar todos los resultados experimentales. En el modelo cuántico la energía transportada por un fotón es absorbida por un solo electrón. Si el electrón es expelido del material, la diferencia entre la energía absorbida por el electrón y la energía con la cual el electrón estaba ligado a la superficie, aparece como energía cinética del electrón. Los electrones están ligados a la superficie con energías variables, pero la energía de enlace de los electrones menos estrechamente ligados depende del material del emisor. La energía necesaria para extraer estos electrones menos estrechamente ligados, se llama *función de trabajo* ϕ del material. Por lo tanto, los electrones serán expelidos con energías cinéticas que varían desde cero hasta un valor máximo dado por

energía cinética máxima del electrón emitido =

(energía transportada por el fotón) – (energía de enlace del electrón menos estrechamente ligado)

con lo cual se explica el resultado experimental (3). Puesto que $K_{\text{máx}} = eV_s$, la relación para la energía máxima se convierte en

$$eV_s = h\nu - \phi$$

donde $\phi = eW_0$. De aquí se explica la relación lineal del resultado (4), con la existencia de una frecuencia umbral (resultado (5)), dada por

$$h\nu_u = eW_0$$

Por debajo de esta frecuencia umbral, los fotones incidentes no tendrán energía suficiente para liberar aún los electrones menos estrechamente ligados, no importa cuán intensa sea la luz. El brevísimo retardo del resultado experimental (1) también se explica, puesto que la absorción de fotones se realiza casi instantáneamente. Finalmente, mientras más intensa sea la luz, mayor es la densidad de fotones y, por lo tanto, mayor número de electrones serán expelidos, con lo cual se explica el resultado (2).

Problemas resueltos

- 11.1.** Una superficie de potasio se encuentra a 75 cm de distancia de una bombilla de 100 vatios. Supongamos que la energía irradiada por la bombilla es el 5% de la potencia de entrada. Considerando cada átomo de potasio como un disco circular de 1 Å de diámetro, calcular el tiempo requerido por cada átomo para absorber una energía igual a su función de trabajo de 2.0 eV, de acuerdo con la interpretación ondulatoria de la luz.

Considerando la bombilla como una fuente puntual, la intensidad en el lugar donde está la superficie de potasio es

$$\text{intensidad} = \frac{\text{potencia}}{\text{área de la esfera}} = \frac{100 \text{ W} \times 0.05}{4\pi(0.75 \text{ m})^2} = 0.707 \text{ W/m}^2$$

La potencia incidente sobre cada átomo de potasio es

potencia por átomo = intensidad \times (área por átomo)

$$= \left(0.707 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) \frac{\pi(1 \times 10^{-10} \text{ m})^2}{4} = 5.56 \times 10^{-21} \text{ W}$$

El intervalo de tiempo para absorber 2.0 eV de energía se encuentra a partir de

$$\text{potencia} = \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}} \quad \text{ó} \quad \text{tiempo} = \frac{\text{energía}}{\text{potencia}} = \frac{(2.0 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{5.56 \times 10^{-21} \text{ J/s}} = 57.6 \text{ s}$$

En estos capítulos hemos supuesto que toda la energía incidente ha sido absorbida. Debido a que con la descripción ondulatoria parte de la energía incidente es reflejada, el valor del tiempo calculado de 57.6 s es

excesivo. Por lo tanto, una descripción ondulatoria de la radiación electromagnética predice un tiempo de emisión mucho mayor que el observado experimentalmente de unos 10^{-9} s.

- 11.2. Al realizar un experimento fotoeléctrico, se utilizó calcio como emisor y se obtuvieron los siguientes potenciales de frenado:

$\lambda, \text{\AA}$	2536	3132	3650	4047
$\nu, \text{Hz} \times 10^{15}$	1.18	0.958	0.822	0.741
V_s, V	1.95	0.98	0.50	0.14

Hallar la constante de Planck a partir de estos datos.

Los datos se encuentran graficados en la figura 11-2. De la ecuación fotoeléctrica, la pendiente de la recta es h/e , por lo tanto

$$h = e(\text{pendiente}) = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) \frac{1.66 \text{ V}}{0.40 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}} = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

($1 \text{ C} \cdot \text{V} = 1 \text{ J}$).

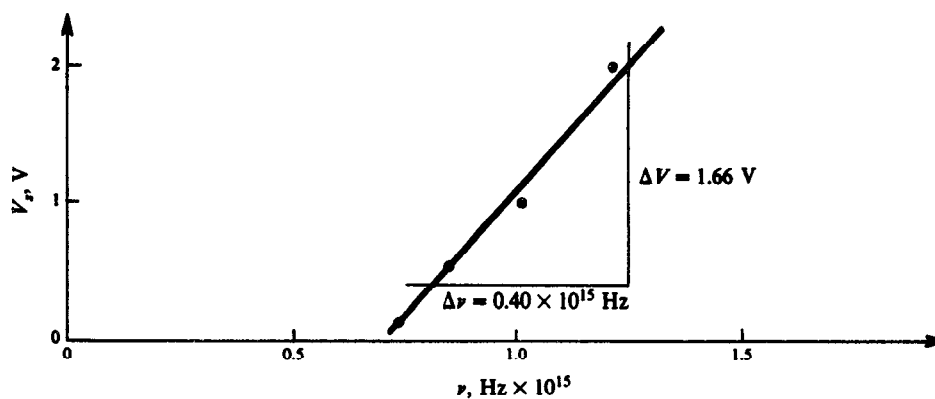


Fig. 11-2

- 11.3. Las energías cinéticas de los fotoelectrones varían entre cero y $4.0 \times 10^{-19} \text{ J}$ cuando la luz que incide sobre la superficie tiene una longitud de onda de 3000 \AA . ¿Cuál es el potencial de frenado para esta luz?

$$K_{\text{máx}} = 4.0 \times 10^{-19} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = 2.5 \text{ eV}$$

Entonces, de $eV_s = K_{\text{máx}}$, $V_s = 2.5 \text{ V}$.

- 11.4. ¿Cuál es la longitud de onda umbral para el material del problema 11.3?

$$eV_s = h\nu - eW_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_u} \quad \text{ó} \quad 2.5 \text{ eV} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{3000 \text{ \AA}} - \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\lambda_u}$$

Resolviendo, $\lambda_u = 7590 \text{ \AA}$

- 11.5. El emisor de un tubo fotoeléctrico tiene una longitud de onda umbral de 6000 \AA . Calcular la longitud de onda de la luz incidente si el potencial de frenado para esta luz es de 2.5 voltios.

La función de trabajo es

$$eW_0 = h\nu_u = \frac{hc}{\lambda_u} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{6000 \text{ \AA}} = 2.07 \text{ eV}$$

La ecuación fotoeléctrica da

$$eV_s = h\nu - eW_0 = \frac{hc}{\lambda} - eW_0 \quad \text{ó} \quad 2.5 \text{ eV} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\lambda} - 2.07 \text{ eV}$$

Resolviendo, $\lambda = 2713 \text{ \AA}$.

- 11.6.** Hallar la función de trabajo para el potasio, si la máxima longitud de onda para lograr emisión de electrones en un experimento fotoeléctrico es de 5620 \AA .

$$\phi = eW_0 = \frac{hc}{\lambda_u} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{5620 \text{ \AA}} = 2.21 \text{ eV}$$

- 11.7.** Se ilumina una superficie de potasio con luz ultravioleta de longitud de onda 2500 \AA . Si la función de trabajo del potasio es de 2.21 eV , ¿cuál es la máxima energía cinética de los electrones emitidos?

$$K_{\text{máx}} = h \frac{c}{\lambda} - eW_0 = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{2500 \text{ \AA}} - 2.21 \text{ eV} = 2.75 \text{ eV}$$

- 11.8.** En el problema 11.7, la luz ultravioleta tiene una intensidad de 2 W/m^2 . Calcular la tasa de emisión de electrones por unidad de área.

En el problema 11.7 cada fotón tiene una energía de $4.96 \text{ eV} = 7.94 \times 10^{-19} \text{ J}$. Suponiendo que cada fotón libera un electrón, tenemos

$$\frac{\text{número de electrones}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{número de fotones}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{2 \text{ J/m}^2 \cdot \text{s}}{7.94 \times 10^{-19} \text{ J/fotón}} = 2.52 \times 10^{18} \frac{\text{fotones}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}$$

- 11.9.** Supongamos que la longitud de onda de la luz incidente en un experimento fotoeléctrico, se aumenta de 3000 \AA a 3010 \AA . Hallar el correspondiente cambio en el potencial de frenado.

$$eV_s = \frac{hc}{\lambda} - eW_0$$

Considerando el cambio en la longitud de onda y recordando que W_0 es constante, se obtiene

$$e(dV_s) = - \frac{hc}{\lambda^2} d\lambda = - \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{(3000 \text{ \AA})^2} (10 \text{ \AA}) = -1.38 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

Resolviendo, $dV_s = -1.38 \times 10^{-2} \text{ V}$.

- 11.10.** Calcular la intensidad del campo magnético transversal necesario para desviar todos los fotoelectrones en un círculo de 20 cm de radio, cuando sobre un emisor de bario incide la luz de 4000 \AA de longitud de onda. La función de trabajo del bario es de 2.5 eV .

$$\frac{1}{2} m v_{\text{máx}}^2 = h\nu - eW_0 = \frac{hc}{\lambda} - \phi$$

$$\frac{1}{2} (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}) v_{\text{máx}}^2 = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{4 \times 10^{-7} \text{ m}} - (2.5 \text{ eV}) \left(1.6 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} \right)$$

y resolviendo, $v_{\text{máx}} = 4.62 \times 10^5 \text{ m/s}$. Cuando estos electrones entran al campo magnético, tenemos

fuerza del campo magnético = masa \times aceleración radial

$$ev_{\text{máx}}B = m \frac{(v_{\text{máx}})^2}{R_{\text{máx}}}$$

$$B = \frac{mv_{\text{máx}}}{eR_{\text{máx}}} = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(4.62 \times 10^5 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.20 \text{ m})} = 1.32 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Obsérvese que este campo es comparable con el campo magnético de la Tierra, que es aproximadamente de $5.8 \times 10^{-5} \text{ T}$.

11.11. Probar que el efecto fotoeléctrico no se presenta para el caso de electrones libres.

En la figura 11-3 vemos el proceso hipotético en el sistema de centro de masa, el cual se define como aquel sistema, cuyo momentum inicial es cero. De la ecuación de conservación de la energía,

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad \text{ó} \quad h\nu + mc^2 = m_0c^2$$

lo cual implica que $m_0 > m$. Y como esto no puede ser verdadero, entonces el proceso no puede efectuarse.

Se concluye así que *los electrones que intervienen en un proceso fotoeléctrico no son libres*. La materia pesada presente entrega momentum y absorbe una cantidad despreciable de energía. Ver problema 8.16.

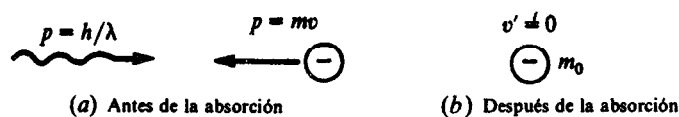


Fig. 11-3

Problemas suplementarios

- 11.12. La longitud de onda umbral para un material es de 5000 \AA . Hallar la función de trabajo. *Resp.* 2.48 eV
- 11.13. Para el material del problema 11.12, ¿cuál es el potencial de frenado para fotones de $\lambda = 3500 \text{ \AA}$?
Resp. 1.06 V
- 11.14. Cuando un material se ilumina con luz de 3000 \AA , la máxima energía de los electrones emitidos es 1.2 eV. Hallar la función de trabajo. *Resp.* 2.93 eV
- 11.15. ¿Cuál es la tasa de emisión de electrones por m^2 en el problema 11.14, si la luz tiene una intensidad de 3 W/m^2 y su eficiencia es del 50%? *Resp.* $2.27 \times 10^{18} \text{ electrones/s} \cdot \text{m}^2$
- 11.16. ¿Cuál es la máxima energía cinética de los electrones emitidos por una superficie, cuya longitud de onda umbral es 6000 \AA cuando se ilumina con luz de 4000 \AA ? *Resp.* 1.03 eV
- 11.17. Calcular la máxima longitud de onda de la luz capaz de provocar emisión de electrones en un material, cuya función de trabajo es de 3.0 eV. *Resp.* 4133 \AA
- 11.18. Hallar la energía de los electrones más rápidos emitidos al iluminar una superficie de litio con luz de 5000 \AA (función de trabajo para el litio 2.13 eV). *Resp.* 0.35 eV
- 11.19. Cuando se ilumina una superficie con luz de 4500 \AA , se encuentra que el potencial de frenado para los electrones emitidos es de 0.75 V. ¿Cuál será el potencial de frenado para los fotoelectrones, si la luz incidente tiene 3000 \AA de longitud de onda? *Resp.* 2.13 V

- 11.20.** Los electrones más energéticos emitidos de una superficie por fotones de 3500 \AA fueron obligados a describir una circunferencia de 18 cm de radio por un campo magnético de $1.5 \times 10^{-5} \text{ T}$. Calcular la función de trabajo para el material. *Resp.* 2.90 eV
- 11.21.** Sobre dos tubos fotoeléctricos incide luz de longitud de onda 4500 \AA . El emisor en el primer tubo tiene una longitud de onda umbral de 6000 \AA y el emisor del segundo tubo tiene una función de trabajo el doble de la del primer tubo. Hallar el potencial de frenado en cada uno de los tubos.
Resp. $V_{f1} = 0.69 \text{ V}$; no hay emisión fotoeléctrica en el segundo tubo
- 11.22.** Supongamos que un fotón de 600 \AA de longitud de onda es absorbido por un átomo de hidrógeno, cuya energía de ionización es de 13.6 eV . ¿Cuál es la energía cinética del electrón expelido? *Resp.* 7.1 eV

Capítulo 12

El efecto Compton

La interpretación ondulatoria predice que, cuando una radiación electromagnética es dispersada por una partícula cargada, la radiación dispersada en todas direcciones tendrá la misma frecuencia que la radiación incidente. En 1922 Arthur H. Compton demostró que si se acepta la interpretación cuántica de la radiación electromagnética (capítulo 10), entonces la radiación dispersada tendría una frecuencia menor que la radiación incidente y además dependería del ángulo de dispersión.

En su análisis, Compton considera la dispersión de la radiación electromagnética por una partícula cargada como un choque perfectamente elástico, a la manera de bolas de billar, entre un fotón y la partícula libre cargada, como se muestra en la figura 12-1. Aunque los detalles de la interacción no son conocidos, sí se aplican los principios de conservación de la energía y del momentum. Se ha encontrado que el fotón dispersado sufre un cambio en la longitud de onda $\Delta\lambda$, dado por

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

(ver problema 12.10). La cantidad h/m_0c se conoce comúnmente con el nombre de *longitud de onda de Compton* y su valor para un electrón es 0.0243 \AA . Obsérvese que el cambio en la longitud de onda depende únicamente del ángulo de dispersión θ y es independiente de la energía del fotón incidente.

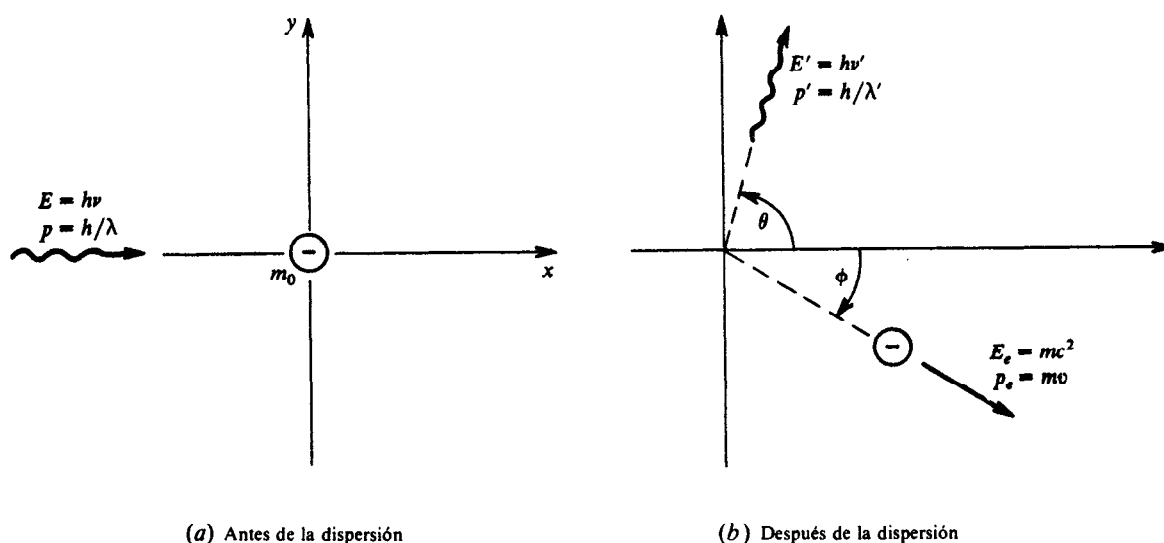


Fig. 12-1

Compton verificó experimentalmente su relación teórica, por medio de dispersión de rayos X ($\lambda = 0.7 \text{ \AA}$) en grafito. La energía de los rayos X ($1.8 \times 10^4 \text{ eV}$) es muchas veces mayor que la energía de enlace de los electrones exteriores del carbón. De ahí que el tratamiento de estos electrones como partículas libres constituya una buena aproximación.

Problemas resueltos

- 12.1.** Un fotón de rayos X de 0.3 MeV realiza un choque “frontal” con un electrón inicialmente en reposo. Hallar la velocidad de retroceso del electrón, utilizando la conservación de la energía y el momentum.

Según la figura 12-1, la conservación de la energía se expresa como

$$E + m_0c^2 = E' + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad \text{ó} \quad 0.3 \text{ MeV} + 0.511 \text{ MeV} = E' + \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

El momentum de un fotón es $h\nu/c = E/c$; por lo tanto, la conservación del momentum es ($\theta = 180^\circ$, $\phi = 0$)

$$\frac{E}{c} + 0 = -\frac{E'}{c} + \frac{m_0v}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \quad \text{ó} \quad \frac{0.3 \text{ MeV}}{c} = \frac{-E'}{c} + \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} \frac{v}{c^2}$$

La solución de las ecuaciones simultáneas para energía y momentum tiene como resultado, $v = 0.65c$.

- 12.2.** En el problema 12.1, verificar que la velocidad concuerda con el valor obtenido a partir de la ecuación de Compton.

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos 180^\circ) = \frac{2h}{m_0c} \quad \text{ó} \quad \lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_0c}$$

Multiplicando este valor por $1/hc$, se obtiene

$$\frac{\lambda'}{hc} = \frac{\lambda}{hc} + \frac{2}{m_0c^2} = \frac{1}{h\nu} + \frac{2}{m_0c^2} = \frac{1}{0.3 \text{ MeV}} + \frac{2}{0.511 \text{ MeV}} = 7.24 \frac{1}{\text{MeV}}$$

Sustituyendo $E' = (1/7.24) \text{ MeV}$ en la ecuación de energía del problema 12.1 y despejando v , se obtiene de nuevo $v = 0.65c$.

- 12.3.** Calcular la fracción de cambio en la longitud de onda de un haz de rayos X de longitud de onda 0.400 Å, si el haz sufre una dispersión de Compton de 90° .

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) = (0.0243 \text{ Å})(1 - \cos 90^\circ) = 0.0243 \text{ Å}$$

$$\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{0.0243 \text{ Å}}{0.400 \text{ Å}} = 0.0608$$

- 12.4.** Un haz de rayos X de longitud de onda 0.300 Å sufre una dispersión de Compton de 60° . Hallar la longitud de onda del fotón dispersado y la energía del electrón, después de la dispersión.

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta) = 0.30 \text{ Å} + (0.0243 \text{ Å})(1 - \cos 60^\circ) = 0.312 \text{ Å}$$

De la conservación de la energía,

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + K_e + m_0c^2 \quad \text{ó} \quad \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{Å}}{0.3 \text{ Å}} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{Å}}{0.312 \text{ Å}} + K_e$$

Resolviendo, $K_e = 1.59 \text{ keV}$

- 12.5.** En un experimento de Compton, un electrón alcanza una energía de 0.100 MeV cuando un haz de rayos X de 0.500 MeV incide sobre él. Calcular la longitud de onda del fotón dispersado, si el electrón estaba inicialmente en reposo.

$$\begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= E_{\text{final}} \\ E + m_0c^2 &= E' + (K_e + m_0c^2) \\ 0.500 \text{ MeV} &= E' + 0.100 \text{ MeV} \\ E' &= 0.400 \text{ MeV} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lambda' = \frac{hc}{E'} = \frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{0.400 \text{ MeV}} = 31 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

- 12.6. En el problema 12.5, hallar el ángulo que forma el fotón dispersado con la dirección incidente.

La longitud de onda incidente es

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{0.500 \text{ MeV}} = 24.8 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

De la ecuación de Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \theta)$$

$$31 \times 10^{-3} \text{ \AA} - 24.8 \times 10^{-3} \text{ \AA} = (24.3 \times 10^{-3} \text{ \AA})(1 - \cos \theta)$$

Resolviendo, $\theta = 42^\circ$

- 12.7. Si la máxima energía comunicada a un electrón en una dispersión de Compton es 45 keV, ¿cuál es la longitud de onda del fotón incidente?

Si el electrón tiene su máxima energía de retroceso, entonces el fotón es dispersado hacia atrás. Por la conservación de energía,

$$E + m_0 c^2 = E' + 45 \text{ keV} + m_0 c^2 \quad \text{ó} \quad E - E' = 45 \text{ keV} \quad (1)$$

Por la conservación del momentum,

$$\frac{E}{c} = -\frac{E'}{c} + p_e \quad (2)$$

Relacionando la energía y el momentum del electrón por $E_e^2 = (p_e c)^2 + E_0^2$, se tiene

$$(0.511 \text{ MeV} + 0.045 \text{ MeV})^2 = (p_e c)^2 + (0.511 \text{ MeV})^2 \quad \text{ó} \quad p_e = 0.219 \text{ MeV}/c$$

Sustituyendo este valor en (2), tenemos

$$E + E' = 219 \text{ keV} \quad (3)$$

Resolviendo (1) y (3) se obtiene $E = 132 \text{ keV}$, con lo cual

$$\lambda = \frac{hc}{E} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{132 \text{ keV}} = 9.39 \times 10^{-2} \text{ \AA}$$

- 12.8. Demostrar que un electrón libre en reposo no puede absorber un fotón. (De ahí que la dispersión de Compton *debe* realizarse con electrones libres).

$$p_{\text{fotón}} = p_{\text{electrón}} \quad \text{ó} \quad \frac{h\nu}{c} = p_e$$

$$E_{\text{fotón}} = E_{\text{electrón}} \quad \text{ó} \quad h\nu = \sqrt{(p_e c)^2 + (m_0 c^2)^2}$$

Dividiendo la expresión de la energía por c , se obtiene

$$\frac{h\nu}{c} = \sqrt{p_e^2 + m_0^2 c^2} > p_e$$

lo cual contradice la expresión del momentum.

El mismo problema ha sido resuelto de manera un poco diferente, en relación con el efecto fotoeléctrico (problema 11.11).

- 12.9. Calcular el ángulo de dispersión máximo en un experimento de Compton para el cual el fotón dispersado puede producir un par positrón-electrón.

La longitud de onda umbral para la producción del par positrón-electrón es (ver problema 13.4)

$$h \frac{c}{\lambda_u} = 2m_0c^2 \quad \text{ó} \quad \frac{h}{m_0c} = 2\lambda_u$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de Compton, se tiene

$$\lambda' = \lambda + 2\lambda_u(1 - \cos \theta)$$

El lado derecho de esta ecuación está formado por dos términos estrictamente positivos. Por lo tanto, si

$$2\lambda_u(1 - \cos \theta) \geq \lambda_u$$

entonces $\lambda' > \lambda_u$ y la producción del par no puede efectuarse. Considerando la igualdad, encontramos para θ_u el valor de

$$2\lambda_u(1 - \cos \theta_u) = \lambda_u \quad \text{ó} \quad \cos \theta_u = 1/2 \quad \text{ó} \quad \theta_u = 60^\circ$$

Obsérvese que este resultado es independiente de la energía del fotón incidente.

- 12.10. Deducir la ecuación de Compton, $\lambda' - \lambda = (h/m_0c)(1 - \cos \theta)$.

Con relación a la figura 12-1, el fotón es considerado como una partícula de energía $E = h\nu = hc/\lambda$ y de momentum $p = h/\lambda$. De la conservación de la energía:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + mc^2$$

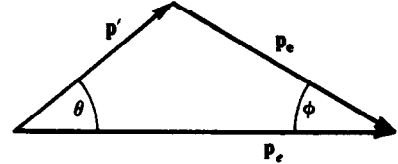


Fig. 12-2

Elevando al cuadrado y reagrupando términos, se obtiene

$$(mc^2)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2} (\lambda^2 + \lambda'^2) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda) + (m_0c^2)^2 \quad (1)$$

De la conservación del momentum se obtiene el diagrama vectorial mostrado en la figura 12-2. Puesto que $\mathbf{p}_e = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$,

$$\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{p}_e = p_e^2 = p^2 + p'^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = \frac{h^2}{\lambda^2\lambda'^2} (\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda' \cos \theta) \quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en la relación $(mc^2)^2 = (p_e c)^2 + (m_0c^2)^2$, se obtiene

$$\frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2} (\lambda^2 + \lambda'^2) - \frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'} + \frac{2hm_0c^3}{\lambda\lambda'} (\lambda' - \lambda) + (m_0c^2)^2 = \frac{h^2c^2}{\lambda^2\lambda'^2} (\lambda'^2 + \lambda^2 - 2\lambda\lambda' \cos \theta) + (m_0c^2)^2$$

Resolviendo, se llega a la relación de Compton

$$\lambda' - \lambda = \Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos \theta)$$

- 12.11. En la dispersión de Compton, ¿cuál es la energía cinética del electrón dispersado en un ángulo ϕ respecto a la dirección del fotón incidente?

energía inicial = energía final

$$h\nu + m_0c^2 = h\nu' + K_e + m_0c^2$$

o, también $h\nu = pc$,

$$pc = p'c + K_e \quad (1)$$

De la figura 12-2, $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \mathbf{p}_e$, y luego

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}' = p'^2 = p^2 + p_e^2 - 2pp_e \cos \phi \quad (2)$$

Utilizando (1) y la relación

$$p_e^2 = \frac{E_e^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} [(m_0 c^2 + K_e)^2 - (m_0 c^2)^2] = \frac{1}{c^2} (K_e^2 + 2K_e m_0 c^2) \quad (3)$$

en (2), se obtiene

$$K_e \left(m_0 + \frac{p}{c} \right) = pp_e \cos \phi$$

Elevando al cuadrado y utilizando de nuevo la ecuación (3), se obtiene

$$K_e^2 \left(m_0 + \frac{p}{c} \right)^2 = \frac{p^2}{c^2} (K_e^2 + 2K_e m_0 c^2) \cos^2 \phi$$

Finalmente, despejando K_e y reemplazando p por $h\nu/c$, se llega a

$$K_e = h\nu \frac{2 \left(\frac{h\nu}{m_0 c^2} \right) \cos^2 \phi}{\left(\frac{h\nu}{m_0 c^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{h\nu}{m_0 c^2} \right)^2 \cos^2 \phi}$$

Obsérvese que K_e es el máximo para $\phi = 0$.

Problemas suplementarios

- 12.12. Hallar la longitud de onda Compton para un protón (masa en reposo = 938.3 MeV). *Resp.* $1.32 \times 10^{-5} \text{ Å}$
- 12.13. Repetir el problema 12.3 para luz visible de longitud de onda 5000 Å. *Resp.* 4.86×10^{-6}
- 12.14. Un fotón de 100 keV es dispersado por un electrón libre inicialmente en reposo. Hallar la velocidad de retroceso del electrón, si el ángulo de dispersión del fotón es de 180° . (Utilice la conservación de energía y momentum.)
Resp. $0.319c$
- 12.15. En el problema 12.14 calcular la longitud de onda del fotón dispersado a partir de la ecuación de Compton.
Resp. 0.1726 Å
- 12.16. Si el fotón del problema 12.14 es dispersado y forma un ángulo de 65° con el haz incidente, ¿cuál es la longitud de onda final? *Resp.* 0.138 Å
- 12.17. Calcular el momentum final del electrón en el problema 12.16. *Resp.* $102.4 \text{ keV}/c$
- 12.18. Repetir los problemas 12.16 y 12.17 para un ángulo de dispersión de 144° . *Resp.* $0.168 \text{ Å}; 166 \text{ keV}/c$
- 12.19. En una dispersión de Compton, se detectaron el fotón y el electrón dispersados. Se encontró que la energía cinética del electrón era de 75 keV y la energía del fotón de 200 keV. ¿Cuál era la longitud de onda inicial del fotón? *Resp.* 0.045 Å

- 12.20. En el problema 12.19, hallar el ángulo de dispersión para el fotón y el electrón. *Resp.* 72.5° ; 41.7°
- 12.21. Calcular la variación porcentual en la longitud de onda de un fotón de $\lambda = 0.15 \text{ \AA}$, que sufre una dispersión de 120° con un electrón. *Resp.* 24.3%
- 12.22. Hallar la longitud de onda final de un fotón dispersado, que sufre una dispersión de Compton de 90° con un protón libre, si su energía original es de 12 MeV. (Para un protón, $m_0c^2 = 938.3 \text{ MeV}$.)
Resp. $1.05 \times 10^{-3} \text{ \AA}$
- 12.23. Calcular la máxima energía, en electrón voltios, comunicada a un electrón en un experimento de Compton, si los cuanta incidentes son rayos X de longitud de onda 0.50 \AA . *Resp.* 4.7 eV
- 12.24. Repetir el problema 12.23 para fotones de luz visible de longitud de onda 5000 \AA . *Resp.* $2.41 \times 10^{-5} \text{ eV}$
- 12.25. Para la dispersión de Compton, ¿cuál es la relación entre los ángulos de dispersión para el fotón y el electrón?
Resp. $\cot \phi = \left(1 - \frac{h\nu}{m_0c^2}\right) \cot \frac{\theta}{2}$
- 12.26. Un electrón que sufre un "choque frontal" con un fotón de rayos X, tiene un potencial de frenado de 70 kV. Si el electrón estaba inicialmente en reposo, ¿cuáles son las longitudes de onda inicial y dispersada de los fotones de rayos X? *Resp.* 0.0716 \AA ; 0.1201 \AA

Capítulo 13

Producción y aniquilación de pares

13.1 PRODUCCION DE PARES

En el proceso de *producción de pares*, la energía transportada por un fotón se convierte por completo en materia, dando como resultado la creación de un par electrón-positrón, como se indica en la figura 13-1. (Un positrón es idéntico a un electrón en todos sus aspectos excepto en su carga.) Puesto que la carga inicial del sistema es cero, para conservar la carga deben producirse dos partículas con cargas opuestas. Para producir un par, la energía del fotón incidente debe ser por lo menos igual a la energía en reposo del par; la energía excedente del fotón aparece como energía cinética de las partículas.

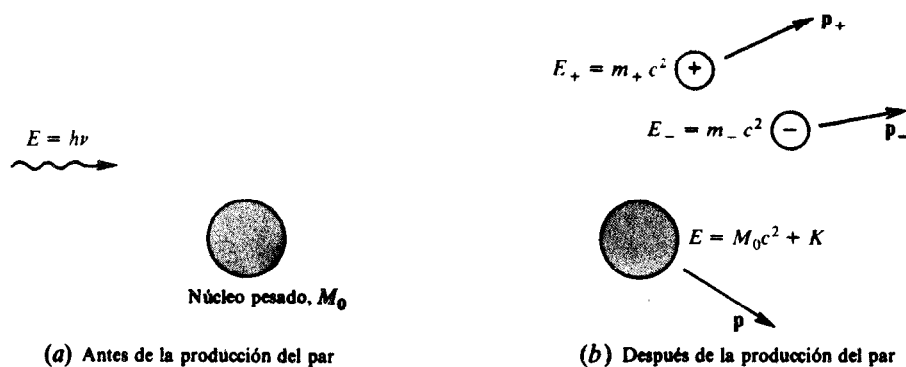


Fig. 13-1

La producción de pares no puede efectuarse en el espacio vacío (ver problema 13.11), por eso, en la figura 13-1 se ha indicado la presencia de un núcleo pesado. El núcleo absorbe una apreciable cantidad de momentum del fotón incidente, pero debido a su gran masa, su energía cinética de retroceso, $K \approx p^2/2M_0$, es generalmente despreciable en comparación con las energías cinéticas del par electrón-positrón. Por tanto, puede aplicarse la conservación de energía (mas no del momentum) ignorando la presencia del núcleo pesado, para obtener

$$h\nu = m_+ c^2 + m_- c^2 = K_+ + K_- + 2m_0 c^2$$

puesto que el electrón y el positrón tienen la misma masa de reposo $m_0 = 9.11 \times 10^{-31}$ kg.

13.2 ANIQUILACION DE PARES

También, puede ocurrir el inverso de la producción de pares. En la *aniquilación de pares*, un par positrón-electrón se destruye, dando como resultado la creación de dos (o más) fotones, como se indica en la figura 13-2. Para que se conserve la energía y el momentum, deben producirse por lo menos dos fotones. A diferencia de la producción de pares, la aniquilación puede efectuarse en el espacio vacío y ambos principios de conservación, el de energía y el de momentum son aplicables, por lo tanto

$$\begin{aligned} E_{\text{inicial}} &= E_{\text{final}} & \text{ó} & & 2m_0 c^2 + K_+ + K_- &= h\nu_1 + h\nu_2 \\ \mathbf{p}_{\text{inicial}} &= \mathbf{p}_{\text{final}} & \text{ó} & & m_+ \mathbf{v}_+ + m_- \mathbf{v}_- &= \frac{h}{2\pi} \mathbf{k}_1 + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k}_2 \end{aligned}$$

donde \mathbf{k} es el *vector propagación*, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$.

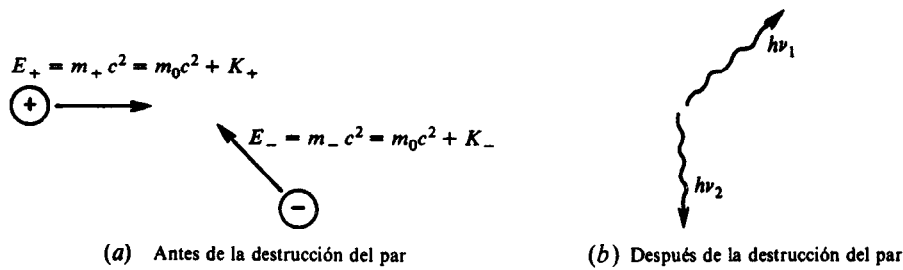


Fig. 13-2

Tanto la producción como la aniquilación de pares puede efectuarse con otras partículas y antipartículas, tales como un protón y un antiprotón (ver problema 13.16).

Problemas resueltos

- 13.1. En la vecindad de un núcleo pesado, un fotón de longitud de onda 0.0030 \AA produce un par electrón-positrón. Calcular la energía cinética de cada una de las partículas, si la energía cinética del positrón es el doble de la del electrón.

A partir de, $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$

$$\frac{hc}{\lambda} = 2m_0c^2 + K_+ + K_- = 2m_0c^2 + 3K_-$$

$$\frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{0.0030 \text{ \AA}} = 2(0.511 \text{ MeV}) + 3K_-$$

$$K_- = 1.04 \text{ MeV}$$

$$\text{y } K_+ = 2K_- = 2.08 \text{ MeV.}$$

- 13.2. Hallar las energías de los dos fotones que se producen cuando se efectúa una aniquilación entre un electrón y un positrón que se encuentran inicialmente en reposo.

Puesto que el momentum inicial del par positrón-electrón es cero, los dos fotones deben viajar en sentidos opuestos con energías iguales. Aplicando la ley de conservación de la energía, se obtiene

$$2m_0c^2 = 2E_\gamma \quad \text{ó} \quad E_\gamma = m_0c^2 = 0.511 \text{ MeV}$$

- 13.3. Cuando un electrón y un positrón realizan un choque frontal, se efectúa una aniquilación de pares que da como resultado dos fotones de 2.0 MeV cada uno, dirigidos en sentidos opuestos. Hallar la energía cinética del electrón y del positrón antes del choque.

Como el momentum final de los fotones es cero, el electrón y el positrón han debido tener energías cinéticas iguales antes del choque. De la conservación de la energía,

$$2m_0c^2 + 2K = 2E_\gamma$$

$$2(0.511 \text{ MeV}) + 2K = 2(2.0 \text{ MeV})$$

$$K = 1.49 \text{ MeV}$$

- 13.4. Calcular la longitud de onda umbral para la producción de pares.

La longitud de onda umbral es aquella para la cual el positrón y el electrón tienen energía cinética cero. La conservación de energía para este caso, (despreciando la energía de retroceso del núcleo) da,

$$\frac{hc}{\lambda_u} = 2m_0c^2 \quad \text{ó} \quad \lambda_u = \frac{hc}{2m_0c^2} = \frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{2(0.511 \text{ MeV})} = 0.0121 \text{ \AA}$$

- 13.5. Entre un electrón y un positrón en reposo se efectúa una aniquilación de la cual aparecen tres fotones. Hallar la energía del tercer fotón si las energías de los otros dos fotones son 0.20 MeV y 0.30 MeV.

De la conservación de la energía,

$$2(0.511 \text{ MeV}) = 0.20 \text{ MeV} + 0.30 \text{ MeV} + E_3 \quad \text{ó} \quad E_3 = 0.522 \text{ MeV}$$

- 13.6. ¿Cuántos positrones puede producir un fotón de 200 MeV?

La energía necesaria para crear un par electrón-positrón en reposo es el doble de la energía en reposo de un electrón, o sea 1.022 MeV. Por lo tanto,

$$\text{máximo número de positrones} = (200 \text{ MeV}) \left(\frac{1 \text{ par}}{1.022 \text{ MeV}} \right) \left(1 \frac{\text{positrón}}{\text{par}} \right) = 195 \text{ positrones}$$

- 13.7. Un electrón de 5 MeV sufre una aniquilación con un positrón que se encuentra en reposo. En este proceso se crean dos fotones, uno de los cuales avanza en la dirección del electrón incidente. Calcular la energía de cada fotón.

El segundo fotón debe viajar en dirección paralela ($\epsilon = +1$) o antiparalela ($\epsilon = -1$) al primer fotón, para conservar el momentum en la dirección transversal. De la conservación del momentum,

$$p_- = \frac{E_1}{c} + \epsilon \frac{E_2}{c} \quad \text{ó} \quad E_1 + \epsilon E_2 = p_- c$$

Reemplazando $p_- c$ de

$$(K_- + m_0c^2)^2 = (p_- c)^2 + (m_0c^2)^2$$

obtenemos

$$E_1 + \epsilon E_2 = \sqrt{(K_- + m_0c^2)^2 - (m_0c^2)^2} = \sqrt{(5.511 \text{ MeV})^2 - (0.511 \text{ MeV})^2} = 5.49 \text{ MeV}$$

La conservación de la energía exige que

$$E_1 + E_2 = K_- + m_0c^2 + m_0c^2 = 5 \text{ MeV} + 2(0.511 \text{ MeV}) = 6.02 \text{ MeV}$$

Reemplazando E_1 en la ecuación del momentum se obtiene

$$-0.53 \text{ MeV} = (\epsilon - 1)E_2$$

Por lo tanto ϵ debe hacerse igual a -1 , para que el segundo fotón viaje en sentido opuesto al primero. Las energías calculadas son

$$E_2 = 0.27 \text{ MeV} \quad E_1 = 5.75 \text{ MeV}$$

- 13.8. Un electrón y un positrón que viajan juntos, como se muestra en la figura 13-3, se aniquilan. Hallar las longitudes de onda de los dos fotones producidos si ambos se mueven a lo largo de la línea de movimiento del par original.

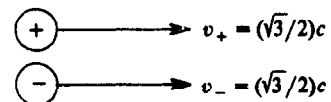


Fig. 13-3

Si el proceso se mira desde el sistema de centro de masa, los fotones salen en sentidos opuestos. Llevando

esto al sistema de laboratorio, aún se encuentra que los fotones se mueven en sentidos opuestos, ya que la velocidad de laboratorio relativa al centro de masa es menor que c . La conservación del momentum da

$$2mv = p_1 - p_2 = \frac{h}{\lambda_1} - \frac{h}{\lambda_2}$$

con

$$2mv = \frac{2(m_0c^2)(v/c)}{c\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2(0.511 \text{ MeV})(\sqrt{3}/2)}{c\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} = 1.770 \frac{\text{MeV}}{c}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{(2mv)c}{hc} = \frac{1.770 \text{ MeV}}{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}} = 142.7 \text{ \AA}^{-1} \quad (1)$$

Por la conservación de la energía,

$$2mc^2 = h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2}$$

con

$$2mc^2 = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2(0.511 \text{ MeV})}{\sqrt{1-(\sqrt{3}/2)^2}} = 2.044 \text{ MeV}$$

Luego,

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{2mc^2}{hc} = \frac{2.044 \text{ MeV}}{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}} = 164.8 \text{ \AA}^{-1} \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) simultáneamente se obtiene

$$\lambda_1 = 6.50 \times 10^{-3} \text{ \AA} \quad \lambda_2 = 9.05 \times 10^{-2} \text{ \AA}$$

- 13.9.** Un electrón y un positrón que se mueven como en el problema 13.8, se aniquilan y se observa que los fotones producidos forman ángulos de dispersión iguales. Hallar la energía y los ángulos de dispersión de los fotones.

Puesto que el momentum inicial en la dirección perpendicular es cero, los fotones deben tener la misma energía E_γ . Con los resultados del problema 13.8 y la conservación de energía,

$$2E_\gamma = \frac{2m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 2.044 \text{ MeV} \quad \text{ó} \quad E_\gamma = 1.022 \text{ MeV}$$

Por la conservación del momentum en la dirección longitudinal,

$$2mv = \frac{E_\gamma}{c} \cos \theta + \frac{E_\gamma}{c} \cos(-\theta)$$

$$\frac{2m_0v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = \frac{2m_0c}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} \cos \theta$$

luego $\cos \theta = v/c = \sqrt{3}/2$ y $\theta = 30^\circ$.

- 13.10.** La producción de pares efectuada en un campo magnético de 0.1 T da como resultado un positrón y un electrón que se mueven en circunferencias de radios 120 mm y 40 mm, respectivamente. Calcular la energía del fotón incidente.

Aplicando la segunda ley de Newton a la partícula cargada en un campo magnético (ver problema 8.25), obtenemos

$$quB = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \frac{u^2}{R} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \sqrt{1 + \left(\frac{qBR}{m_0c} \right)^2}$$

Por lo tanto, la energía total de la partícula cargada es

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = m_0c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{qBR}{m_0c} \right)^2}$$

Calculando la energía del positrón y la del electrón:

$$E_+ = (0.511 \text{ MeV}) \sqrt{1 + \left[\frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.1 \text{ T})(120 \times 10^{-3} \text{ m})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} \right]^2} = 3.63 \text{ MeV}$$

$$E_- = (0.511 \text{ MeV}) \sqrt{1 + \left[\frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.1 \text{ T})(40 \times 10^{-3} \text{ m})}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})} \right]^2} = 1.30 \text{ MeV}$$

Entonces, por la conservación de la energía (despreciando la del núcleo pesado),

$$h\nu = E_+ + E_- = 4.93 \text{ MeV}$$

- 13.11.** Demostrar que la producción de pares no puede efectuarse en el espacio vacío. (De ahí que la producción de pares deba efectuarse en presencia de un núcleo).

La producción de un par de partículas es un hecho invariante: si un observador encuentra que un par se produce, entonces cualquier otro observador que se mueva con respecto al primero, también encontrará que el par se ha producido. Sin embargo, la frecuencia de un fotón difiere de un observador a otro, debido a la variación Doppler (capítulo 9). Siempre es posible encontrar un observador que se mueva con una velocidad tal que la frecuencia de un fotón dado tenga una variación Doppler *por debajo* de la frecuencia umbral necesaria para la producción del par (problema 13.4). Puesto que este observador encontrará que la producción del par no es posible en el espacio vacío, resulta que cualquier otro observador encontrará que es imposible la producción del par en el espacio vacío.

Problemas suplementarios

- 13.12.** Calcular la energía umbral de un fotón para la producción de pares. *Resp.* 1.022 MeV
- 13.13.** Un fotón de longitud de onda 0.0005 Å produce un par electrón-positrón en la vecindad de un núcleo pesado. Si las partículas tienen la misma energía cinética, hallar la energía de cada una. *Resp.* 11.9 MeV
- 13.14.** Si la energía cinética del positrón en el problema 13.13 es cinco veces la del electrón, hallar la energía de cada partícula. *Resp.* 19.8 MeV; 3.96 MeV
- 13.15.** Después de la aniquilación de un par, se encuentra que dos fotones de 1 MeV se mueven en sentidos opuestos. Calcular la energía cinética del electrón y del positrón sabiendo que ambos tenían la misma energía. *Resp.* 0.49 MeV
- 13.16.** Calcular la longitud de onda umbral para la producción del par protón-antiprotón. La masa en reposo del protón (o del antiprotón) es 938 MeV. *Resp.* $6.61 \times 10^{-6} \text{ Å}$

- 13.17.** Un electrón con velocidad de $0.8c$, se aniquila con un positrón en reposo, produciendo dos fotones. Un fotón que viaja en la dirección del electrón incidente. Calcular la energía de cada fotón.
Resp. 1.02 MeV; 0.34 MeV
- 13.18.** Si en el problema 13.17, un fotón se mueve perpendicularmente a la dirección del electrón incidente, ¿cuál es la energía de cada fotón? *Resp.* 0.51 MeV; 0.85 MeV
- 13.19.** Cuando la producción de pares se efectúa en un campo magnético de 0.05 T, se observa que tanto el electrón como el positrón describen circunferencias de 90 mm de radio. ¿Cuál es la energía del fotón incidente?
Resp. 2.88 MeV

Capítulo 14

Absorción de fotones

La intensidad de un haz de radiación se reduce al pasar a través de un material, debido a que algunos fotones son absorbidos o desviados de la dirección de avance por alguna combinación de las siguientes causas: efecto fotoeléctrico, efecto Compton y producción de pares. La reducción en intensidad se rige por la ley de decaimiento exponencial.

$$I = I_0 e^{-\mu x} \quad (14.1)$$

Aquí I_0 es la intensidad de la radiación que incide sobre el material absorbente y μ (el *coeficiente de absorción lineal*) es, para un fotón de energía dada, una constante que depende del material absorbente. Para cualquier material dado, μ varía con la energía (o longitud de onda) de la radiación, debido a que a diferentes energías predominan diferentes interacciones.

Problemas resueltos

- 14.1. ¿Qué porcentaje de radiación incidente de rayos X pasa a través de 5.0 mm de un material, cuyo coeficiente de absorción lineal es de 0.07 mm^{-1} ?

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu x} = e^{-(0.07 \text{ mm}^{-1})(5.0 \text{ mm})} = 0.705 = 70.5\%$$

- 14.2. Un haz monocromático de fotones incide sobre un material absorbente. Si la intensidad del haz incidente se reduce a la mitad cuando el haz atraviesa 8 mm del material, ¿cuál es el coeficiente de absorción?

$$\frac{I_0}{2} = I_0 e^{-\mu(8 \text{ mm})}$$

Resolviendo, $\mu = 0.0866 \text{ mm}^{-1}$.

- 14.3. Calcular el *espesor de valor medio* (o capa hemirreductora) del aluminio si $\mu = 0.070 \text{ mm}^{-1}$.

El espesor de valor medio es el espesor a través del cual el valor de la intensidad de un haz de fotones se reduce a la mitad de la del haz incidente. Luego

$$\frac{1}{2} = e^{-(0.070 \text{ mm}^{-1})x} \quad \text{ó} \quad x = 9.9 \text{ mm}$$

- 14.4. ¿Cuál es la relación entre las intensidades de un haz de fotones, antes y después de pasar a través de un material, cuyo espesor es igual a dos espesores de valor medio?

A través de cada espesor de valor medio, la intensidad se reduce a la mitad de su valor original. Por lo tanto, a través de dos espesores de valor medio, la intensidad incidente (I_0) se reduce a la cuarta parte de su valor inicial ($I_0/4$).

- 14.5.** La intensidad de un haz se reduce a la mitad, cuando atraviesa perpendicularmente una lámina de 20 mm de espesor. ¿Cuál es la intensidad del haz emergente cuando se gira la lámina un ángulo de 40° ?

El coeficiente de absorción lineal se obtiene de

$$\frac{1}{2} = e^{-\mu(20 \text{ mm})} \quad \text{ó} \quad \mu = 0.0347 \text{ mm}^{-1}$$

Cuando se gira la lámina un ángulo de 40° , el nuevo espesor es

$$x_2 = \frac{x_1}{\cos 40^\circ} = \frac{20 \text{ mm}}{\cos 40^\circ} = 26.1 \text{ mm}$$

La nueva intensidad es

$$\frac{I_2}{I_0} = e^{-\mu x_2} = e^{-(0.0347 \text{ mm}^{-1})(26.1 \text{ mm})} = 0.404$$

- 14.6.** ¿Qué espesor de aluminio ($\mu_a = 0.044 \text{ mm}^{-1}$) es equivalente a 6.0 mm de plomo ($\mu_l = 5.8 \text{ mm}^{-1}$)?

Un espesor de aluminio equivalente reducirá la radiación incidente en la misma cantidad que se reduce al pasar a través de 6.0 mm de plomo.

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu_l x_l} = e^{-\mu_a x_a}$$

de donde $\mu_l x_l = \mu_a x_a$. Así

$$x_a = \frac{\mu_l}{\mu_a} x_l = \frac{5.8 \text{ mm}^{-1}}{0.044 \text{ mm}^{-1}} (6.0 \text{ mm}) = 791 \text{ mm}$$

- 14.7** Los coeficientes de absorción de dos materiales *A* y *B* son 0.044 mm^{-1} y 0.056 mm^{-1} , respectivamente. Si al atravesar ambos materiales la intensidad I_0 se convierte en $I_0/5$, ¿cuáles son los espesores de *A* y *B*, sabiendo que el espesor de *A* es el doble que el de *B*?

Si el espesor de *A* es $2x$, la intensidad incidente sobre *B* es $I_0 e^{-\mu_a(2x)}$. Por lo tanto, aplicando la ley exponencial a *B*,

$$I = \frac{I_0}{5} = [I_0 e^{-\mu_a(2x)}] e^{-\mu_b x} = I_0 e^{-(2\mu_a + \mu_b)x}$$

ó

$$5 = e^{(0.144 \text{ mm}^{-1})x}$$

Resolviendo, $x = 11.18 \text{ mm}$, $2x = 22.36 \text{ mm}$.

- 14.8.** Deducir la fórmula $I = I_0 e^{-\mu x}$.

Para un fotón de energía dada, el flujo de fotones se reduce en un material, debido al efecto fotoeléctrico, a la producción de pares y a la dispersión de Compton. El número de reacciones, dN , en un espesor dx es directamente proporcional a la magnitud del flujo de fotones, N , y al número de átomos que encuentra el fotón a su paso a través de un pequeño espesor del material. A su vez, el número de átomos en dx es proporcional a dx . Por lo tanto,

$$-dN = \mu N dx$$

Integrando se obtiene

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\mu \int_0^x dx$$

$$N = N_0 e^{-\mu x}$$

Puesto que la intensidad, I , de un haz monocromático es proporcional a N . Entonces

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

Problemas suplementarios

- 14.9. El coeficiente de absorción de un material es 0.061 mm^{-1} . Si la intensidad incidente es I_0 , calcular el espesor de material necesario para reducir la intensidad del haz a $I_0/3$. *Resp.* 18 mm
- 14.10. El coeficiente de absorción lineal para un material es 0.0055 mm^{-1} . ¿Qué porcentaje de haz monocromático pasará a través de 10 mm de este material? *Resp.* 57.7%
- 14.11. A través de 8.5 mm de cierto material, la intensidad de un haz monocromático se reduce a la tercera parte. Hallar el coeficiente de absorción del material. *Resp.* 0.129 mm^{-1}
- 14.12. Para un material $\mu = 0.035 \text{ mm}^{-1}$. Hallar el espesor de valor medio. *Resp.* 19.8 mm
- 14.13. ¿Qué espesor de un material A ($\mu_a = 0.060 \text{ mm}^{-1}$) es equivalente a 8 mm de espesor de material B ($\mu_b = 0.131 \text{ mm}^{-1}$)? *Resp.* 17.5 mm
- 14.14. Si con los materiales del problema 14.13 se construyen láminas de igual espesor y se unen para reducir la intensidad de un haz incidente a la quinta parte, ¿cuál es el espesor de cada lámina? *Resp.* 8.4 mm
- 14.15. Sobre un material inciden dos radiaciones de rayos X de igual intensidad, una de 0.3 \AA ($\mu_a = 0.3 \text{ mm}^{-1}$) y otra de 0.5 \AA ($\mu_b = 0.72 \text{ mm}^{-1}$). Hallar el espesor del material si, en la radiación emergente, el haz de rayos X de 0.3 \AA tiene doble intensidad que el haz de 0.5 \AA . *Resp.* 1.7 mm

Capítulo 15

Ondas de De Broglie

15.1 LA DUALIDAD ONDA-PARTICULA DE LA RADIACION ELECTROMAGNETICA

En los capítulos 10 al 13 se vio cómo a las radiaciones electromagnéticas se les asignaron características de partículas para explicar ciertas observaciones experimentales (efecto fotoeléctrico, dispersión de Compton). Se sabe, además, por experimentos de interferencia y difracción, que la radiación electromagnética también se comporta como una onda. De ahí que la radiación electromagnética muestra una *dualidad onda-partícula*: en ciertas circunstancias se comporta como una onda, mientras que en otras situaciones actúa como una partícula.

Se hace indispensable la distinción clara entre ondas y partículas, por ser éstos los dos únicos modos de transmisión de energía. Clásicamente, una partícula es algo que ocupa una posición, tiene momentum, energía cinética, masa y carga eléctrica. Una onda clásica tiene características, tales como longitud de onda, frecuencia, velocidad, amplitud de la perturbación, intensidad, energía y momentum. La diferencia más sobresaliente entre ambas consiste en que la partícula puede ser localizada, mientras que la onda se esparce y ocupa una posición relativamente amplia en el espacio.

15.2 LA DUALIDAD ONDA-PARTICULA DE LA MATERIA

En 1924, Luis de Broglie propuso que, si la radiación electromagnética podía comportarse unas veces como onda y otras como partícula, existía la posibilidad, para objetos materiales como los electrones, de actuar en ciertas ocasiones como ondas. En otras palabras, de Broglie propuso que cuando los objetos materiales pasan a través de una ranura, cuyo ancho sea comparable con una longitud de onda asociada a ellos, entonces experimentarán un proceso de difracción, tal como ocurre con los fotones en un experimento con una ranura.

Para un fotón, $\nu = E/h$ y $\lambda = h/p$. Se observa que los lados izquierdos de estas ecuaciones involucran aspectos ondulatorios de los fotones (frecuencia y longitud de onda), mientras que en los lados derechos aparecen características de partículas (energía, momentum). El puente entre ambos lados de cada ecuación es la constante de Planck. Con el argumento de la simetría de la naturaleza, de Broglie supuso que las longitudes de onda asociadas con los cuerpos materiales podían satisfacer las mismas relaciones que son válidas para los fotones. Por lo tanto, postuló que un cuerpo material tendría una longitud de onda dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Una diferencia importante entre los fotones y los objetos con masa, consiste en cómo se relacionan sus propiedades ondulatorias y de partícula. Como para un fotón $\lambda\nu = c$ solamente se requiere una ecuación para obtener la longitud de onda y la frecuencia a partir de las propiedades de partícula, energía y momentum del fotón. En cambio, para un objeto con masa, es necesario separar las ecuaciones para su longitud de onda ($\lambda = h/p$) y su frecuencia ($\nu = E/h$).

Problemas resueltos

15.1. Hallar la longitud de onda de de Broglie para un perdigón de 0.01 kg que viaja a 10 m/s.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{0.01 \text{ kg} \times 10 \text{ m/s}} = 6.63 \times 10^{-33} \text{ m} = 6.63 \times 10^{-23} \text{ Å}$$

Para observar las ondas de de Broglie, es necesario realizar experimentos de interferencia o de difracción, en los cuales se utilicen ranuras, cuyo ancho sea comparable con la longitud de onda de de Broglie. La anterior longitud de onda de de Broglie, 10^{-23} Å, es muchísimas veces menor que la más pequeña ranura existente.

- 15.2.** Calcular el potencial de aceleración necesario para dar a un electrón una longitud de onda de de Broglie de 1 Å, longitud comparable con las distancias interatómicas de los átomos de un cristal.

De la conservación de la energía (cálculos no relativistas), tenemos

$$eV = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2m_0} \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2$$

$$V = \frac{h^2}{2m_0 e \lambda^2} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 151 \text{ V}$$

Obsérvese que la energía cinética de 151 eV es pequeña comparada con la energía en reposo de 0.511 MeV. Esto justifica el cálculo no relativista.

Potenciales de aceleración aproximados a 150 voltios son fácilmente utilizables en el laboratorio. Por lo tanto, a diferencia del caso macroscópico del problema 15.1, son posibles las condiciones para observar las ondas de de Broglie de los electrones.

- 15.3.** Calcular la longitud de onda de de Broglie para un neutrón ("térmico") de 0.05 eV.

Efectuando cálculos no relativistas,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0 c^2) K}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{\sqrt{2(940 \times 10^6 \text{ eV})(0.05 \text{ eV})}} = 1.28 \text{ Å}$$

Esta longitud de onda conveniente de aproximadamente 1 Å, es fácilmente obtenible en la física de los neutrones lentos.

- 15.4.** Calcular la energía de un protón de longitud de onda igual a 0.5 fm.
(1 fm = 10^{-15} m = 10^{-5} Å = 1 fermi)

De $\lambda = h/p = hc/pc$,

$$0.5 \text{ fm} = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{pc} \quad \text{ó} \quad pc = 2480 \text{ MeV}$$

De la ecuación relativista para la energía-momentum,

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 = (2480 \text{ MeV})^2 + (938 \text{ MeV})^2$$

lo que da $E = 2650 \text{ MeV}$ y

$$K = E - E_0 = 2650 \text{ MeV} - 938 \text{ MeV} = 1712 \text{ MeV}$$

En este caso, $K \approx E_0$, de ahí que fuese necesario un cálculo relativista.

- 15.5.** ¿Cuál es la mínima energía que debe tener el fotón utilizado cuando se desea observar un objeto, cuyo tamaño es de 2.5 Å?

Para que se produzca dispersión, la longitud de onda debe ser aproximadamente igual o menor que las dimensiones del objeto que se desea observar (imagine la dispersión de ondas de agua producida por una arveja). De ahí que la máxima longitud de onda posible en este problema sea $\lambda_{\text{máx}} = 2.5$ Å. La mínima energía correspondiente es entonces

$$E_{\text{min}} = h\nu_{\text{min}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{máx}}} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2.5 \text{ Å}} = 4.96 \times 10^3 \text{ eV}$$

15.6. Repita el problema 15.5 para electrones en lugar de fotones.

Como en el problema 15.5, la longitud de onda máxima para el electrón es $\lambda_{\max} = 2.5 \text{ \AA}$. La relación no relativista entre energía cinética y momentum es $p = \sqrt{2m_0K}$. Por lo tanto,

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}}$$

y,

$$K_{\min} = \frac{h^2}{2m_0\lambda_{\max}^2} = \frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda_{\max}^2} = \frac{(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{2(0.511 \times 10^6 \text{ eV})(2.5 \text{ \AA})^2} = 24.1 \text{ eV}$$

Comparando con el problema 15.5, se observa que, para una energía dada, los electrones tienen un poder de resolución mucho mayor que el de los fotones. Esto explica por qué los microscopios electrónicos pueden lograr ampliaciones mucho mayores que las que se obtienen con los microscopios ópticos.

15.7. ¿Para qué valor de energía los cálculos no relativistas de la longitud de onda de de Broglie para un electrón dan un error del 5%?

Para el caso no relativista, la longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda_{nr} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{2m_0c^2K}}$$

Para el caso relativista

$$(K + m_0c^2)^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2 \quad \text{ó} \quad pc = \left[2m_0c^2K \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2} \right) \right]^{1/2}$$

y la longitud de onda de de Broglie es

$$\lambda_r = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\left[2m_0c^2K \left(1 + \frac{K}{2m_0c^2} \right) \right]^{1/2}}$$

Para el caso nuestro, $\lambda_{nr} - \lambda_r = 0.05\lambda_r$; $\lambda_{nr}/\lambda_r = 1.05$.

$$\frac{\lambda_{nr}}{\lambda_r} = \sqrt{1 + \frac{K}{2m_0c^2}}$$

$$1.05 = \sqrt{1 + \frac{K}{2(0.511 \text{ MeV})}}$$

Resolviendo, $K = 0.105 \text{ MeV}$.

15.8. Demuestre que cuando la energía de una partícula es mucho mayor que su energía en reposo, la longitud de onda de de Broglie para la partícula es aproximadamente la misma que la del fotón con igual energía

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2 \quad \text{ó} \quad p = \frac{E}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E} \right)^2} \approx \frac{E}{c}$$

si $E \gg E_0$. Entonces

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx \frac{hc}{E}$$

Para un fotón $E = h\nu = hc/\lambda$, así:

$$\lambda_\gamma = \frac{hc}{E} \approx \lambda$$

- 15.9.** Calcular la velocidad de fase de la onda correspondiente a una longitud de onda de de Broglie de $\lambda = h/p = h/mv$.

La frecuencia de de Broglie se encuentra a partir de

$$E = mc^2 = h\nu \quad \text{ó} \quad \nu = mc^2/h$$

La velocidad de fase, u_f , se calcula de

$$u_f = \nu\lambda = \left(\frac{mc^2}{h}\right)\left(\frac{h}{mv}\right) = \frac{c^2}{v}$$

Obsérvese que como $v < c$ entonces $u_f > c$.

- 15.10.** Determine la velocidad de grupo de la onda correspondiente a una longitud de onda de de Broglie, de $\lambda = h/p$.

La velocidad de grupo, u_g , está dada por $u_g = d\nu/d(\lambda^{-1})$. Utilizando la expresión encontrada para ν , en el problema 15.9, tenemos

$$u_g = \frac{d(mc^2/h)}{d(p/h)} = \frac{c^2 dm}{dp}$$

Diferenciando $m^2c^4 = p^2c^2 + m_0^2c^4$, obtenemos $c^2m dm = p dp$. Por lo tanto,

$$u_g = \frac{(p/m)dp}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

En la estructura teórica de la mecánica cuántica, una partícula se describe como la asociación de un paquete de ondas formado por la superposición de un infinito número de ondas planas. Cada onda plana se mueve con una velocidad de fase que puede sobrepasar la velocidad de la luz, como se muestra en el problema 15.9. No obstante, las velocidades de fase individuales no son observables. La cantidad observable es la velocidad de la perturbación, o velocidad de grupo, que, como se ha demostrado, es igual a la velocidad (comúnmente) asociada con la partícula y es menor que la velocidad de la luz.

Problemas suplementarios

- 15.11.** Calcular la longitud de onda de de Broglie para una masa de 2 kg, cuya velocidad es de 25 m/s.
Resp. $1.33 \times 10^{-25} \text{ Å}$
- 15.12.** Calcular la longitud de onda de de Broglie para un neutrón de 0.08 eV. *Resp.* 1.01 Å
- 15.13.** ¿Cuál es la energía cinética de un neutrón, cuya longitud de onda de de Broglie es de 0.7 Å ?
Resp. 0.167 eV
- 15.14.** ¿Qué energía mínima requiere un electrón para poder observar con él un objeto de 5 Å ? *Resp.* 6.02 eV
- 15.15.** Con relación al problema 15.14, ¿qué energía mínima requiere un protón? *Resp.* $3.28 \times 10^{-3} \text{ eV}$
- 15.16.** Un protón es acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1 kV. ¿Cuál es la longitud de onda de de Broglie? *Resp.* $9.05 \times 10^{-3} \text{ Å}$

- 15.17.** Hallar la longitud de onda de de Broglie para una partícula α de 1 keV ($m_0 = 3728 \text{ MeV}$).
Resp. $4.54 \times 10^{-3} \text{ \AA}$
- 15.18.** ¿Para qué valor de energía cinética los cálculos no relativistas de la longitud de onda de de Broglie, para un protón, dan un error del 5%? *Resp.* 192 MeV
- 15.19.** ¿Cuál es la relación entre las longitudes de onda de una partícula, según Compton y de Broglie?

Resp. $\frac{\lambda_c}{\lambda_d} = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 - 1}$

Capítulo 16

Comprobación experimental de la hipótesis de De Broglie

16.1 LA LEY DE DIFRACCION DE BRAGG

En 1912, con base en la distribución regular de los átomos, Max von Laue propuso que los cristales podrían ser utilizados como rejillas de difracción para los rayos X, los cuales son radiaciones electromagnéticas, cuya longitud de onda de aproximadamente 1 \AA , es comparable con las distancias interatómicas en un cristal.

La teoría sobre difracción de los rayos X fue desarrollada por Sir William H. Bragg en 1913, quien demostró que un plano de átomos en un cristal, llamado *plano de Bragg*, refleja la radiación, del mismo modo que un espejo plano refleja la luz, como se indica en la figura 16-1.

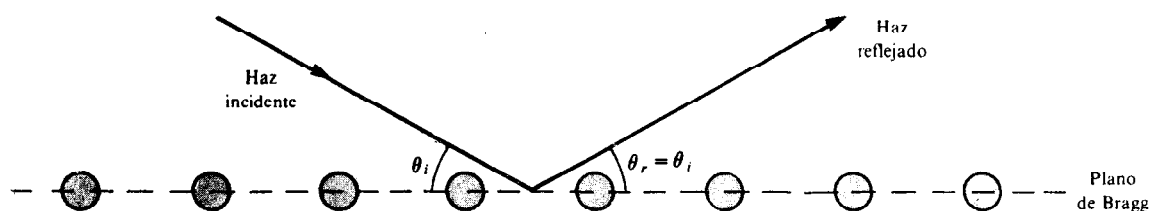


Fig. 16-1

Si consideramos la radiación reflejada en planos de Bragg paralelos y sucesivos, separados una distancia d , como se muestra en la figura 16-2, es posible que los haces reflejados en cada plano interfieran constructivamente para reforzar en ciertas direcciones el haz reflejado. Para que se produzca una interferencia constructiva, se requiere que la diferencia de trayectorias, $2d \sin \theta$, entre los dos rayos, sea igual a un número entero de longitudes de onda; por consiguiente, la *ley de Bragg* establece que

$$n\lambda = 2d \sin \theta$$

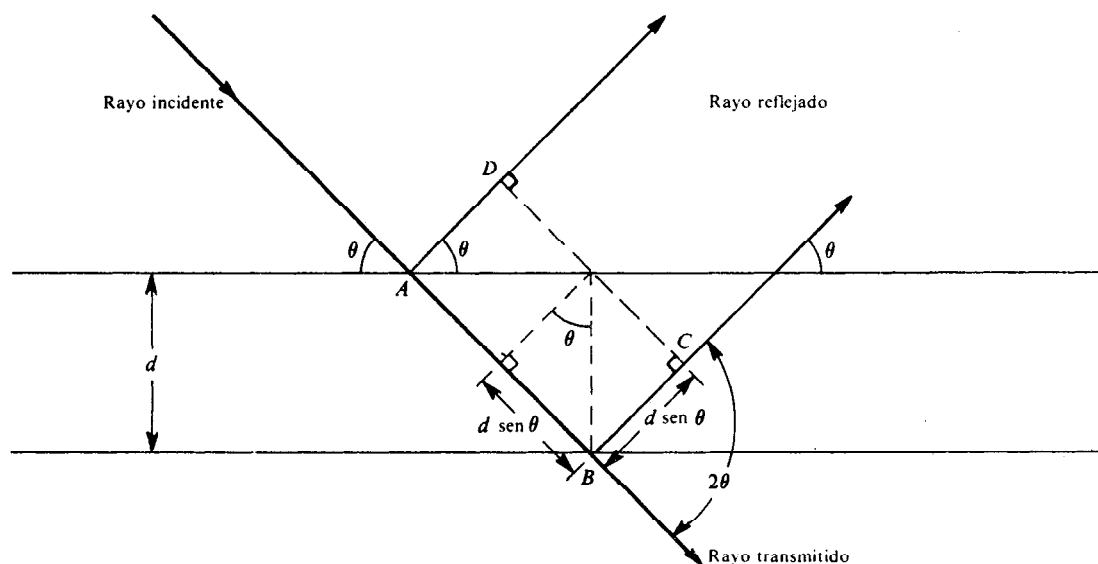


Fig. 16-2

La longitud de onda del haz incidente puede calcularse si se conocen n y d y se mide el ángulo de dispersión 2θ , entre los haces transmitido y difractado.

En cualquier cristal se pueden formar muchas familias diferentes de planos de Bragg, cada uno con su propia separación, haciendo cortes en diferentes formas a través del cristal. Cada una de estas familias puede dar lugar a una difracción. De ahí que si un haz de rayos X pasa a través de cristales orientados al azar, como en una muestra de polvo o en una hoja delgada, se observa un modelo de difracción formado por círculos concéntricos, sobre una película colocada detrás de la muestra. Un determinado círculo corresponderá a la difracción de un orden particular producida por una cierta familia de planos. En los siguientes problemas resueltos, a excepción del 16.8, consideraremos únicamente difracción en planos *principales* de Bragg, cuya separación es el espacio interatómico.

16.2 EXPERIMENTO SOBRE DIFRACCION DE ELECTRONES

Los primeros experimentos para observar la difracción de electrones fueron realizados por C. J. Davisson y L. H. Germer, en los laboratorios de la Bell Telephone. Ellos enviaron un haz de electrones de 54 eV hacia un cristal de níquel, cuya distancia interatómica, calculada a partir de mediciones con difracción de rayos X, resultó ser de 2.15 Å, y midieron la intensidad de los electrones dispersados, como una función del ángulo de dispersión. Si no existieran efectos debidos a la difracción, era de esperarse que la intensidad de los electrones dispersados decreciera uniformemente con el ángulo de dispersión, sin que resultara un mayor número de electrones con un ángulo determinado. Sin embargo, se encontró un pico pronunciado en la intensidad de los electrones, para un ángulo de dispersión de 50° . Con una pequeña corrección (ver problemas 16.8 y 16.9), la longitud de onda calculada coincidió con la longitud de onda de de Broglie, verificando así la hipótesis de de Broglie.

Poco tiempo después de los experimentos de Davisson y Germer, en 1927, G. P. Thomson estudió la transmisión de electrones a través de hojas delgadas de metal. Si los electrones se comportan como partículas, la imagen en el haz transmitido resultaría borrosa. No obstante, Thomson encontró un modelo circular de difracción que sólo puede explicarse basado en el modelo ondulatorio, lo cual confirma una vez más la hipótesis de de Broglie.

Posteriormente se realizaron experimentos de difracción con neutrones térmicos (de baja energía) que apoyaron aún más la hipótesis de de Broglie.

Problemas resueltos

- 16.1.** Un haz de neutrones de 0.083 eV se dispersa en una muestra de material desconocido y se observa un pico de reflexión de Bragg centrado a 22° . ¿Cuál es la separación entre planos de Bragg?

La longitud de onda del haz de neutrones se obtiene de

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K}} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{\sqrt{2(940 \times 10^6 \text{ eV})(0.083 \text{ eV})}} = 0.993 \text{ Å}$$

Suponiendo que el pico corresponde a una difracción de primer orden ($n = 1$), tenemos

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{0.993 \text{ Å}}{2 \sin 22^\circ} = 1.33 \text{ Å}$$

- 16.2.** Sobre un cristal de cloruro de sodio (distancia interatómica 2.81 Å), inciden neutrones térmicos que sufren una difracción de primer orden en los planos principales de Bragg con un ángulo de 20° . ¿Cuál es la energía de los neutrones térmicos?

Para la reflexión de Bragg de primer orden,

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2(2.81 \text{ Å}) \sin 20^\circ = 1.922 \text{ Å}$$

De la relación de de Broglie, $\lambda = h/p = hc/\sqrt{2(m_0c^2)K}$, así

$$1.922 \text{ \AA} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{2(940 \times 10^6 \text{ eV})K}} \quad \text{ó} \quad K = 0.0221 \text{ eV}$$

- 16.3. Un haz fino de electrones de 60 keV pasa a través de una hoja policristalina, delgada de plata. La distancia interatómica de los cristales de plata es de 4.08 Å. Calcular el radio del patrón de difracción de primer orden de los planos principales de Bragg, sobre una pantalla situada a 40 cm detrás de la hoja.

La longitud de onda de de Broglie para el haz de electrones es:

$$\lambda = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}} = \frac{hc}{\sqrt{(K + E_0)^2 - E_0^2}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{(60 \times 10^3 \text{ eV} + 511 \times 10^3 \text{ eV})^2 - (511 \times 10^3 \text{ eV})^2}} = 0.0487 \text{ \AA}$$

Para la reflexión de Bragg de primer orden,

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0.0487 \text{ \AA}}{2(4.08 \text{ \AA})}$$

de donde $\theta = 0.342^\circ$. En la figura 16-3, el radio del patrón de difracción de primer orden está dado por

$$R = D \tan 2\theta = (40 \text{ cm}) \tan 0.684^\circ = 0.478 \text{ cm}$$

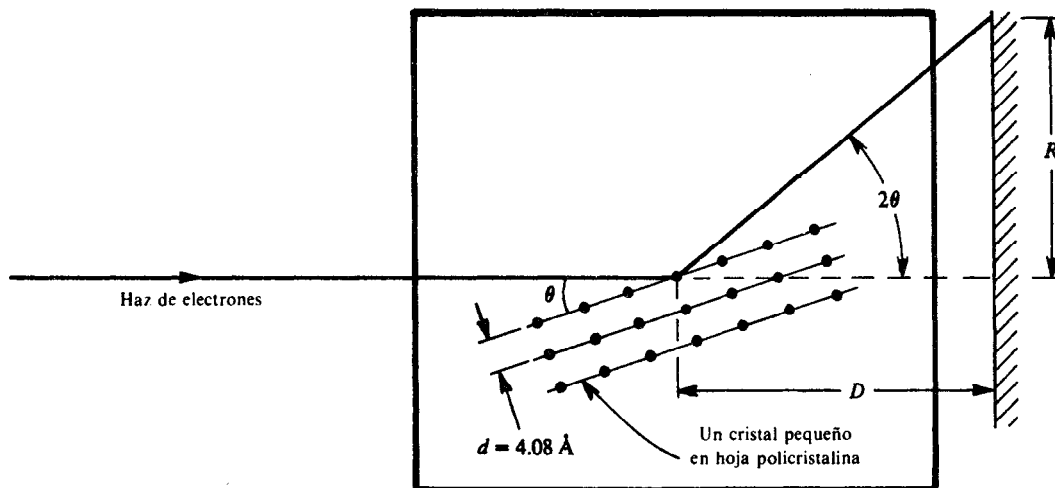


Fig. 16-3

- 16.4. Un material cristalino tiene un conjunto de planos de Bragg separados una distancia de 1.1 Å. ¿Cuál es la reflexión de Bragg de orden máximo para neutrones de 2 eV?

La longitud de onda de los neutrones es

$$\lambda = \frac{h}{m_0v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K}} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{2(940 \times 10^6 \text{ eV})(2 \text{ eV})}} = 0.202 \text{ \AA}$$

El máximo ángulo que puede lograrse es de 90° . Entonces, por la ley de Bragg,

$$2(1.1 \text{ \AA}) \sin 90^\circ = n(0.202 \text{ \AA}) \quad \text{ó} \quad n = 10.89$$

Si n es un número entero, el orden máximo es $n = 10$.

- 16.5.** Para obtener neutrones monoenergéticos de un haz de neutrones que sale de un reactor se utiliza un cristal grande, cuya distancia entre los planos de Bragg es de 1.1 \AA . Si el ángulo de Bragg es de 30° , ¿cuál es la energía de los neutrones con este ángulo para una reflexión de primer orden?

$$\lambda = 2d \sin \theta = 2(1.1 \text{ \AA}) \sin 30^\circ = 1.1 \text{ \AA}$$

La longitud de onda de los neutrones está relacionada con su energía cinética por

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0 c^2)K}} \quad \text{ó} \quad K = \frac{(hc)^2}{2(m_0 c^2)\lambda^2} = \frac{(12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{2(940 \times 10^6 \text{ eV})(1.1 \text{ \AA})^2} = 0.0676 \text{ eV}$$

- 16.6.** Si el cristal del problema 16.5 no es perfecto y presenta variaciones en las separaciones de los planos de Bragg en $\pm 0.01 \text{ \AA}$, calcular el ancho de energía en el haz difractado.

El diferencial de $n\lambda = 2d \sin \theta$ es $n \delta\lambda = 2 \delta d \sin \theta$, por lo tanto

$$\delta\lambda = \frac{2 \delta d \sin \theta}{n} = \frac{2(\pm 0.01 \text{ \AA}) \sin 30^\circ}{1} = \pm 0.01 \text{ \AA}$$

Como en el problema 16.5, $K \propto \lambda^{-2}$, entonces

$$\delta K = \frac{-2K}{\lambda} \delta\lambda = \frac{-2(0.0676 \text{ eV})}{1.1 \text{ \AA}} (\pm 0.01 \text{ \AA}) = \mp 1.23 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

- 16.7.** Calcular la distancia interatómica en un cristal de NaCl si la densidad del NaCl es $2.16 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y los pesos atómicos del sodio y el cloro son 23.00 y 35.46, respectivamente.

El peso molecular del NaCl es $23.00 + 35.46 = 58.46$. El número de moléculas por cada 58.46 kg de NaCl es

$$\frac{1 \text{ kmol}}{58.46 \text{ kg}} \times 6.025 \times 10^{26} \frac{\text{moléculas}}{\text{kmol}} = \frac{6.025 \times 10^{26} \text{ moléculas}}{58.46 \text{ kg}}$$

Puesto que hay dos átomos por molécula, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\text{número de átomos}}{\text{volumen}} &= \frac{\text{número de átomos}}{\text{masa}} \times \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{2 \times 6.025 \times 10^{26} \text{ átomos}}{58.46 \text{ kg}} \times 2.16 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ &= 4.45 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Para relacionar este valor con la distancia interatómica d , consideremos la celda unitaria del NaCl como se muestra en la figura 16-4 (no se han considerado diferencias entre los iones positivos de sodio, Na^+ y los iones negativos de cloro, Cl^-). El volumen del cubo es $(2d)^3$. El número de iones asignados al cubo es: 8 iones en las aristas, repartidos en 4 de los cubos; 6 iones en las caras, repartidos en 2 de los cubos y 1 ion en el centro. Así,

$$\text{número de iones} = 8\left(\frac{1}{8}\right) + 12\left(\frac{1}{4}\right) + 6\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 8$$

y

$$\frac{\text{número de iones}}{\text{volumen}} = \frac{8}{(2d)^3} = \frac{1}{d^3}$$

Igualando los resultados anteriores, tenemos

$$\frac{1}{d^3} = 4.45 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

ó

$$d = 2.82 \times 10^{-10} \text{ m} = 2.82 \text{ \AA}$$

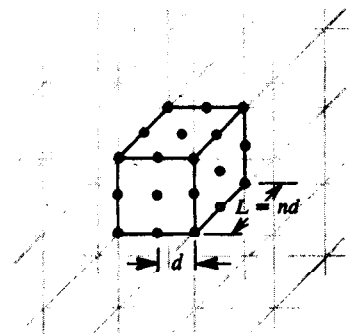


Fig. 16-4

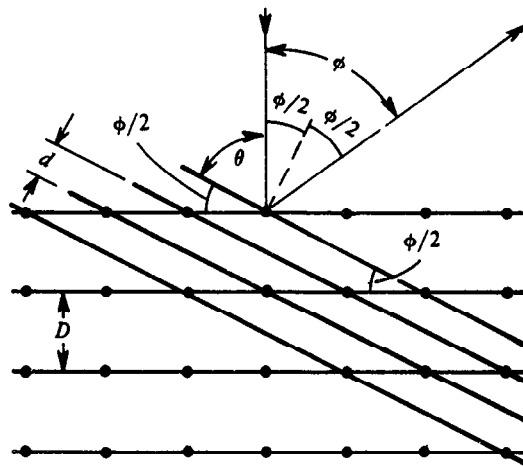


Fig. 16-5

- 16.8. En uno de sus experimentos, Davisson y Germer utilizaron electrones que incidían normalmente sobre una superficie de un cristal de níquel cortada paralelamente a los planos principales de Bragg. Observaron interferencia constructiva para un ángulo de 50.0° con la normal a la superficie. Hallar la longitud de onda asociada con el haz de electrones (la distancia interatómica del níquel es de 2.15 \AA).

Encontremos primero la relación entre el ángulo de dispersión ϕ con la normal y la distancia interatómica D . En la figura 16-5 se ve que $\theta + \phi/2 = 90^\circ$, por lo tanto

$$\text{sen } \theta = \cos \frac{\phi}{2}$$

En la misma figura se observa que la distancia d entre los planos de Bragg es

$$d = D \text{ sen } \frac{\phi}{2}$$

Reemplazando estos valores en la relación de Bragg, $2d \text{ sen } \theta = n\lambda$, y utilizando la fórmula del ángulo mitad,

$$2 \text{ sen } \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \text{sen } \phi$$

obtenemos

$$D \text{ sen } \phi = n\lambda$$

Para $n = 1$, se encuentra

$$(2.15 \text{ \AA}) \text{ sen } 50.0^\circ = (1)\lambda \quad \text{ó} \quad \lambda = 1.65 \text{ \AA}$$

- 16.9. En el experimento descrito en el problema 16.8, Davisson y Germer utilizaron electrones de 54.0 eV . Calcular el potencial de aceleración efectivo para el cristal de níquel.

La longitud de onda de de Broglie para electrones de 54 eV es

$$\lambda_d = \frac{h}{m_0 v} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 K}} = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0 c^2) K}} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{2(0.511 \times 10^6 \text{ eV})(54 \text{ eV})}} = 1.67 \text{ \AA}$$

Este valor es diferente al de la longitud de onda observada de 1.65 \AA . La energía cinética correspondiente a $\lambda = 1.65 \text{ \AA}$ se encuentra a partir de

$$\lambda = \frac{hc}{\sqrt{2(m_0c^2)K'}} \quad \text{ó} \quad K' = \frac{(hc)^2}{2(m_0c^2)\lambda^2} = \frac{(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{2(0.511 \times 10^6 \text{ eV})(1.65 \text{ \AA})^2} = 55.3 \text{ eV}$$

Por lo tanto, el potencial efectivo de aceleración es

$$V_e = 55.3 \text{ V} - 54.0 \text{ V} = 1.3 \text{ V}$$

Problemas suplementarios

- 16.10.** La distancia entre los núcleos de cierto cristal es 1.2 \AA . ¿Para qué ángulo tendrá lugar la reflexión de Bragg de primer orden para neutrones, cuya energía cinética es de 0.020 eV ? *Resp.* 57.4°
- 16.11.** Un haz de electrones de 0.1 eV se dispersa en una muestra desconocida. Si la reflexión de Bragg de primer orden aparece con un ángulo 28° , ¿cuál es la separación de los planos de Bragg? *Resp.* 0.963 \AA
- 16.12.** Sobre un cristal, cuya distancia interatómica es de 1.8 \AA inciden neutrones térmicos. Si se encuentra una reflexión de Bragg de primer orden en los planos principales de Bragg con un ángulo de 22° , ¿cuál es la energía cinética de los neutrones térmicos? *Resp.* $4.50 \times 10^{-2} \text{ eV}$
- 16.13.** Para el cristal del problema 16.2, ¿cuál sería la energía de los neutrones térmicos observados a 30° , si ésta fuese una reflexión de Bragg de segundo orden? *Resp.* $4.14 \times 10^{-2} \text{ eV}$
- 16.14.** Calcular el radio del patrón de difracción de segundo orden en los planos principales de Bragg, en el problema 16.3. *Resp.* 9.6 mm
- 16.15.** Un haz de neutrones con energía cinética de 0.020 eV incide sobre una muestra de KCl en polvo. El espaciamiento en la rejilla del KCl es de 3.14 \AA . ¿Cuál es el radio del círculo obtenido sobre una placa fotográfica plana, colocada 5 cm detrás del blanco, para reflexiones de primer orden en los planos de Bragg que se encuentran separados 3.14 \AA ? *Resp.* 3.85 cm
- 16.16.** ¿Cuál es el radio del círculo, debido a las reflexiones de segundo orden en los mismos planos de Bragg del problema 16.15? *Resp.* 28.9 cm

Capítulo 17

La interpretación probabilista de las ondas de De Broglie

Nos preguntamos qué es lo que ondula, cuando un objeto con masa, tal como un electrón, muestra propiedades ondulatorias. La interpretación probabilista que le imprimiremos, quizá incomode un poco al comienzo; en efecto, aún se debate en la actualidad. Sin embargo, con tal interpretación es posible dar explicación a muchos resultados experimentales que de otro modo no se entenderían.

17.1 UNA INTERPRETACION PROBABILISTA PARA LA RADIACION ELECTROMAGNETICA

Consideremos el patrón de interferencia logrado en un experimento de doble rendija. De acuerdo con la descripción ondulatoria, la intensidad I (energía por unidad de área en la unidad de tiempo) en un punto de la pantalla está dada por

$$I = \epsilon_0 c \mathcal{E}^2$$

donde \mathcal{E} es el valor del campo eléctrico en un punto dado, ϵ_0 es la permitividad del espacio vacío y c es la velocidad de la luz. Por otra parte, con el modelo de fotones, la intensidad en un punto de la pantalla es

$$I = h\nu N$$

donde $h\nu$ es la energía por fotón y N es el flujo de fotones (número de fotones por unidad de área en la unidad de tiempo) que golpea un punto de la pantalla.

No existe un método que permita predecir el punto de impacto de un fotón en la pantalla, para producir un único destello. No obstante, al encontrarse el patrón final formado por bandas brillantes y oscuras, un fotón tiene una alta *probabilidad* de llegar a una banda brillante y cero *probabilidad* de llegar a una banda oscura. El flujo N de fotones en un punto de la pantalla es, por lo tanto, una medida de la *probabilidad* de encontrar un fotón cerca de ese punto.

Puesto que $I = \epsilon_0 c \mathcal{E}^2 = h\nu N$, se concluye que $N \propto \mathcal{E}^2$. Luego, de acuerdo con la interpretación cuántica de la radiación electromagnética, la cantidad que oscila, es decir, el campo eléctrico \mathcal{E} , es aquella función cuyo cuadrado da la probabilidad de encontrar un fotón en un lugar dado.

17.2 UNA INTERPRETACION PROBABILISTA DE LA MATERIA

El modelo de interferencia discutido anteriormente podría obtenerse con ondas de materia en vez de ondas de luz. Para este caso, la interpretación probabilista basada en la dualidad onda-partícula de la luz se aplica directamente en la explicación de la dualidad onda-partícula de la materia. Así, con ondas de electrones, la cantidad que oscila con una longitud de onda de de Broglie $\lambda = h/mv$ es aquella *función de onda*, cuyo cuadrado da la probabilidad de encontrar un electrón en un lugar dado. Para reconciliar las descripciones ondulatoria y de partícula de materia, debemos abandonar la idea, según la cual, una partícula material puede localizarse con toda exactitud. En cambio podemos hablar de la probabilidad de encontrar una partícula en un lugar y en un tiempo dados, como se muestra en el problema 17.2.

La función de onda se designa generalmente por ψ . Para un fotón, la onda de de Broglie representada por ψ es una onda electromagnética; para un electrón u otro objeto material, ψ es una onda de de Broglie no electromagnética.

Problemas resueltos

- 17.1. Calcular el flujo de fotones asociado con un haz de luz monocromática de longitud de onda 3000 \AA e intensidad $3 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2$.

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{3 \times 10^{-7} \text{ m}} = 6.63 \times 10^{-19} \text{ J/fotón}$$

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{3 \times 10^{-14} \text{ J/s} \cdot \text{m}^2}{6.63 \times 10^{-19} \text{ J/fotón}} = 4.5 \times 10^4 \frac{\text{fotones}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} = 4.5 \frac{\text{fotones}}{\text{s} \cdot \text{cm}^2}$$

En promedio, 4.5 fotones incidirán sobre un cm^2 (por ejemplo, sobre una placa fotográfica) durante un período de 1 s. Desde luego, solamente puede observarse un número entero de fotones. Así, para un área de 1 cm^2 , podríamos observar 3 fotones ó 5 fotones en un intervalo de 1 s, pero nunca 4.5 fotones. Solamente si se toma un promedio sobre muchos intervalos, el número promedio de fotones puede aproximarse a 4.5. También para un intervalo de 1 s, los fotones incidentes pueden agruparse dentro de un área fija de 1 cm^2 . Solamente después de un largo período de tiempo, los fotones se aproximarán a una distribución uniforme.

- 17.2. Supongamos que el valor de h sea de $6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ en vez de $6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Se lanzan esferas de 66.25 gramos con velocidad de 5 m/s hacia el interior de una casa, a través de dos ventanas paralelas, altas y angostas, separadas una distancia de 0.6 m, de tal manera que en cada lanzamiento, la escogencia de la ventana se hace al azar. Calcular la separación entre las franjas que se formarían sobre una pared situada a 12 m detrás de las ventanas.

La longitud de onda de de Broglie para las esferas es

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(6.625 \times 10^{-2} \text{ kg})(5 \text{ m/s})} = 0.02 \text{ m}$$

De la teoría de la interferencia, los ángulos θ_n a las líneas de intensidad cero, en un modelo de interferencia de doble rendija, está dado por

$$d \sin \theta_n = \frac{2n+1}{2} \lambda \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La distancia y correspondiente se obtiene de la figura 17-1, como

$$y_n = L \tan \theta_n \approx L \sin \theta_n = L \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{d}$$

La distancia entre dos franjas adyacentes es

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_{n+1} - y_n = \frac{L\lambda}{2d} \{ [2(n+1) + 1] - (2n+1) \} \\ &= \frac{L\lambda}{d} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores en nuestro problema, tenemos

$$\Delta y = \frac{(12 \text{ m})(0.02 \text{ m})}{0.6 \text{ m}} = 0.4 \text{ m}$$

Este problema muestra la interpretación probabilista de las ondas de de Broglie. Cualquier esfera golpeará la pared en algún lugar, aunque ésta no sea determinable. A pesar de no poder predecir el lugar de impacto de las esferas en el modelo de interferencia, cada una tiene una alta probabilidad de llegar a un máximo, y cero probabilidad de llegar a un mínimo.

Este modelo de interferencia se obtiene experimentalmente contando el número de esferas que inciden en cada parte de la pared. Al comienzo del experimento, las esferas golpearán la pared en forma más o menos

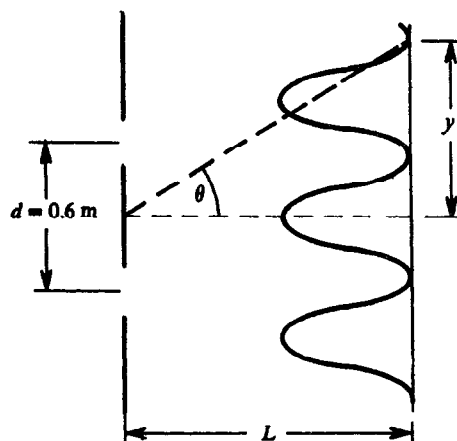


Fig. 17-1

esporádica. Solamente después de haber lanzado un elevado número de esferas a través de las ventanas se hará perceptible el patrón de interferencia, puesto que el número de choques aumentará en un sitio correspondiente a un máximo, mientras que el número de choques en un mínimo seguirá siendo cero.

- 17.3.** El movimiento unidimensional de una partícula de masa m está restringido a un segmento recto de longitud L . Utilizando argumentos basados en la interpretación ondulatoria de la materia, demuestre que la energía de la partícula solamente podrá tener valores discretos. Calcule estos valores.

Si la partícula está encerrada dentro de un segmento de recta, de $x = 0$ a $x = L$, la probabilidad de encontrar la partícula fuera de esta región debe ser cero. Luego, la función de onda ψ debe ser cero para $x \leq 0$ ó $x \geq L$, puesto que el cuadrado de ψ da la probabilidad de encontrar la partícula en algún lugar. Dentro de la región, la longitud de onda de ψ debe ser tal que ψ se haga nula en los límites $x = 0$ y $x = L$, de modo que pueda variar continuamente hacia el exterior de la región. De ahí que solamente sean posibles aquellas longitudes de onda para las cuales un número entero de medias longitudes de onda se acomode exactamente entre $x = 0$ y $x = L$, es decir, $L = n\lambda/2$, donde n es un número entero denominado *número cuántico*, cuyos valores son $n = 1, 2, 3, \dots$. De la relación de de Broglie $\lambda = h/p$, podemos ver que el momentum de la partícula sólo puede tener valores discretos dados por

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{nh}{2L}$$

Puesto que dentro de la región no actúan fuerzas sobre la partícula, su energía potencial es constante y podemos igualarla a cero. Luego la energía de la partícula será solamente de tipo cinético y tendrá los valores discretos dados por

$$E = K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{(nh/2L)^2}{2m}$$

es decir,

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Este sencillo problema muestra las características más notables de la interpretación probabilista de la materia; es decir, que la energía de un sistema ligado, solamente puede tener valores discretos, sin que admita el valor cero.

Problemas suplementarios

- 17.4.** Resuelva el problema 17.1 para $\lambda = 4000 \text{ \AA}$ y una intensidad de $5 \times 10^{-15} \text{ W/m}^2$.
Resp. 1×10^4 fotones/s \cdot m²
- 17.5.** Supongamos que en el problema 17.3 la partícula es un electrón confinado en un segmento de recta de longitud $L = 5 \text{ \AA}$ (lo que corresponde a dimensiones atómicas). Calcular la energía mínima. *Resp.* 1.5 eV
- 17.6.** Calcular la energía mínima según el problema 17.3, para una partícula macroscópica de masa 0.1 miligramo confinada en un segmento de recta de longitud $L = 0.1 \text{ mm}$. *Resp.* $3.43 \times 10^{-34} \text{ eV}$

Capítulo 18

El principio de incertidumbre de Heisenberg

18.1 MEDICIONES E INCERTIDUMBRE

Supongamos que se desea encontrar la posición de un cuerpo material, tal como un electrón. Con el fin de medir la posición del cuerpo se efectúa cierto tipo de experimento. Podemos, por ejemplo, colocar una ranura en la posible trayectoria del cuerpo que se mueve paralelo al eje de y con una energía conocida, como se muestra en la figura 18-1. Si aparece una señal hecha por la partícula sobre una pantalla colocada detrás de la ranura, podemos asegurar que el cuerpo atravesó la ranura. Por lo tanto, dentro del ancho d de la ranura hemos encontrado la localización en x de la partícula. En otras palabras, hemos medido la posición en x de la partícula, en el momento de entrar a la ranura, con una *incertidumbre* Δx dada por $\Delta x = d$. Mientras más pequeña sea la ranura, menor será la incertidumbre en la posición x del cuerpo y, por lo tanto, mayor será la exactitud con que se conozca la posición.

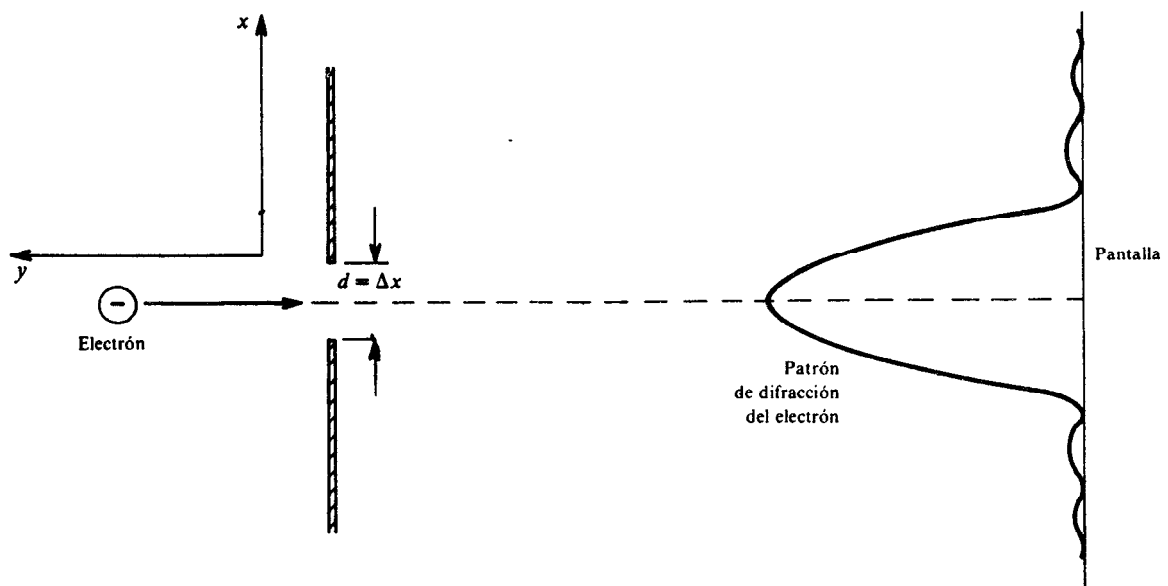


Fig. 18-1

Sabemos que la partícula se difracta al pasar por la ranura, debido al comportamiento ondulatorio de la materia. Sin embargo, aunque no sea posible predecir el lugar de la pantalla donde incide el electrón, el haber golpeado la pantalla en *algún lugar*, nos indica que ha atravesado la ranura.

El proceso de difracción produce un efecto sobre el momentum de la partícula. Antes de que la partícula haya atravesado la ranura, su posición era completamente desconocida, pero su momentum era conocido, tanto en magnitud (puesto que tenía energía conocida), como en dirección (perpendicular a la ranura). Después de atravesar la ranura, con lo cual se determina su posición, la componente en x , p_x , de su

momentum ya no valdrá cero, debido a que la partícula se moverá hacia algún punto arbitrario en el patrón de difracción. Y como no se conoce exactamente el lugar de incidencia del electrón sobre la pantalla, existirá la correspondiente incertidumbre Δp_x en la componente en x de su momentum al paso por la ranura.

Un análisis (problema 18.11) muestra que la incertidumbre Δp_x puede hacerse tan pequeña como queramos al *aumentar* el ancho d de la ranura. ¡Pero al aumentar el ancho de la ranura aumenta también la incertidumbre en la posición de la partícula!

De lo anterior se deduce que, con un único experimento, la incertidumbre en la posición x y el momentum en x de una partícula no puede reducirse arbitrariamente; la exactitud de una de estas cantidades sólo puede lograrse disminuyendo la exactitud de la otra.

18.2 LA RELACION DE INCERTIDUMBRE PARA POSICION Y MOMENTUM

El ejemplo anterior ilustra el *principio de incertidumbre de Heisenberg*, expuesto por primera vez en 1927 por W. Heisenberg. Un análisis mecánico cuántico muestra que para todo tipo de experimento, las incertidumbres Δx y Δp_x estarán siempre relacionadas por

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Esta relación es válida, tanto teórica como experimentalmente.

18.3 LA RELACION DE INCERTIDUMBRE PARA ENERGIA Y TIEMPO

La relación de incertidumbre de Heisenberg puede formularse para otras variables conjugadas. Así, en un experimento realizado para medir la energía E de un cuerpo transcurre un intervalo de tiempo Δt . Un análisis muestra que la incertidumbre en la energía ΔE se relaciona con el intervalo de tiempo durante el cual se ha medido la energía, así:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

De tal modo que la energía de un cuerpo puede conocerse con toda exactitud ($\Delta E = 0$) solamente si la medida se efectúa durante un intervalo de tiempo infinito ($\Delta t = \infty$).

El principio de incertidumbre de Heisenberg tiene una importante consecuencia en sistemas como el de átomos excitados, que en promedio, duran un intervalo finito, llamado *tiempo de vida medio* τ . Puesto que el tiempo de vida medio limita la duración del tiempo, es necesario efectuar las medidas de energía del sistema antes de su decaimiento. Estos sistemas tienen un mínimo natural en la incertidumbre de la energía, dado por $\Delta E = h/(4\pi\tau)$.

18.4 EL PRINCIPIO DE COMPLEMENTARIEDAD

El principio de incertidumbre muestra que es imposible medir en un solo experimento, variables conjugadas (v.g. p_x y x ; E y t) con absoluta precisión. Como consecuencia, no es posible medir en el mismo experimento los aspectos ondulatorio y corpuscular de la materia. Supongamos, por ejemplo, que se diseña un experimento para medir las propiedades de partícula de un cuerpo. Entonces, necesariamente en este experimento Δx y Δt deben ser cero, puesto que una partícula, por definición, puede ubicarse con absoluta precisión en cualquier momento. El momentum y la energía y con ello los aspectos ondulatorios ($\lambda = h/p$, $\nu = E/h$), serán completamente desconocidos de acuerdo con el principio de incertidumbre. Así, cuando se muestran los aspectos de partícula de la materia, la naturaleza ondulatoria necesariamente se suprime. De igual manera, si los aspectos ondulatorios son medidos con exactitud, es decir, $\Delta\lambda$ y $\Delta\nu$, son cero y, por lo tanto, Δp y ΔE , también lo serán, los aspectos de partícula no serán observados.

La imposibilidad para observar al mismo tiempo los aspectos de onda y de partícula de la materia, explican el *principio de complementariedad*, enunciado por N. Bohr en 1928. Los aspectos corpusculares y ondulatorio de la materia se complementan mutuamente, puesto que ambas descripciones son necesarias para entender completamente las propiedades de la materia, aunque ambos aspectos no sean observados simultáneamente.

Problemas resueltos

- 18.1.** Supongamos que el momentum de una partícula puede medirse con una exactitud de una parte en cada mil. Encontrar la mínima incertidumbre en la posición de la partícula, si se trata de (a) una masa de 5×10^{-3} kg que se mueve con velocidad de 2 m/s, (b) un electrón que se mueve con una velocidad de 1.8×10^8 m/s.

$$\frac{\Delta p}{p} = 10^{-3} \quad \text{ó} \quad \Delta p = 10^{-3} p = 10^{-3} m v$$

Entonces, de $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$,

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p} = \frac{h}{4\pi 10^{-3} m v} \quad (I)$$

$$(a) \quad \Delta x \geq \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi 10^{-3} (5 \times 10^{-3} \text{ kg})(2 \text{ m/s})} = 5.28 \times 10^{-30} \text{ m} = 5.28 \times 10^{-20} \text{ Å}$$

La mínima incertidumbre es 5.28×10^{-20} Å, valor que es claramente imposible de medir.

(b) La masa relativista del electrón $m = m_0 / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$, debe reemplazarse en (I).

$$\Delta x \geq \frac{h \sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{4\pi 10^{-3} m_0 v} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \sqrt{1 - (0.6)^2}}{4\pi 10^{-3} (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.8 \times 10^8 \text{ m/s})} = 2.57 \times 10^{-10} \text{ m} = 2.57 \text{ Å}$$

La mínima incertidumbre es 2.57 Å.

- 18.2.** ¿Cuál es la incertidumbre en la posición de un fotón de longitud de onda 3000 Å, si su longitud de onda se conoce con una precisión de una parte en un millón?

El momentum del fotón está dado por

$$p = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{(3 \times 10^3 \text{ Å})c} = 4.13 \frac{\text{eV}}{c}$$

La incertidumbre en el momentum del fotón es

$$\Delta p = \left| -\frac{h}{\lambda^2} \right| \Delta \lambda = p \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = p \times 10^{-6} = 4.13 \times 10^{-6} \frac{\text{eV}}{c}$$

con lo cual

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p} = \frac{hc}{4\pi c \Delta p} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{4\pi c (4.13 \times 10^{-6} \text{ eV}/c)} = 239 \times 10^6 \text{ Å} = 23.9 \text{ mm}$$

- 18.3.** ¿Cuáles la mínima incertidumbre en la energía de un átomo en cierto estado, si un electrón permanece en dicho estado durante 10^{-8} s?

El tiempo disponible para medir la energía es 10^{-8} s. Luego, de $\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$,

$$\Delta E \geq \frac{h}{4\pi \Delta t} = \frac{hc}{4\pi c \Delta t} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{4\pi (3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-8} \text{ s})(10^{10} \text{ Å/m})} = 0.329 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

La mínima incertidumbre en la energía de un estado $\Gamma = h/(4\pi\tau)$, donde τ es el tiempo de vida medio del estado excitado, se denomina *ancho natural* del estado. Para este problema, el tiempo de vida media es 10^{-8} s y el ancho natural es 0.329×10^{-7} eV.

- 18.4.** La medida del ancho de una línea espectral de 4000 Å de longitud de onda es 10^{-4} Å. ¿Cuál es el tiempo promedio durante el cual el sistema atómico permanece en el correspondiente estado energético?

Del problema 18.3, $\tau = h/(4\pi\Gamma)$, donde $\Gamma = \Delta E$ es la incertidumbre en la energía correspondiente a $\Delta\lambda = 10^{-4}$ Å. Como $E = hc/\lambda$,

$$|\Delta E| = \frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

y

$$\tau = \frac{h}{4\pi \left(\frac{hc}{\lambda^2} \Delta\lambda \right)} = \frac{\lambda^2}{4\pi c \Delta\lambda} = \frac{(4 \times 10^{-7} \text{ m})^2}{4\pi (3 \times 10^8 \text{ m/s})(10^{-14} \text{ m})} = 4.24 \times 10^{-9} \text{ s}$$

Obsérvese que la constante de Planck no aparece en la expresión final.

- 18.5.** Supongamos que la incertidumbre en el momentum de una partícula sea igual a su momentum. ¿Cuál será la mínima incertidumbre en la posición de la partícula, expresada en términos de su longitud de onda de de Broglie?

Tenemos que $\Delta p = p$, por lo tanto

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \Delta p} = \frac{h}{4\pi p} = \frac{\lambda}{4\pi}$$

puesto que la longitud de onda de de Broglie de una partícula es $\lambda = h/p$. Luego la mínima incertidumbre en la posición es $\lambda/4\pi$.

- 18.6.** A partir de la relación $\Delta p \Delta x \geq h/4\pi$, demuestre que para una partícula que se mueve en una circunferencia, $\Delta L \Delta \theta \geq h/4\pi$. La cantidad ΔL es la incertidumbre en el momentum angular y $\Delta \theta$ es la incertidumbre en el ángulo.

Puesto que la partícula se mueve a lo largo de una circunferencia, el principio de incertidumbre se aplicará en la dirección tangente a la misma, Así,

$$\Delta p_s \Delta s \geq \frac{h}{4\pi}$$

donde s se mide a lo largo de la circunferencia. El momentum angular en función del momentum lineal es

$$L = mvR = p_s R$$

luego, $\Delta p_s = \Delta L/R$. El desplazamiento angular en función de la longitud de arco y el radio es $\theta = s/R$; por lo tanto, $\Delta s = R \Delta \theta$. Entonces

$$\Delta p_s \Delta s = (\Delta L/R)(R \Delta \theta) = \Delta L \Delta \theta \geq h/4\pi$$

Para un estado de momentum angular fijo (v.g. un electrón en una órbita de Bohr, que se estudiará en el capítulo 19), la incertidumbre en el momentum angular, ΔL , es cero. Por consiguiente, la incertidumbre en la posición angular, $\Delta \theta$, es infinita, con lo cual se hace indeterminada la posición de la partícula en la órbita.

- 18.7.** Si suponemos que $E = \frac{1}{2} mv^2$ para una partícula que se mueve en línea recta, demostrar que $\Delta E \Delta t \geq h/4$, donde $\Delta t = \Delta x/v$.

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$$

Tomando diferenciales en ambos lados de esta ecuación, obtenemos

$$\Delta E = \frac{p \Delta p}{m} = \frac{mv \Delta p}{m} = v \Delta p$$

Pero $\Delta p \Delta x \geq h/4\pi$,

$$\frac{\Delta E}{v} \Delta x \geq \frac{h}{4\pi} \quad \text{ó} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

- 18.8.** Una partícula de masa m está obligada a moverse en un segmento de recta de longitud L . Utilizando argumentos basados en el principio de incertidumbre, calcular el valor de la energía mínima que puede tener la partícula.

Puesto que la partícula debe estar en algún lugar en el segmento dado, la incertidumbre en su posición, Δx , no puede ser mayor que L . Si igualamos Δx a L , la relación de incertidumbre $\Delta x \Delta p_x \geq h/4\pi$ implica que la incertidumbre en el momentum será $\Delta p_x \geq h/4\pi L$. Estamos buscando el menor valor posible de energía, y por lo tanto el menor valor posible de $|p_x|$, ya que $K = p_x^2/2m$. Identificamos la incertidumbre en $|p_x|$ con la de p_x , y suponemos que el intervalo de incertidumbre es simétrico alrededor de $|p_x|$. Entonces (ver figura 18-2)

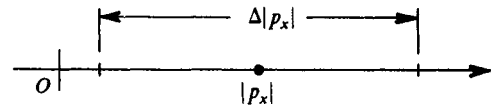


Fig. 18-2

$$|p_x| - \frac{1}{2}\Delta|p_x| \geq 0 \quad \text{ó} \quad |p_x| \geq \frac{1}{2}\Delta|p_x| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{h}{4\pi L} \right) = \frac{h}{8\pi L}$$

El mínimo valor de p_x es $h/8\pi L$, y

$$K_{\min} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{8\pi L} \right)^2 = \frac{h^2}{128\pi^2 m L^2}$$

Teniendo en cuenta lo poco elaborado de nuestro argumento, este valor concuerda razonablemente bien con el valor

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2}$$

del problema 17.3. El resultado muestra una vez más que los sistemas ligados no pueden tener energía cero, cuando se tiene en cuenta el principio de incertidumbre.

- 18.9.** Calcular la energía cinética mínima de un neutrón en un núcleo de 10^{-14} m de diámetro.

Es el mismo caso del problema 18.8, con L igual al diámetro del núcleo. Así,

$$K_{\min} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h}{8\pi L} \right)^2 = \frac{1}{2(mc^2)} \left(\frac{hc}{8\pi L} \right)^2 = \frac{1}{2(940 \text{ MeV})} \left[\frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{8\pi(10^{-4} \text{ \AA})} \right]^2 = 0.013 \text{ MeV}$$

- 18.10.** Si un electrón estuviera en el núcleo del átomo del problema 18.9, ¿cuál sería su energía cinética mínima?

Para un electrón es necesario un cálculo relativista. Como en el problema 18.8, la mínima magnitud del momentum es

$$|p|_{\min} = \frac{h}{8\pi L} = \frac{h}{8\pi(10^{-4} \text{ \AA})}$$

Entonces:

$$(K_{\min} + E_0)^2 = (|p|_{\min} c)^2 + E_0^2$$

$$(K_{\min} + 0.511 \text{ MeV})^2 = \left[\frac{12.4 \times 10^{-3} \text{ MeV} \cdot \text{\AA}}{8\pi(10^{-4} \text{ \AA})} \right]^2 + (0.511 \text{ MeV})^2$$

Resolviendo, $K_{\min} = 4.45 \text{ MeV}$.

Cuando por primera vez se observó la emisión de electrones (rayos β) de los núcleos, se creyó que los electrones se encontraban dentro del núcleo. Las energías de los electrones emitidos eran a menudo de unos pocos centenares de keV y no del mínimo 4 MeV predicho en el cálculo anterior. Se concluye que los electrones no son partes constitutivas del núcleo. (Ver también problema 26.1)

- 18.11.** La posición de una partícula se mide al paso de ésta por una ranura de ancho d . Hallar la correspondiente incertidumbre inducida en el momentum de la partícula.

Cuando un haz de ondas monocromáticas de longitud de onda λ pasa a través de una ranura de ancho d , se obtiene un patrón de difracción sobre una pantalla, como el que se indica en la figura 18-3. La posición del primer punto de intensidad cero se encuentra a partir de la teoría de la difracción, cuando $\sin \alpha = \lambda/d$.

Debido a su onda de de Broglie asociada, cuya longitud de onda es $\lambda = h/p$, la partícula sufrirá una difracción al paso por la ranura y en consecuencia adquirirá un momentum desconocido en la dirección x . Aunque no conozcamos el sitio exacto del choque de la partícula sobre la pantalla, el lugar más probable para que esto ocurra se encuentra dentro de la región central del modelo de difracción. Por lo tanto, es lógico pensar que la componente en x del momentum de la partícula tenga un valor entre 0 y $p \sin \alpha$; es decir,

$$\Delta p_x = p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d}$$

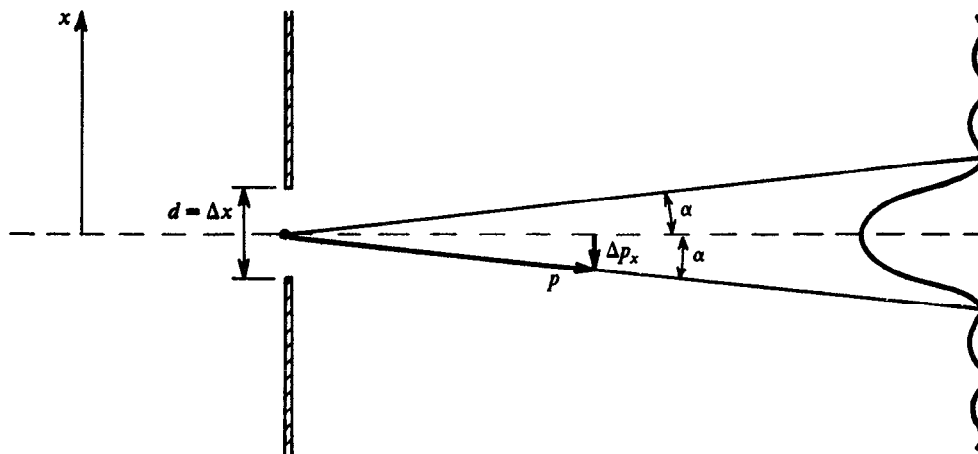


Fig. 18-3

Esta incertidumbre puede hacerse tan pequeña como se desee aumentando d . Sin embargo, puesto que $d = \Delta x$ la incertidumbre en la posición de la partícula, vemos que

$$\Delta p_x \Delta x = h$$

en concordancia con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

- 18.12.** Se desea medir la posición y el momentum de un electrón mediante observaciones hechas con un microscopio. Analice por completo el proceso de observación para demostrar que se obtienen resultados que armonizan con el principio de incertidumbre.

Cuando la luz es dispersada por el electrón en el proceso de observación, el momentum de éste, que tratamos de medir, se verá afectado debido a que la luz incidente es portadora de momentum. Por consiguiente, consideramos que el experimento se realiza con la más pequeña cantidad posible de luz, esto es, con un solo fotón.

Cuando la luz reflejada por la partícula, pasa a través de la lente objetivo de un microscopio, se produce un patrón de difracción en el sitio del ojo (o de la placa fotográfica). Por lo tanto, el patrón observado con luz de intensidad normal, formada por muchos fotones, será un patrón "difuso" en vez de un punto fino y preciso. La teoría de la difracción de la luz establece que el diámetro del disco central del patrón de difracción, está dado aproximadamente por

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

donde λ es la longitud de onda de la luz y 2α es el ángulo subtendido por el objetivo del microscopio hasta la partícula, como se muestra en la figura 18-4. Cuando en nuestro experimento observamos un único fotón, nos atrevemos a asegurar que solamente habrá llegado a algún lugar en el disco central del modelo de difracción. Por lo tanto, la incertidumbre en la posición del electrón puede tomarse como

$$\Delta x = d = \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

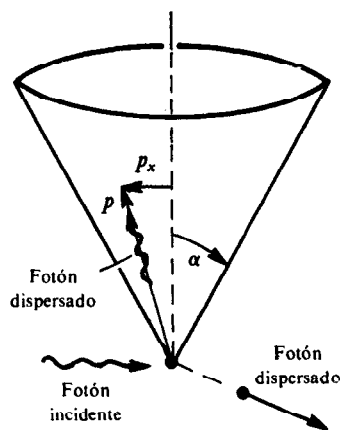


Fig. 18-4

La incertidumbre en la posición puede hacerse tan pequeña como queramos, utilizando una longitud de onda lo suficientemente pequeña.

En el proceso de dispersión parte del momentum del fotón puede ser transferido al electrón. Si conociéramos exactamente el momentum del fotón dispersado, sería relativamente fácil devolvernos para encontrar cómo fue afectado el momentum original del electrón. Sin embargo, ya que todo lo que sabemos es que el fotón dispersado entró a la lente objetivo en algún lugar, su componente en x del momentum podrá tener un valor entre 0 y $p \sin \alpha$, donde $p = h/\lambda$, es el momentum del fotón. Luego, cuando finalmente medimos el momentum del electrón, el valor de la componente en x de su momentum tendrá una incertidumbre dada por

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

Podemos hacer Δp_x tan pequeño como queramos, tomando λ lo suficientemente grande, pero entonces el Δx correspondiente se tornará más grande. Efectuando el producto de estas dos incertidumbres, obtenemos

$$\Delta x \Delta p_x = h$$

lo cual está en consonancia con el principio de incertidumbre de Heisenberg.

Problemas suplementarios

- 18.13.** Supongamos que la componente en x de la velocidad con que se mueve una masa de 2×10^{-4} kg se ha medido con una exactitud de $\pm 10^{-6}$ m/s. ¿Cuál será entonces el límite de la exactitud con que podemos localizar la partícula a lo largo del eje x ? *Resp.* 1.32×10^{-25} m
- 18.14.** Repita el problema 18.13 para un electrón. *Resp.* 29.0 m
- 18.15.** Repita el problema 18.2 para un fotón de rayos gamma de longitud de onda 10^{-5} Å. *Resp.* 0.796 Å
- 18.16.** ¿Cuál es la mínima incertidumbre en la energía de un estado excitado de un sistema si, en promedio, permanece en ese estado durante 10^{-11} s? *Resp.* 3.29×10^{-5} eV
- 18.17.** Si en el problema 18.3, la transición del estado en que se encuentra el átomo al estado estacionario, corresponde a 3.39 eV, encuentre la mínima incertidumbre en la longitud de onda del fotón emitido. *Resp.* 3.55×10^{-5} Å

- 18.18.** Si el ancho de energía de un estado excitado de un sistema es de 1.1 eV, ¿cuál es el promedio de duración de ese estado? *Resp.* 2.99×10^{-16} s
- 18.19.** Si el nivel de energía de excitación del estado del problema 18.18 es de 1.6 keV, ¿cuál es la mínima incertidumbre en la longitud de onda del fotón emitido cuando el estado excitado decaiga? *Resp.* 5.33×10^{-3} Å
- 18.20.** Si la incertidumbre en la energía de un estado nuclear es de 33 keV, ¿cuál es su tiempo de promedio de vida? *Resp.* 9.97×10^{-21} s
- 18.21.** Si la incertidumbre en la longitud de onda de un fotón es de una parte en un millón, hallar el mínimo valor de la incertidumbre en su posición si la longitud de onda del fotón es (a) 3000 Å, (b) 0.5 Å y (c) 2×10^{-4} Å.
Resp. (a) 2.39 cm; (b) 3.98×10^4 Å; (c) 15.9 Å
- 18.22.** ¿Cuál es la máxima longitud de onda del fotón con el que se puede observar un objeto de 0.5 Å?
Resp. 0.5 Å
- 18.23.** ¿Cuál es la energía más pequeña de un electrón con el que puedan hacerse las mediciones del objeto del problema 18.22? *Resp.* 602 eV
- 18.24.** Para el objeto del problema 18.22, ¿cuál es la mínima energía que debe tener un protón con el que puedan efectuarse las medidas? *Resp.* 0.328 eV
- 18.25.** ¿Cuál sería la energía mínima de un fotón que estuviera en el núcleo del átomo del problema 18.9?
Resp. $\frac{hc}{8\pi d} = 4.9$ MeV

Capítulo 19

El átomo de Bohr

19.1 EL ESPECTRO DEL HIDROGENO

A fines del siglo pasado se habían realizado muchos trabajos experimentales sobre el análisis del espectro discreto de la radiación emitida al producir descargas eléctricas en los gases. De todos los átomos, el más liviano y más sencillo es el del hidrógeno, compuesto por un núcleo y un electrón. No fue motivo de sorpresa por aquel entonces la demostración, mediante medidas espectroscópicas muy exactas, según la cual el hidrógeno presentaba el espectro más simple entre todos los elementos. Se encontró que las diferentes líneas en las regiones visibles y no visibles, estaban sistemáticamente distribuidas en varias series. En forma asombrosa se encontró que *todas* las longitudes de onda del átomo de hidrógeno se obtienen mediante una relación empírica sencilla, conocida como la *fórmula de Rydberg*:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad R = 1.0967758 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$$

donde $n_l = 1$ y $n_u = 2, 3, 4 \dots$ da la *serie de Lyman* (región ultravioleta)
 $n_l = 2$ y $n_u = 3, 4, 5 \dots$ da la *serie de Balmer* (región visible)
 $n_l = 3$ y $n_u = 4, 5, 6 \dots$ da la *serie de Paschen* (región infrarroja)
 $n_l = 4$ y $n_u = 5, 6, 7 \dots$ da la *serie de Brackett* (región del infrarrojo lejano)

y así, sucesivamente, para otras series que se encuentran aun más lejos del infrarrojo.

19.2 LA TEORIA DE BOHR DEL ATOMO DE HIDROGENO

En 1913 Niels Bohr desarrolló una teoría física del átomo de hidrógeno a partir de la cual se podía deducir la fórmula de Rydberg. El modelo atómico de Bohr para el hidrógeno se basa en un sistema planetario en donde un electrón liviano cargado negativamente gira alrededor de un núcleo pesado y con carga positiva. La fuerza que mantiene al electrón en su órbita es la fuerza atractiva de Coulomb

$$F = k \frac{Ze^2}{r^2} \quad k = 9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

con $Z = 1$ para el hidrógeno. Un cálculo clásico directo (problema 19.14) muestra que la velocidad orbital del electrón se relaciona con el radio de su órbita, considerada por Bohr como circular, así

$$v^2 = \frac{kZe^2}{mr} \quad (19.1)$$

donde m es la masa del electrón y la energía total del electrón (cinética + potencial) está dada por

$$E = - \frac{kZe^2}{2r} \quad (19.2)$$

Ahora llegamos al punto en el cual el modelo de Bohr y el clásico difieren radicalmente. (La presentación que sigue, basada en ondas de de Broglie, difiere de la aproximación realmente empleada por Bohr. Fue la capacidad de la hipótesis de de Broglie para llegar en forma natural a las orbitas de Bohr, en vez del camino original y arbitrario de Bohr, lo que condujo a que la teoría de de Broglie se tomara más en serio.) Puesto que el electrón se mueve en su órbita con momentum lineal mv , tendrá una longitud de onda de de Broglie asociada con él, dada por $\lambda = h/mv$. Ahora, podemos asociarle una órbita circular solamente si la circunfe-

rencia de la órbita es igual a un número entero de longitudes de onda. En este caso, Bohr postuló que únicamente son permitidas aquellas órbitas que satisfagan la relación

$$n\lambda = \frac{nh}{mv} = 2\pi r \quad \text{ó} \quad mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad (19.3)$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$. La cantidad $L = mvr$ es el momentum angular del electrón que se mueve en su órbita circular. Se observa, pues, que en la teoría de Bohr, el *momentum angular del electrón está cuantizado*. El número entero n se denomina *número cuántico principal*.

Al resolver las ecuaciones (19.1), (19.2) y (19.3) para las tres incógnitas r , E y v , encontramos las siguientes cantidades cuantizadas:

$$r_n = \frac{n^2 r_1^\circ}{Z} \quad r_1^\circ = \frac{h^2}{4\pi^2 k m e^2} \quad (19.4)$$

$$E_n = -\frac{Z^2 E_1^\circ}{n^2} \quad E_1^\circ = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} \quad (19.5)$$

$$v_n = \frac{Z v_1^\circ}{n} \quad v_1^\circ = \frac{2\pi k e^2}{h} \quad (19.6)$$

En los estados estables del átomo prescritos en (19.4), (19.5) y (19.6) se supone que el electrón no irradia. El proceso de radiación se discute en la sección 19.3. El estado de energía mínima ($n = 1$) se denomina *estado fundamental*.

Se observa que las cantidades r_1° , E_1° , y v_1° sólo dependen de constantes fundamentales de la naturaleza, tales como m , e , k y h . Cuando se introducen los valores numéricos de estas constantes, (problemas 19.33 a 19.35), se obtiene

$$r_1^\circ = 0.529 \text{ Å} \quad E_1^\circ = 13.58 \text{ eV} \quad v_1^\circ = \frac{c}{137.0}$$

Obsérvese que para el hidrógeno ($Z = 1$), $r_1^\circ = r_1$, $E_1^\circ = -E_1$, y $v_1^\circ = v_1$. Los valores 0.529 Å y 13.58 eV se aproximan mucho a los valores experimentales obtenidos para el radio y la energía de ionización del átomo de hidrógeno.

19.3 EMISION DE RADIACION EN LA TEORIA DE BOHR

La teoría clásica de la electrodinámica predice la emisión de una radiación para una carga que describe una órbita (en consecuencia, una carga acelerada). La frecuencia de esta radiación es igual a la frecuencia de revolución de la carga en la órbita. Ya hemos visto en el efecto fotoeléctrico que la electrodinámica clásica debe modificarse a escala atómica, cuando se trata de *absorción* de radiación electromagnética. En forma análoga, Bohr prefirió modificar la electrodinámica clásica a escala atómica, cuando se trata de *emisión* de radiación electromagnética.

Bohr postuló que un átomo emite radiación solamente cuando el electrón, inicialmente en una de las órbitas estables permitidas donde $E = E_u$, cambie a otra órbita permitida con energía menor dada por $E = E_l$. La energía del fotón emitido será entonces igual a la diferencia entre las energías del electrón en las dos órbitas permitidas. Así, la longitud de onda del fotón emitido podrá calcularse a partir de

$$E_\gamma = h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_u - E_l \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc} (E_u - E_l) \quad (19.7)$$

Reemplazando los valores de las energías orbitales dadas por (19.5), obtenemos

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m Z^2}{h^3 c} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) = R_\infty Z^2 \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

con

$$R_\infty = \frac{2\pi^2 (ke^2)^2 (mc^2)}{(hc)^3} = 1.09737 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$$

En este análisis se ha considerado que el núcleo, cargado positivamente, tiene una masa tan grande comparada con la del electrón, que puede considerarse infinitamente pesado. Si se tiene en cuenta que la masa del núcleo es finita, el movimiento del sistema combinado electrón (m) y núcleo (M), separados una distancia r , alrededor del centro de masa ($mp = MP$, $r = \rho + P$) es equivalente al de una partícula de *masa reducida*

$$\mu = \frac{m}{1 + \frac{m}{M}} = \frac{M}{1 + \frac{M}{m}}$$

cuyo centro de masa describe órbitas de radio r . Para el hidrógeno $m/M = 1/1836$, valor éste que, utilizado para modificar la constante de Rydberg, da

$$R_H = \frac{R_\infty}{1 + (m/M)} = \frac{1.09737 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}}{1 + (1/1836)} = 1.0968 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$$

en armonía con el valor experimental $R = 1.0967758 \times 10^{-3} \text{ \AA}^{-1}$.

19.4 DIAGRAMAS DE NIVELES DE ENERGIA

Una forma adecuada para describir las transiciones entre estados permitidos consiste en los *diagramas de niveles de energía*. En éstos, los niveles de energía permitidos, dados por (19.5), son graficados, como se muestra en la figura 19-1 para $Z = 1$. Las transiciones se indican mediante flechas que van desde el estado de energía inicial, señalado con n_i , hasta el estado de energía final, señalado con n_f . Así, por ejemplo, las transiciones que dan lugar a la serie de Balmer se muestran en la figura 19-1 con flechas que terminan en $n_f = 2$. Las líneas en la serie de Balmer se denominan H_α , H_β , H_γ , etc., como se indica en la figura 19-1.

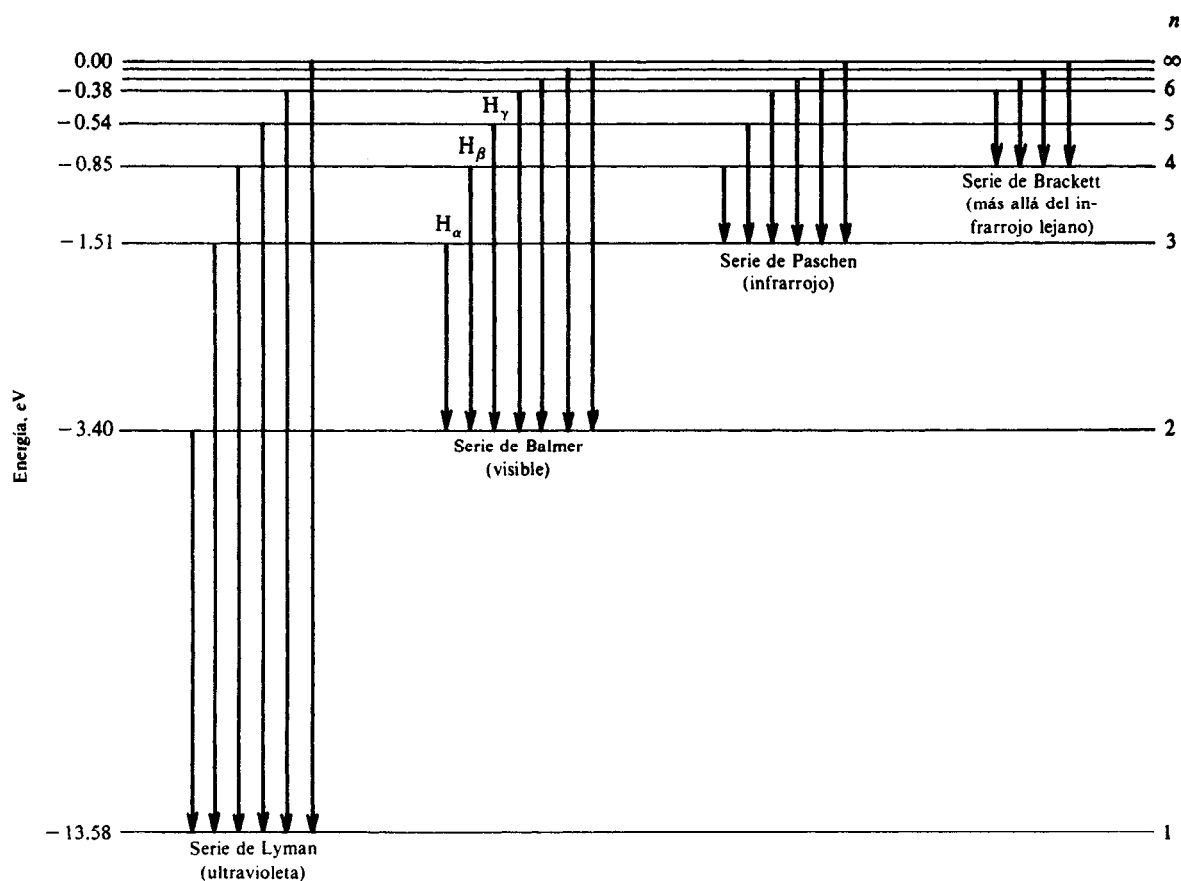


Fig. 19-1

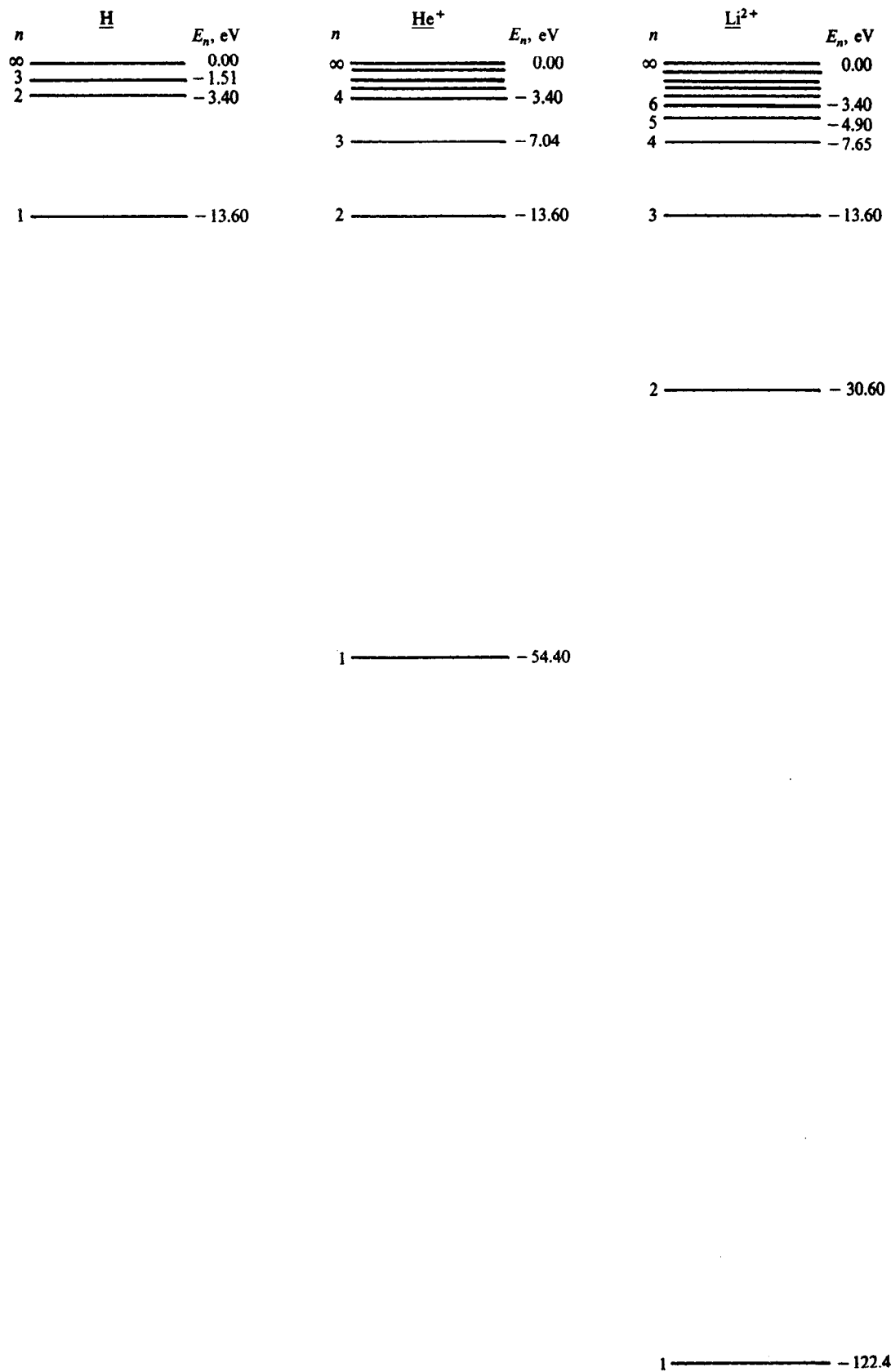


Fig. 19-2

19.5 ATOMOS HIDROGENOIDES

Un *átomo hidrogenoide* es aquél que se ha despojado de todo, excepto de uno de sus electrones. Así, átomos hidrogenoides son átomos de helio simplemente ionizados (He^+ , $Z = 2$), átomos de litio doblemente ionizados (Li^{2+} , $Z = 3$), átomos de berilio triplemente ionizados (Be^{3+} , $Z = 4$) y así, sucesivamente. Estos átomos se comportan en todo como el del hidrógeno, excepto en que la carga positiva del núcleo es Ze , donde Z es el número atómico. Las ecuaciones (19.1) a (19.7) son válidas para los átomos hidrogenoides con tal de que se utilice en ellas el valor adecuado de Z . La figura 19-2 muestra los niveles de energía para el H, He^+ y Li^{2+} .

19.6 ATOMOS MESONICOS μ Y MESONICOS π

En la explicación dada por Yukawa sobre fuerzas de enlace nucleares (es decir, interacciones fuertes), se pronosticó la existencia de una partícula llamada *mesón*, con masa en reposo 264 veces la masa en reposo de un electrón. Dos años después de esta predicción, en 1937, se descubrió una partícula con masa en reposo de 207 veces la masa del electrón. Sin embargo, en 1946, se demostró que este *mesón* μ no era la partícula que se había pronosticado; poco tiempo después se encontró la partícula de Yukawa, denominada *mesón* π .

Tanto el mesón π , como el mesón μ pueden tener carga negativa y, por lo tanto, tienen posibilidad de formar átomos hidrogenoides. Debido a su gran masa, las órbitas de Bohr para estas partículas son mucho menores que las órbitas del electrón. En efecto, para ciertos núcleos las órbitas están en realidad dentro de la distribución nuclear de carga (ver problema 19.21 a 19.25).

Problemas resueltos

19.1. Calcular, en Å, la longitud de onda más corta de la serie de Lyman del hidrógeno.

La longitud de onda en la serie de Lyman se obtiene con $n_i = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad n_u = 2, 3, 4, \dots$$

La máxima longitud de onda corresponde a $n_u = 2$:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda_{\text{máx}} = 1215 \text{ Å}$$

La mínima longitud de onda se consigue con $n_u = \infty$:

$$\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}} = 1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1} \left(1 - \frac{1}{\infty^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda_{\text{mín}} = 912 \text{ Å}$$

19.2. Calcular la longitud de onda de la segunda línea de la serie de Paschen para el hidrógeno.

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

La serie de Paschen está definida para $n_i = 3$, y la segunda línea corresponde a $n_u = 5$. Luego,

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda = 12,820 \text{ Å}$$

19.3. La máxima longitud de onda en la serie de Lyman para el hidrógeno es 1215 Å. ¿Cuál es la constante de Rydberg?

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

Para la serie de Lyman, $n_l = 1$; la máxima longitud de onda corresponde a $n_u = 2$.

$$\frac{1}{1215 \text{ Å}} = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) \quad \text{ó} \quad R = 1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$$

- 19.4.** Calcular las longitudes de onda del hidrógeno que se encuentran en el espectro visible (3800 Å a 7700 Å).

Las longitudes de onda para el hidrógeno están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

En el problema 19.1 se encontró que cuando $n_l = 1$, el rango de valores de longitudes de onda estaba entre 912 Å y 1215 Å, de tal manera que ninguno de estos valores se encuentra en la región visible. Para $n_l = 2$ la máxima longitud de onda corresponde a $n_u = 3$, con lo cual

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda = 6563 \text{ Å}$$

y la longitud de onda más corta corresponde a $n_u = \infty$, así

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda = 3646 \text{ Å}$$

Luego, algunas longitudes de onda de la serie de Balmer ($n_l = 2$) se encuentran en la región visible. Para determinar estas longitudes de onda, hagamos $\lambda = 3800 \text{ Å}$ y calculemos n_u .

$$\frac{1}{3.8 \times 10^3 \text{ Å}} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad \text{ó} \quad n_u = 9.9$$

Por lo tanto, las líneas en el espectro visible están dadas por

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad n_u = 3, 4, 5, \dots, 9$$

Puesto que la longitud de onda más corta de la serie de Paschen ($n_l = 3$) es

$$\frac{1}{\lambda} = (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty^2} \right) \quad \text{ó} \quad \lambda = 8200 \text{ Å}$$

las demás series darán lugar a líneas que se encuentran fuera del espectro visible.

- 19.5.** Calcular en unidades eV, el potencial de ionización del hidrógeno, E_1° .

$$E_1^\circ = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^2} = \frac{2\pi^2 (ke^2)^2 (mc^2)}{(hc)^2} = \frac{2\pi^2 (14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å})^2 (0.511 \times 10^6 \text{ eV})}{(12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å})^2} = 13.6 \text{ eV}$$

- 19.6.** Hallar la longitud de onda del fotón emitido cuando el átomo de hidrógeno sufre una transición de $n_u = 5$ a $n_l = 2$.

Del modelo de Bohr, los niveles de energía son $E_n = (-13.6 \text{ eV})/n^2$. Luego,

$$E_2 = -\frac{13.6 \text{ eV}}{2^2} = -3.40 \text{ eV} \quad E_5 = -\frac{13.6 \text{ eV}}{5^2} = -0.544 \text{ eV}$$

De los postulados de Bohr, la energía del fotón emitido es

$$E_\gamma = -0.544 \text{ eV} - (-3.40 \text{ eV}) = 2.86 \text{ eV}$$

La longitud de onda de este fotón está dada por

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2.86 \text{ eV}} = 4340 \text{ Å}$$

Este problema puede resolverse utilizando la fórmula de Rydberg,

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) = 1.097 \times 10^{-3} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2} \right)$$

Resolviendo, $\lambda = 4340 \text{ \AA}$.

- 19.7.** Hallar la energía de ionización del hidrógeno si la longitud de onda más corta en la serie de Balmer es de 3650 \AA .

La serie de Balmer se obtiene con $n_l = 2$. La mínima longitud de onda corresponde a $n_u = \infty$. En consecuencia, de $E_n = -E_1^\circ/n^2$, donde E_1° es la energía de ionización, tenemos

$$\frac{hc}{\lambda} = E_u - E_l = 0 - \left(-\frac{E_1^\circ}{4} \right) \quad \text{ó} \quad E_1^\circ = \frac{4hc}{\lambda} = \frac{4(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})}{3650 \text{ \AA}} = 13.6 \text{ eV}$$

- 19.8.** ¿Cuántos fotones diferentes pueden ser emitidos por átomos de hidrógeno que sufren transiciones desde el estado $n = 5$ al estado fundamental?

Podemos considerar el problema para un valor arbitrario de n . Si n_u y n_l , con $n_u > n_l$ es cualquier par de números enteros comprendidos entre 1 y n , es claro que en la transición del estado n al estado fundamental, existe por lo menos un camino que incluye la transición $n_u \rightarrow n_l$. Por lo tanto, el número de fotones es igual al de los posibles pares de números, así

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Para $n = 5$, hay $5(4)/2 = 10$ fotones.

El anterior razonamiento no es válido cuando existe "degeneración", es decir, cuando a dos pares diferentes de números cuánticos corresponde la misma diferencia de energía. En este caso el número de fotones diferentes es menor que $n(n-1)/2$.

- 19.9.** En una transición a un estado de energía de excitación de 10.19 eV , un átomo de hidrógeno emite un fotón, cuya longitud de onda es de 4890 \AA . Calcular la energía de enlace del estado inicial.

La energía del fotón emitido es

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{4.89 \times 10^3 \text{ \AA}} = 2.54 \text{ eV}$$

La energía de excitación (E_x) es la energía con la cual el átomo pasa a un nivel superior al estado fundamental. Por lo tanto, la energía del nivel es

$$E_n = E_1 + E_x = -13.6 \text{ eV} + 10.19 \text{ eV} = -3.41 \text{ eV}$$

El fotón surge de la transición entre los estados de energía, tales que $E_u - E_l = h\nu$; de ahí que

$$E_u - (-3.41 \text{ eV}) = 2.54 \text{ eV} \quad \text{ó} \quad E_u = -0.87 \text{ eV}$$

Entonces la energía de enlace de un electrón en el estado es 0.87 eV .

Obsérvese que la transición corresponde a

$$n_u = \sqrt{\frac{E_1}{E_u}} = \sqrt{\frac{13.6 \text{ eV}}{0.87 \text{ eV}}} = 4 \quad \text{y} \quad n_l = \sqrt{\frac{E_1}{E_l}} = \sqrt{\frac{13.6 \text{ eV}}{3.41 \text{ eV}}} = 2$$

- 19.10.** En un tubo de descarga de gas se disparan electrones de 12.2 eV sobre átomos de hidrógeno. Calcular las longitudes de onda de las líneas emitidas por el hidrógeno.

La máxima energía que puede absorber el átomo de hidrógeno es igual a la energía del electrón, 12.2 eV . La absorción de esta energía excita al átomo a un estado de energía E_u (suponiendo que el átomo estaba inicialmente en el estado fundamental) dado por

$$E_u = E_1 + 12.2 \text{ eV} = -13.6 \text{ eV} + 12.2 \text{ eV} = -1.4 \text{ eV}$$

El valor de n correspondiente a este estado se obtiene de $E_n = -E_1^\circ/n^2$; así

$$-1.4 \text{ eV} = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2} \quad \text{ó} \quad n = 3.12$$

Puesto que n debe ser un número entero, el mayor estado al cual puede llegar corresponde a $n = 3$. De ahí que (problema 19.8) existan tres posibles longitudes de onda emitidas por el átomo cuando éste vuelva a su estado fundamental, correspondientes a las transiciones $3 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$ y $3 \rightarrow 1$. Estas longitudes de onda son

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &= (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) & \text{ó} & \quad \lambda = 6563 \text{ Å} \\ \frac{1}{\lambda} &= (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) & \text{ó} & \quad \lambda = 1215 \text{ Å} \\ \frac{1}{\lambda} &= (1.097 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}) \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} \right) & \text{ó} & \quad \lambda = 1026 \text{ Å} \end{aligned}$$

- 19.11.** De acuerdo con la teoría de Bohr, ¿cuántas revoluciones dará un electrón en el primer estado excitado del hidrógeno, si el tiempo de vida en ese estado es de 10^{-8} s?

De las ecuaciones (19.4) y (19.6), el radio y la velocidad orbital para el estado $n = 2$ están dados por

$$\begin{aligned} r_2 &= 4r_1^\circ = 4(0.529 \text{ Å}) = 2.12 \text{ Å} = 2.12 \times 10^{-10} \text{ m} \\ v_2 &= \frac{v_1^\circ}{2} = \frac{c}{2(137)} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2(137)} = 1.10 \times 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

La velocidad angular es entonces

$$\omega = \frac{v_2}{r_2} = \frac{1.10 \times 10^6 \text{ m/s}}{2.12 \times 10^{-10} \text{ m}} = 0.52 \times 10^{16} \text{ rad/s}$$

y el número total de revoluciones es

$$N = \frac{\omega t}{2\pi} = \frac{(0.52 \times 10^{16} \text{ rad/s})(10^{-8} \text{ s})}{6.28 \text{ rad/rev}} = 8.3 \times 10^6 \text{ rev}$$

- 19.12.** Calcular la corrección en la longitud de onda de un fotón emitido si se tiene en cuenta la energía cinética de retroceso del núcleo de hidrógeno.

Suponiendo que el átomo está inicialmente en reposo, la conservación de energía da

$$E_u = E_l + E_\gamma + K \quad \text{ó} \quad \frac{E_u - E_l}{hc} = \frac{E_\gamma}{hc} + \frac{K}{hc}$$

donde K es la energía cinética del núcleo. El primer término de la izquierda es $1/\lambda_0$, y el segundo es $1/\lambda$, donde λ_0 es la longitud de onda incorrecta y λ es la verdadera. Así

$$\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda} = \frac{K}{hc} \quad \text{ó} \quad \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda K}{hc}$$

El momentum de retroceso del núcleo es $p = \sqrt{2MK}$. Entonces, por conservación del momentum,

$$0 = -\sqrt{2MK} + \frac{h}{\lambda} \quad \text{ó} \quad K = \frac{h^2}{2M\lambda^2}$$

con lo cual

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda(h^2/2M\lambda^2)}{hc} = \frac{hc}{2(Mc^2)\lambda} = \frac{12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2(939 \times 10^6 \text{ eV})\lambda} = \frac{6.60 \times 10^{-6} \text{ Å}}{\lambda}$$

Puesto que las longitudes de onda son aproximadamente $\lambda \sim 10^3 \text{ Å}$, entonces, la fracción de cambio es de unos 10^{-9} lo cual resulta despreciable.

- 19.13. Para el hidrógeno, demuestre que cuando $n \gg 1$, la frecuencia del fotón emitido en una transición de n a $n - 1$ es igual a la frecuencia de rotación.

La frecuencia de rotación en el estado n es

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_n}{2\pi r_n} = \frac{2\pi k e^2 / nh}{2\pi n^2 h^2 / 4\pi^2 k m e^2} = \frac{4\pi^2 k^2 m e^4}{n^3 h^3}$$

La frecuencia del fotón emitido es

$$\nu = c \frac{1}{\lambda} = c R_\infty \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right] = c R_\infty \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

Para $n \gg 1$,

$$\nu \approx c R_\infty \frac{2n}{n^2 n^2} = c \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^3 c} \frac{2}{n^3} = \frac{4\pi^2 k^2 m e^4}{n^3 h^3}$$

que es la misma frecuencia de rotación dada anteriormente.

Este problema muestra el *principio de correspondencia* de Bohr, el cual establece que para un número n grande, la ecuación cuántica se convierte en la ecuación clásica. De acuerdo con la teoría clásica, la radiación emitida por una carga en rotación tendrá una frecuencia igual a la frecuencia de rotación.

- 19.14. Un electrón describe una circunferencia alrededor de un núcleo de carga positiva Ze . ¿Cómo se relaciona la velocidad del electrón con el radio de su órbita?

Igualando la fuerza de Coulomb con (masa del electrón) \times (aceleración centrípeta),

$$\frac{k(e)(Ze)}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{ó} \quad v^2 = \frac{kZe^2}{mr}$$

- 19.15. ¿Cómo se relaciona la energía del electrón del problema 19.14, con el radio de su órbita?

La energía potencial eléctrica del electrón es

$$U = qV = (-e)V = -e \frac{k(Ze)}{r} = -\frac{kZe^2}{r}$$

Utilizando el resultado del problema 19.14, la energía cinética del electrón es

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \frac{kZe^2}{mr} = \frac{kZe^2}{2r}$$

La energía total es

$$E = K + U = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r} = \frac{1}{2} U$$

- 19.16. Suponiendo que todas las transiciones son posibles, ¿tendrá un mayor o menor número de líneas el espectro visible del hidrógeno (3800 Å a 7700 Å) que el espectro visible del litio doblemente ionizado?

$$\text{Para el hidrógeno: } E_{nH} = -\frac{E_1^\circ}{n^2}$$

$$\text{Para el Li}^{2+}: E_{nLi} = -\frac{Z^2 E_1^\circ}{n^2} = -\frac{E_1^\circ}{(n/3)^2}$$

Por lo tanto el diagrama de niveles de energía para el Li^{2+} contiene todos los niveles de energía del hidrógeno más dos niveles adicionales por cada nivel del hidrógeno. Puesto que hay más niveles disponibles, habrá más líneas en el espectro visible del Li^{2+} que en el del hidrógeno.

- 19.17.** Calcular la relación entre masas del deuterio e hidrógeno, si sus líneas H_α tienen longitudes de onda de 6561.01 Å y 6562.80 Å, respectivamente. (Fue a través de mediciones de este tipo como se descubrió el deuterio.)

En función de la masa reducida del átomo, la fórmula de Rydberg es

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{R_\infty Z^2}{1 + \frac{m}{M}} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

donde m es la masa del electrón y M la masa del núcleo. Para una transición y un Z determinados, esto significa que λ es proporcional a $1 + (m/M)$, así

$$\frac{\lambda_D}{\lambda_H} = \frac{1 + \frac{m}{M_D}}{1 + \frac{m}{M_H}}$$

ó

$$\frac{\lambda_D - \lambda_H}{\lambda_H} = \frac{\frac{m}{M_D} - \frac{m}{M_H}}{1 + \frac{m}{M_H}} = \frac{m}{M_H} \frac{M_H - M_D}{M_D \left(1 + \frac{m}{M_H} \right)} \approx \frac{m}{M_H} \frac{M_H - M_D}{M_D}$$

Reemplazando valores y $m/M_H = 1/1836$,

$$\frac{-1.79 \text{ Å}}{6562.80 \text{ Å}} \approx \frac{1}{1836} \left(\frac{M_H}{M_D} - 1 \right)$$

Resolviendo,

$$\frac{M_H}{M_D} \approx 0.5 \quad \text{ó} \quad \frac{M_D}{M_H} \approx 2.0$$

- 19.18.** Hallar la diferencia entre las longitudes de onda de la línea del hidrógeno correspondiente a la transición de $3 \rightarrow 2$ ($R_H = 1.09678 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$) y la línea del helio simplemente ionizado correspondiente a la transición de $6 \rightarrow 4$ ($R_{He} = 1.09722 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$).

Tenemos

$$\frac{1}{\lambda} = R \left[\left(\frac{Z}{n_l} \right)^2 - \left(\frac{Z}{n_u} \right)^2 \right] \quad \text{donde} \quad R = \frac{R_\infty}{1 + (m/M)}$$

Puesto que $Z_H = 1$ y $Z_{He} = 2$, la expresión entre paréntesis tiene el mismo valor, $5/36$, para ambas transiciones; así, la diferencia entre las longitudes de onda se debe solamente a la diferencia en las constantes de Rydberg. Tomando diferenciales,

$$-\frac{1}{\lambda^2} d\lambda = dR \frac{5}{36} \quad \text{ó} \quad -d\lambda = \lambda^2 dR \frac{5}{36} = \frac{dR}{\frac{5}{36} R^2}$$

Entonces, aproximadamente,

$$\lambda_H - \lambda_{He} = \frac{R_{He} - R_H}{\frac{5}{36} R_H^2} = \frac{0.00044 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}}{\frac{5}{36} (1.09678 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1})^2} = 2.63 \text{ Å}$$

- 19.19.** Calcular la constante de Rydberg para el positronio (un sistema ligado formado por un positrón y un electrón).

La masa de un positrón es igual a la del electrón, entonces

$$R_P = \frac{R_\infty}{1 + (m/M)} = \frac{R_\infty}{1 + (m/m)} = \frac{R_\infty}{2} = 0.5485 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$$

- 19.20. En el problema 19.19, hallar el potencial de ionización del positronio.

$$\frac{1}{\lambda} = R_P \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{hc}{\lambda} = h\nu = hcR_P \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right)$$

La energía de ionización es la energía necesaria para excitar el positronio de su estado fundamental ($n_l = 1$) al estado $n_u = \infty$. Así

$$E_{\text{ion}} = hcR_P = (12.40 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})(0.5485 \times 10^{-3} \text{\AA}^{-1}) = 6.8 \text{ eV}$$

- 19.21. Cuando un mesón μ es capturado por un protón, se forma un átomo mesónico μ . Calcular la energía de ionización de un átomo mesónico μ . Un mesón μ es una partícula elemental de carga $-e$ y masa en reposo igual a 207 veces la masa en reposo del electrón.

El análisis es completamente análogo al del átomo del hidrógeno, reemplazando la masa m del electrón, por $207m$.

$$E_{\text{ion}} = 207(13.6 \text{ eV}) = 2.82 \text{ keV}$$

- 19.22. Con relación al problema 19.21, calcular el radio de la primera órbita de Bohr para el ^{208}Pb ($Z = 82$) para un átomo mesónico μ .

De la ecuación (19.4), r_1 varía inversamente proporcional a Zm . Luego,

$$r_{1\mu} = \frac{1}{(82)(207)} (0.529 \text{ \AA}) = 3.12 \times 10^{-5} \text{ \AA} = 3.12 \text{ fm}$$

- 19.23. Calcular la energía de la primera órbita de Bohr en el problema 19.22.

De la ecuación (19.5), E_1 varía directamente a Z^2m . Entonces,

$$E_{1\mu} = (82)^2(207)(-13.58 \text{ eV}) = -19.0 \text{ MeV}$$

- 19.24. En los problemas 19.21 al 19.23. Para un átomo mesónico μ de ^{208}Pb , ¿cuál es la energía del fotón emitido en la primera transición de Lyman ($n_u = 2$ a $n_l = 1$)?

$$E_\gamma = \Delta E = E_u - E_l = -Z^2 E_1^\circ \left(\frac{1}{n_u^2} - \frac{1}{n_l^2} \right) = E_1 \left(\frac{1}{n_u^2} - \frac{1}{n_l^2} \right) = (-19.0 \text{ MeV}) \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 14.25 \text{ MeV}$$

- 19.25. La medición experimental de la transición descrita en el problema 19.24 es de 6.0 MeV. El núcleo del ^{208}Pb tiene un radio de 7.1 fm. Según el problema 19.22 se ve que la primera órbita de Bohr está dentro del núcleo. Suponiendo que la carga del núcleo está uniformemente distribuida, calcular la nueva primera órbita de Bohr que sea coherente con los datos anteriores.

El potencial de una esfera de radio R cargada uniformemente y de carga total $Q = Ze$ es

$$V = \begin{cases} \frac{kQ}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] & r < R \\ \frac{kQ}{r} & r > R \end{cases}$$

La energía de un mesón μ que se mueve dentro de una distribución uniforme de carga es

$$E = K + U = \frac{1}{2} mv^2 + (-e) \frac{kZe}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right]$$

Si el mesón μ se mueve en una órbita circular de radio r , tenemos

$$F = ma \quad \text{ó} \quad e\mathcal{E} = \frac{mv^2}{r}$$

donde \mathcal{E} , el campo radial dentro de la distribución de carga, está dado por

$$\mathcal{E} = -\frac{dV}{dr} = \frac{kQr}{R^3} = \frac{kZe^2r}{R^3}$$

De ahí que

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{re\mathcal{E}}{2} = \frac{kZe^2r^2}{2R^3}$$

y de la energía obtenemos

$$E = \frac{kZe^2r^2}{2R^3} - \frac{kZe^2}{R} \left[\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right] = Z \frac{ke^2}{R} \left[\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{2} \right]$$

La segunda órbita de Bohr se encuentra fuera del núcleo; por lo tanto, $E_{2\mu}$ puede calcularse como si $E_{1\mu} = -19.0$ MeV (problema 19.23), es decir,

$$E_{2\mu} = \frac{-19.0 \text{ MeV}}{2^2} = -4.75 \text{ MeV}$$

Utilizando los valores experimentales, tenemos

$$E_{1\mu} = E_{2\mu} - \Delta E = -4.75 \text{ MeV} - 6.0 \text{ MeV} = -10.75 \text{ MeV}$$

y así

$$-10.75 \text{ MeV} = 82 \frac{1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{7.1 \text{ fm}} \left[\frac{r_{1\mu}^2}{(7.1 \text{ fm})^2} - \frac{3}{2} \right]$$

Resolviendo, $r_{1\mu} = 6.56$ fm, con un aumento de 3.44 fm, (ver problema 19.22), debido a que la órbita se encuentra dentro de la distribución nuclear de carga.

- 19.26.** Un electrón se mueve en una distribución de carga uniforme y esférica de radio R y carga Ze . Utilizando los postulados de Bohr, calcular los niveles de energía permitidos suponiendo que las órbitas de Bohr se encuentran dentro de la carga.

Según el problema 19.25, la energía del electrón está dada por

$$E = \frac{kZe^2}{R} \left[\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{2} \right] \quad (1)$$

El primer postulado de Bohr da ($\hbar = h/2\pi$)

$$mvr = n\hbar \quad \text{ó} \quad v^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2r^2} \quad (2)$$

De la segunda ley de Newton y suponiendo que el electrón se mueve en una órbita circular, tenemos

$$\frac{kZe^2r}{R^3} = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

Eliminando v^2 de (2) y (3), obtenemos

$$r^2 = \frac{n\hbar}{e} \sqrt{\frac{R^3}{mkZ}} \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (1), encontramos para cada valor entero de n

$$E_n = \frac{kZe^2}{R} \left[\frac{n\hbar}{e} \sqrt{\frac{1}{mkZR}} - \frac{3}{2} \right]$$

Problemas suplementarios

- 19.27. Repetir el problema 19.1 para la serie de Balmer. *Resp.* 3646 Å; 6563 Å
- 19.28. Calcular la longitud de onda, del fotón emitido en la transición $n_u = 6$ a $n_l = 3$. Dar la respuesta en angstroms. (Esta es la tercera transición en la serie de Paschen.) *Resp.* 1.094×10^4 Å
- 19.29. Calcular la mínima longitud de onda del fotón en la serie de transiciones con $n_l = 4$ (serie de Brackett). *Resp.* 1.459×10^4 Å
- 19.30. La mínima longitud de onda en la serie de Balmer para el hidrógeno es 3646 Å. Calcular la constante de Rydberg a partir de este valor. *Resp.* 1.097×10^{-3} Å⁻¹
- 19.31. Calcular el valor de n_u en la serie que da lugar a la línea del espectro del hidrógeno con 1026 Å. (Obsérvese que ésta es la serie de Lyman.) *Resp.* 3
- 19.32. Repetir el problema 19.31 para la línea espectral del hidrógeno de 4861 Å. (Esta es la serie de Balmer.) *Resp.* 4
- 19.33. Calcular ke^2 en eV · Å. *Resp.* 14.40 eV · Å
- 19.34. Demuestre que $v_1^0/c = 2\pi ke^2/hc \equiv \alpha$ es 1/137. Este valor adimensional α se denomina *constante de estructura fina*.
- 19.35. De la ecuación (19.4), calcular en angstroms el radio de la primera órbita de Bohr para el hidrógeno. *Resp.* 0.529 Å
- 19.36. Calcular la relación de la longitud de onda Compton de un electrón (capítulo 12) respecto del radio de la primera órbita de Bohr para el hidrógeno. *Resp.* 21.8
- 19.37. ¿Cuál es el mínimo potencial de aceleración capaz de excitar un electrón para sacar un átomo de hidrógeno de su estado fundamental? *Resp.* 10.2 V
- 19.38. Calcular la energía mínima que debe comunicarse a un átomo de hidrógeno para que pueda emitir la línea H_β . (La línea H_β corresponde a la transición $4 \rightarrow 2$.) *Resp.* 2.55 eV
- 19.39. Calcular la energía de enlace de un electrón en el tercer estado excitado del hidrógeno. *Resp.* 0.85 eV
- 19.40. ¿Cuál es el potencial de aceleración necesario para que un electrón ionice un átomo de hidrógeno? *Resp.* 13.6 V
- 19.41. ¿Cuál es el mayor estado que pueden alcanzar átomos no excitados de hidrógeno cuando son bombardeados con electrones de 12.6 eV? *Resp.* $n = 3$
- 19.42. Hallar la energía de retroceso de un átomo de hidrógeno cuando emite un fotón en una transición de $n_u = 10$ a $n_l = 1$. *Resp.* 9.6×10^{-8} eV
- 19.43. Calcular la fracción de cambio en la longitud de onda de una línea espectral que surge de un pequeño cambio en la masa reducida del átomo. *Resp.* $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta\mu/\mu$

- 19.44. Calcular el radio de la segunda órbita de Bohr para el litio doblemente ionizado. *Resp.* 0.705 Å
- 19.45. Calcular el radio de la primera órbita de Bohr para berilio triplemente ionizado. *Resp.* 0.132 Å
- 19.46. Calcular la longitud de onda de la línea H_β del deuterio si la línea H_β del hidrógeno es de 4862.6 Å ($R_D = 1.09707 \times 10^{-3} \text{ Å}^{-1}$). *Resp.* 4861.3 Å
- 19.47. Calcular el primero y segundo radios de Bohr para un positronio. *Resp.* 1.06 Å; 4.23 Å
- 19.48. (a) Calcular los tres primeros niveles de energía para un positronio. (b) Hallar la longitud de onda de la línea H_α (transición de $3 \rightarrow 2$) del positronio. *Resp.* (a) -6.8 eV, -1.7 eV, -0.76 eV; (b) 1313 Å
- 19.49. Para un átomo mesónico π de ^{208}Pb ($m_\pi = 273m_e$), calcular (a) los dos primeros radios de Bohr, (b) las energías de las dos primeras órbitas de Bohr, (c) la energía del fotón liberado cuando el mesón π efectúa una transición de la segunda a la primera órbita de Bohr. *Resp.* (a) 5.39 fm (dentro del núcleo), 9.45 fm; (b) -15.35 MeV, -6.25 MeV; (c) 9.1 MeV

Capítulo 20

Movimiento orbital del electrón y el efecto Zeeman

20.1 EL MOMENTUM ANGULAR ORBITAL DESDE UN PUNTO DE VISTA CLASICO

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en una órbita elíptica bajo la influencia de una fuerza central, como se muestra en la figura 20-1. El vector momentum angular alrededor del centro de fuerzas, L , tiene una magnitud mvd , donde d es la distancia perpendicular entre la dirección de la velocidad y el centro de fuerzas, y v es la velocidad de la partícula. La dirección de L está dada por la conocida regla de la mano derecha, como se muestra en la figura. De la segunda ley de Newton, el torque neto τ sobre la partícula será igual a la rapidez de cambio de momentum angular: $\tau = dL/dt$. Sin embargo, puesto que la fuerza que obra sobre la partícula es una fuerza central, el torque ejercido es cero. De ahí que el momentum angular L tendrá magnitud y dirección constantes en todo punto a lo largo de su trayectoria elíptica.

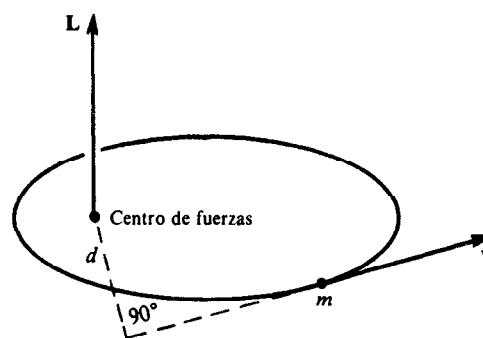


Fig. 20-1

En la figura 20-2 se muestran diferentes posibilidades de movimiento elíptico, que van desde una circunferencia hasta aproximadamente un segmento de recta, todas ellas con el mismo eje mayor $2a$. Se puede demostrar que la energía total E (cinética y potencial) depende únicamente del valor del eje mayor, por lo tanto, tendrá el mismo valor para todas estas elipses (v.g., $E = -ke^2/2a$ para las fuerzas de Coulomb; ver problema 19.15). Sin embargo, el momentum angular orbital cambia de una elipse a otra, tomando valores que varían continuamente desde un valor máximo de $a\sqrt{-2mE}$ para la circunferencia hasta cerca de cero para cuando la elipse se aproxima al segmento de recta. (En el límite de segmento de recta, una elipse tiene momentum angular cero porque $d = 0$ en todo punto de la trayectoria.)

Siendo L constante, la componente $L_z = L \cos \theta$ será constante para toda dirección en el espacio, mientras dure el movimiento elíptico. En la descripción clásica no existe restricción para θ , el cual puede tomar cualquier valor entre 0° y 180° .

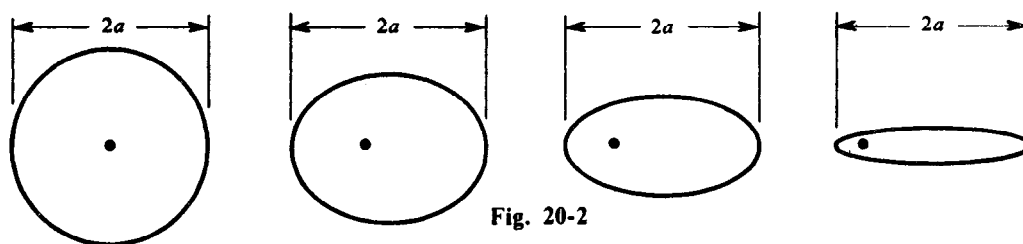


Fig. 20-2

20.2 TRATAMIENTO CLASICO DEL MOMENTO DE DIPOLO MAGNETICO

Cuando un electrón se mueve en una trayectoria circular, se produce una corriente dada por:

$$I = (\text{carga del electrón}) \times (\text{número de veces que el electrón pasa por un mismo punto}) = ef,$$

donde f es la frecuencia de rotación del electrón. La espira circular de corriente produce a su vez un campo magnético muy parecido al producido por un pequeño imán como se muestra en la figura 20-3. Tal como ocurre en un imán, existe un *momento del dipolo magnético* μ asociado con el electrón que está orbitando, cuyo valor está dado por

$$|\mu| = IA = (ef)(\pi r^2) \quad (20.1)$$

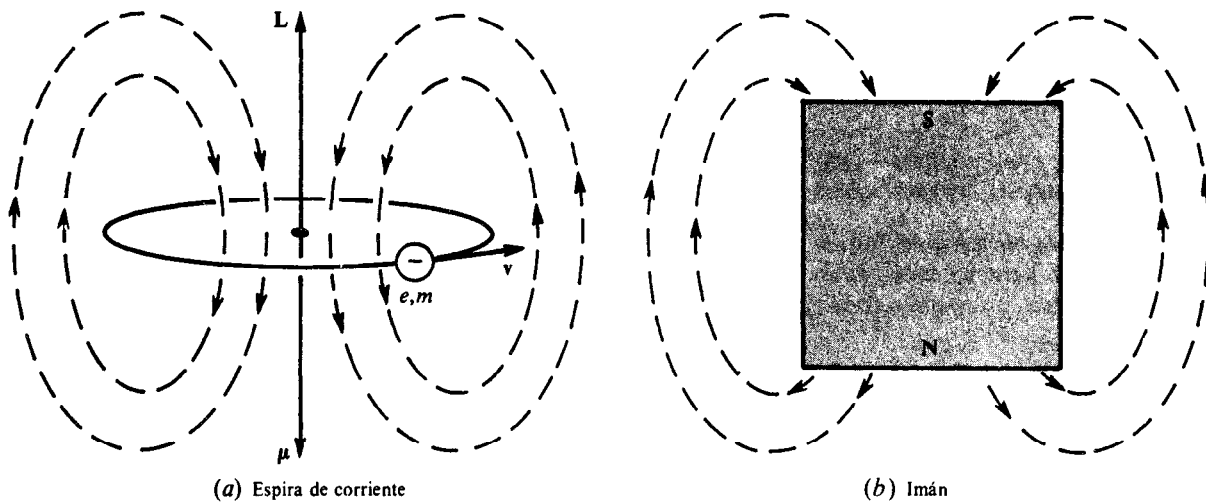


Fig. 20-3

y cuyo sentido es opuesto al de L (porque el electrón tiene carga negativa). Puesto que

$$|L| = mvr = m(2\pi rf)r = 2mf\pi r^2 = \frac{2m}{e} |\mu|$$

tenemos

$$\mu = -\frac{e}{2m} L \quad (20.2)$$

20.3 ENERGIA CLASICA DE UN DIPOLO MAGNETICO. MOMENTO EN UN CAMPO MAGNETICO EXTERNO

Supongamos que uno de los dos, la espira de corriente o el pequeño imán, se coloca en un campo magnético *externo* B . La espira experimenta un torque,

$$\tau = \mu \times B \quad (20.3)$$

que tiende a alinear μ con B . El sistema tiene, pues, energía potencial, E_B , cuyo cambio da el trabajo hecho por el torque cuando varía la orientación de μ . Integrando la expresión para el torque podemos demostrar que

$$E_B = -\mu \cdot B \quad (20.4)$$

Haciendo coincidir la dirección del eje z con la de B y utilizando (20.2), se obtiene para el electrón que está orbitando:

$$E_B = \frac{e}{2m} L \cdot B = \frac{e}{2m} L_z B \quad (20.5)$$

20.4 EL EXPERIMENTO DE ZEEMAN

En 1896, antes del advenimiento de la mecánica cuántica, el físico holandés Pieter Zeeman realizó un experimento para medir los efectos de interacción entre el momento magnético interno del átomo y un campo magnético externo. En un experimento de Zeeman se coloca un átomo en un campo magnético externo y su

espectro de excitación se mide y se compara con el espectro obtenido en ausencia de campo magnético externo. Esto puede lograrse, por ejemplo, midiendo las longitudes de onda de la radiación emitida por un tubo de descarga cuando se le introduce en un campo magnético.

Cuando se realiza el experimento, se observa que en presencia de un campo externo, cada línea del espectro se *desdobla* en un número de líneas diferentes. Además, el cambio observado en la frecuencia de las líneas es directamente proporcional a la magnitud del campo magnético aplicado. La observación de líneas espectrales adicionales significa que un átomo posee niveles discretos adicionales de energía cuando se le introduce en un campo magnético externo.

La explicación del desdoblamiento de Zeeman exige un análisis mecánico-ondulatorio, el cual predice que tanto la magnitud como la dirección del momentum angular orbital están cuantizadas.

20.5 LA CUANTIZACION DE LA MAGNITUD DEL MOMENTUM ANGULAR ORBITAL

Un análisis mecánico-cuántico muestra que el momentum angular orbital de un electrón en un átomo de un electrón *no* tiene un único valor $n\hbar$ ($\hbar = h/2\pi$), como lo predice la teoría de Bohr. En cambio, para un número cuántico principal n (por ejemplo, para una energía dada $E_n = -E_1^0/n^2$), hay n valores posibles de

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad (20.6)$$

donde l es un número entero denominado *número cuántico* del momentum angular orbital, cuyos valores van de 0 a $n-1$, así

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (20.7)$$

En particular, para el menor valor de energía, correspondiente a $n = 1$, el valor de l es cero y, por lo tanto, el momentum angular orbital también es cero.

20.6 LA CUANTIZACION DE LA DIRECCION DEL MOMENTUM ANGULAR ORBITAL

Supongamos que un átomo de un electrón se introduce en un campo magnético externo, cuya dirección hacemos coincidir con la del eje z . Un análisis mecánico ondulatorio muestra que la *dirección* del vector momentum angular orbital L no puede ser arbitraria. En cambio, L estará orientado de tal manera que la componente L_z , en la dirección del eje z , estará cuantizada, con valores discretos

$$L_z = m_l \hbar \quad (20.8)$$

donde m_l es un número entero denominado *número cuántico magnético*, cuyos valores van de $-l$ a l , así

$$m_l = l, l-1, l-2, \dots, 0, \dots, -(l-1), -l \quad (20.9)$$

Obsérvese que para un l dado, el máximo valor de $L_z (= l\hbar)$ es *menor* que la magnitud de $L (= \sqrt{l(l+1)} \hbar)$.

20.7 EXPLICACION DEL EFECTO ZEEMAN

La mecánica cuántica establece que la energía total de un átomo de un electrón colocado en un campo magnético externo adquiere un término adicional de energía potencial dado por (20.5). No obstante, aquí, L_z está cuantizada de acuerdo con (20.8), por lo tanto, la energía total es

$$E = E_0 + E_B = E_0 + m_l \frac{e\hbar}{2m} B \quad (20.10)$$

donde E_0 es la energía cuantizada antes de que aparezca el campo B . Por eso, en presencia del campo magnético, cada nivel de energía E_0 se desdoblará en $2l+1$ subniveles igualmente separados, con separación proporcional a B . El factor $e\hbar/2m$ se denomina *magnetón de Bohr* y su valor es

$$\frac{e\hbar}{2m} = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T}$$

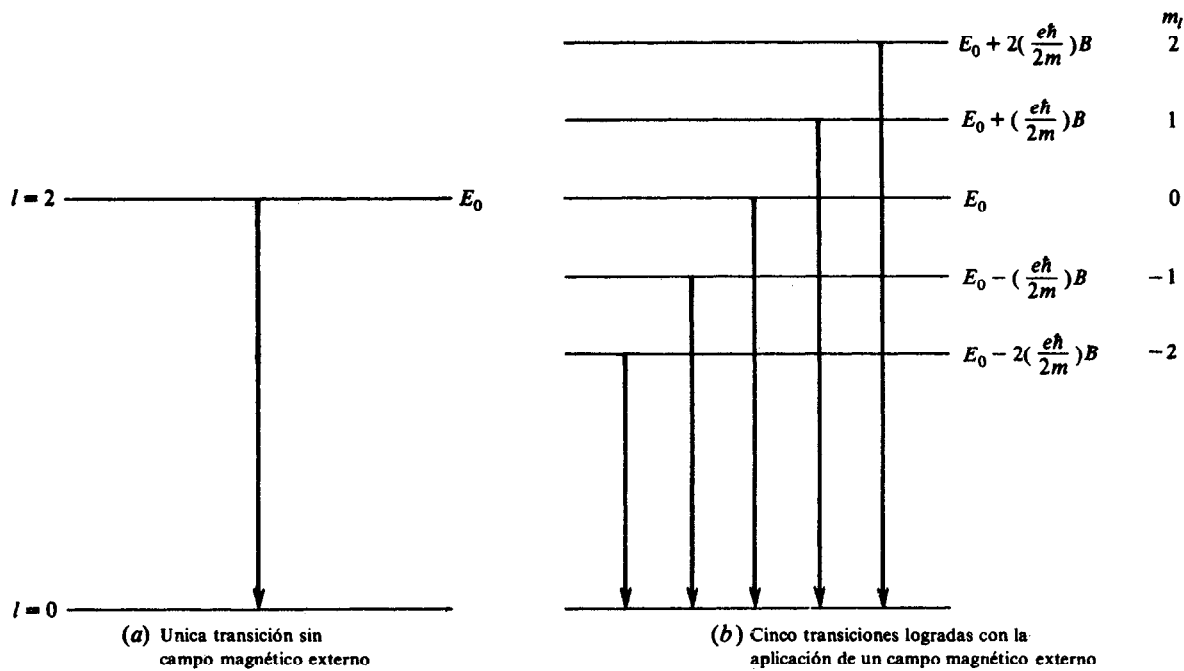


Fig. 20-4

Puesto que existe un mayor número de niveles de energía diferentes después de la aparición del campo magnético, será posible observar más líneas en el espectro de excitación de un átomo, cuando éste se introduce en un campo magnético externo, como se muestra en la figura 20-4.

Se ha descubierto que las transiciones más intensas en los átomos se rigen por las siguientes reglas de selección:

$$\Delta l = \pm 1 \quad \Delta m_l = \pm 1 \text{ ó } 0 \quad (20.11)$$

Para estas *transiciones de dipolo eléctrico*, la ecuación (20.10) da $\Delta E = \Delta E_0$ (la línea espectral de campo cero) y

$$\Delta E = \Delta E_0 \pm \frac{e\hbar}{2m} B$$

es decir, la línea de campo cero se ha desdoblado en dos nuevas líneas de energía separadas de la línea de campo cero en un valor absoluto

$$\Delta E_{Zee} = \frac{e\hbar}{2m} B \quad (20.12)$$

También pueden efectuarse otras transiciones que se reflejan en líneas espectrales mucho más débiles. De todos modos, las diferencias en energía o en frecuencia entre las nuevas líneas serán proporcionales a la magnitud del campo aplicado.

Las predicciones anteriores corresponden exactamente a lo que se observa en el efecto Zeeman "normal". Los desdoblamientos discretos constituyen una clara evidencia experimental del fenómeno de cuantización del momentum angular orbital. Si la orientación del momentum angular no estuviese cuantizada, entonces L_z podría tomar todos los valores posibles, como en la teoría de Bohr, y las líneas se ensancharían formando una banda continua en vez de tomar valores discretos como se observa experimentalmente. No obstante, el análisis anterior no explica *todas* las líneas observadas en los experimentos de Zeeman. Existen otras transiciones adicionales que se consideran en la clase del denominado *efecto Zeeman anómalo*, que se relaciona con el concepto de rotación del electrón alrededor de su eje, o sea el spin del electrón. En los problemas 24.17 a 24.21 se tratará el efecto Zeeman anómalo, el cual se reduce al efecto Zeeman normal para campos magnéticos lo suficientemente fuertes (problema 24.22).

Problemas resueltos

- 20.1.** Calcular el momento magnético de un electrón que describe una órbita circular de radio r alrededor de un protón.

De (20.1), el momento magnético es

$$\mu = IA = (ef)(\pi r^2)$$

La ecuación de movimiento del electrón es

$$F_{\text{rad}} = ma_{\text{rad}} \quad \text{ó} \quad \frac{ke^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

con lo cual

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ke}{mr}}$$

Por lo tanto,

$$\mu = \pi e r^2 \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ke}{mr}} \right) = \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{kr}{m}}$$

- 20.2.** Calcular la frecuencia de precesión del momento magnético μ del electrón en un campo magnético \mathbf{B} .

Un momento magnético en un campo magnético experimenta un torque τ , dado por (20.3) como,

$$\tau = \mu \times \mathbf{B} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

Este torque produce un cambio en el momentum angular dado por

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

El cambio en \mathbf{L} , $d\mathbf{L}$, es perpendicular a \mathbf{L} y a \mathbf{B} , como se muestra en la figura 20-5, dando como resultado una precesión de \mathbf{L} alrededor de la dirección de \mathbf{B} . De la figura vemos que

$$d\phi = \frac{|d\mathbf{L}|}{L \sin \theta}$$

de donde

$$\omega_p = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\left| \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|}{L \sin \theta} = \frac{\frac{e}{2m} LB \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{e}{2m} B$$

Esto se conoce como *precesión de Larmor*, y ω_p es igual a la diferencia de frecuencia observada en el efecto Zeeman normal.

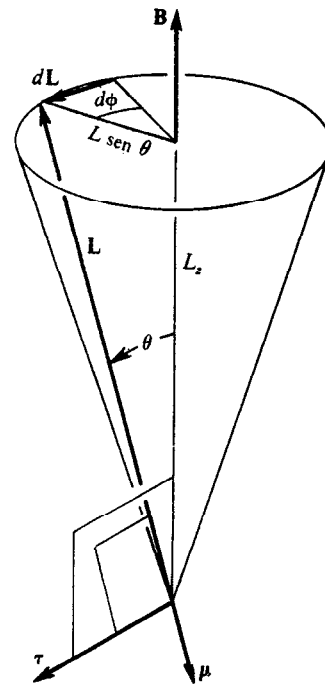


Fig. 20-5

- 20.3.** Utilizando los resultados de la mecánica cuántica, calcular los momentos magnéticos posibles en un nivel $n = 3$.

Para $n = 3$ los posibles valores de l son 2, 1, 0; y $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$.

Para $l = 2$:

$$\mu = \frac{e}{2m} L = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \left(0.927 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}} \right) \sqrt{2(2+1)} = 2.27 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Para $l = 1$:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m} \sqrt{l(l+1)} = \left(0.927 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}}\right)(\sqrt{2}) = 1.31 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}}$$

Para $l = 0$, $\mu = 0$.

Obsérvese que ninguno de estos valores concuerda con lo que predice la teoría de Bohr. De la teoría de Bohr $L = n\hbar$, así

$$\begin{aligned} \mu_B &= \frac{e}{2m} L = \frac{e}{2m} (3\hbar) = 3 \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \\ &= 3 \left(0.927 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}} \right) = 2.78 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{T}} \end{aligned}$$

20.4. Dibuje las posibles orientaciones del vector momentum angular L para $l = 0, 1, 2, 3$ y 4 .

Los posibles valores de L_z son $m_l\hbar$, donde m_l toma todos los valores enteros entre $+l$ y $-l$. Las posibles orientaciones correspondientes para el vector momentum angular orbital se indican en la figura 20-6.

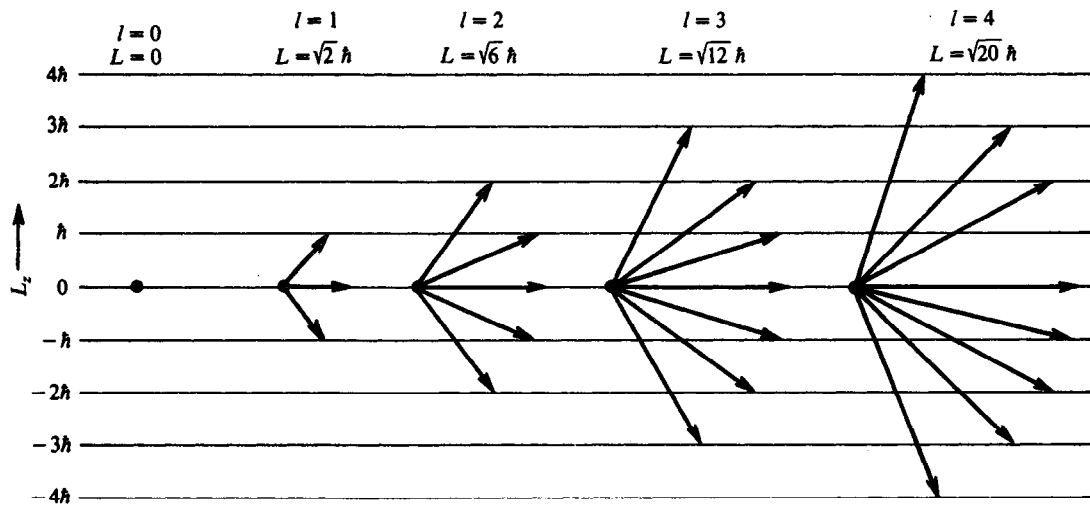


Fig. 20-6

20.5. Calcular el desdoblamiento normal de Zeeman para la línea roja del cadmio de 6438 \AA , cuando los átomos se introducen en un campo magnético de 0.009 T .

La variación en la longitud de onda se consigue diferenciando $E = hc/\lambda$:

$$dE = -hc \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad \text{ó} \quad |d\lambda| = \frac{\lambda^2 |dE|}{hc}$$

El cambio en energía se obtiene de (20.12):

$$|dE| = \Delta E_{Zee} = \frac{e\hbar}{2m} B = \left(5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}}\right)(0.009 \text{ T}) = 5.21 \times 10^{-7} \text{ eV}$$

lo que da

$$|d\lambda| = \frac{\lambda^2 |dE|}{hc} = \frac{(6438 \text{ \AA})^2 (5.21 \times 10^{-7} \text{ eV})}{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}} = 1.74 \times 10^{-3} \text{ \AA}$$

20.6. ¿Cuál es la densidad de flujo magnético B necesaria para observar el efecto Zeeman normal si un espectrómetro puede separar líneas espectrales hasta 0.5 \AA en 5000 \AA ?

Del problema 20.5,

$$\frac{|d\lambda|}{\lambda} = \frac{|dE|}{hc/\lambda} = \frac{(e\hbar/2m)B}{hc/\lambda}$$

lo que da

$$B = \frac{|d\lambda|}{\lambda} \left(\frac{hc}{\lambda} \right) \left(\frac{2m}{e\hbar} \right) = \left(\frac{0.5 \text{ \AA}}{5000 \text{ \AA}} \right) \left(\frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{5000 \text{ \AA}} \right) \left(\frac{1}{5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}} \right) = 4.28 \text{ T}$$

- 20.7.** En un experimento normal de Zeeman con un campo magnético de 3 T, la línea del calcio de 4226 Å se desdobra en 3 líneas separadas 0.25 Å. Con estos datos, calcular e/m para el electrón.

Del problema 20.6 ($\hbar = h/2\pi$):

$$\frac{|d\lambda|}{\lambda} = \frac{(e/4\pi m)B}{c/\lambda}$$

Resolviendo para e/m , se obtiene

$$\frac{e}{m} = \frac{4\pi}{B} \left(\frac{c}{\lambda^2} \right) |d\lambda| = \frac{4\pi}{3 \text{ T}} \left[\frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{(4226 \times 10^{-10} \text{ m})^2} \right] (0.25 \times 10^{-10} \text{ m}) = 1.76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

en donde hemos utilizado la conversión

$$1 \text{ T} \equiv 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{C} \cdot \text{s}}$$

- 20.8.** En un campo magnético de 0.6 T, se efectúan transiciones en un átomo entre $l=2$ y $l=1$. Si antes de aplicar el campo la longitud de onda era de 5000 Å, determinar las longitudes de onda observadas.

La separación de energía entre niveles adyacentes está dada por

$$\Delta E_{Zee} = \frac{e\hbar}{2m} B = \left(5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) (0.6 \text{ T}) = 3.47 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

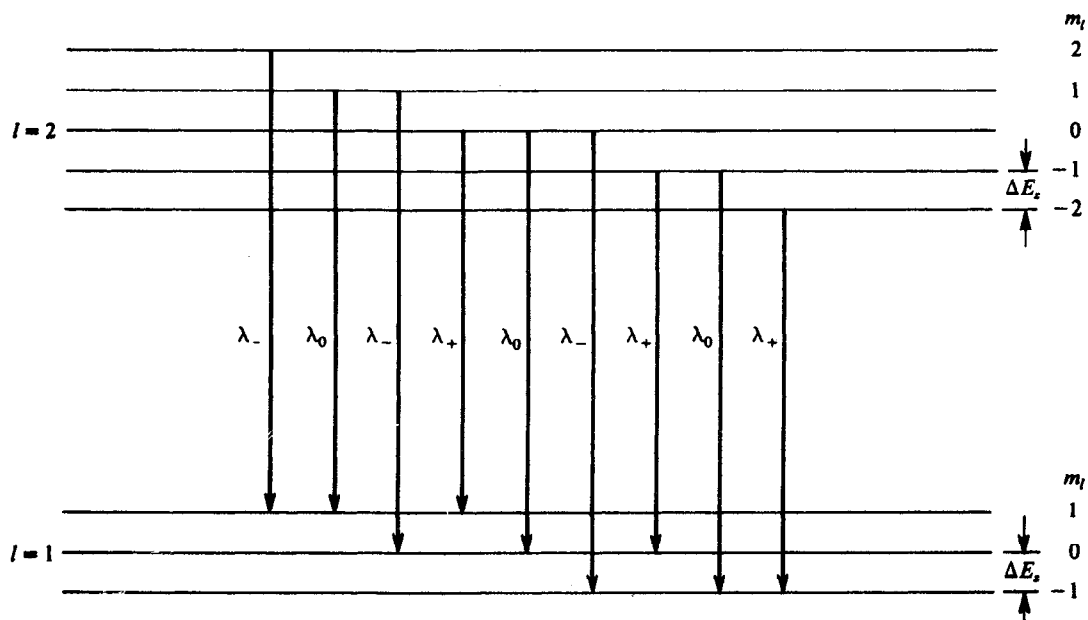


Fig. 20-7

Por lo tanto, como en el problema 20.5,

$$|d\lambda| = \frac{\lambda^2 \Delta E_{Zee}}{hc} = \frac{(5000 \text{ Å})^2 (3.47 \times 10^{-5} \text{ eV})}{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å}} = 0.07 \text{ Å}$$

Las transiciones deben obedecer a la regla de selección $\Delta m_l = +1, 0, -1$, como se indica en la figura 20-7. De las nueve transiciones posibles, solamente se observan tres longitudes de onda diferentes:

$$\lambda_+ = 5000.07 \text{ Å} \quad \lambda_0 = 5000 \text{ Å} \quad \lambda_- = 4999.93 \text{ Å}$$

Problemas suplementarios

- 20.9. Un electrón en He^+ se encuentra en una órbita $n = 2$. ¿Cuál es su momento magnético, debido a su movimiento orbital, de acuerdo con la teoría de Bohr? *Resp.* $1.85 \times 10^{-23} \text{ J/T}$
- 20.10. Haga el problema 20.9 utilizando la teoría de la mecánica cuántica. *Resp.* $1.31 \times 10^{-23} \text{ J/T}$ ó 0
- 20.11. Un electrón en una órbita circular tiene un momentum angular de $\sqrt{2} \hbar$. ¿Cuál es su frecuencia de Larmor en un campo de 0.5 T? *Resp.* $6.99 \times 10^9 \text{ Hz}$
- 20.12. Calcular los posibles ángulos que forma L con el eje z para $l = 3$. *Resp.* 16.8° ; 35.3° ; 60°
- 20.13. Calcular la separación normal de Zeeman en la línea del mercurio de 4916 Å , cuando se encuentra en un campo magnético de 0.3 T. *Resp.* $3.38 \times 10^{-2} \text{ Å}$
- 20.14. ¿Cuál será la separación normal de Zeeman entre componentes adyacentes para la radiación emitida de 4500 Å en un campo magnético de 0.4 T? *Resp.* $3.78 \times 10^{-2} \text{ Å}$
- 20.15. Una línea de 5000 Å muestra una separación normal de Zeeman de $1.1 \times 10^{-3} \text{ Å}$. Hallar el campo magnético. *Resp.* $9.42 \times 10^{-3} \text{ T}$
- 20.16. ¿Cuál es la diferencia de frecuencia en los fotones emitidos en un efecto Zeeman normal, correspondiente a transiciones en subniveles adyacentes al mismo estado final en un campo magnético de 1.2 T? *Resp.* $1.68 \times 10^{10} \text{ Hz}$
- 20.17. En un campo de 0.2 T se efectúan transiciones en un átomo entre estados $l = 3$ y $l = 2$. Si la longitud de onda antes de la aparición del campo era de 4000 Å , calcular la longitud de onda final observada. *Resp.* 4000.0149 Å ; 4000 Å ; 3999.9851 Å

Capítulo 21

El experimento de Stern y Gerlach y el spin

21.1 EL EXPERIMENTO DE STERN Y GERLACH

En el *experimento de Stern y Gerlach*, realizado en 1921, un haz de átomos de plata, cuyo momentum angular orbital es cero, pasa a través de un campo magnético *no homogéneo* e incide sobre una placa fotográfica, como se muestra en la figura 21-1. La placa fotográfica registra cualquier desviación del haz en presencia del campo magnético.

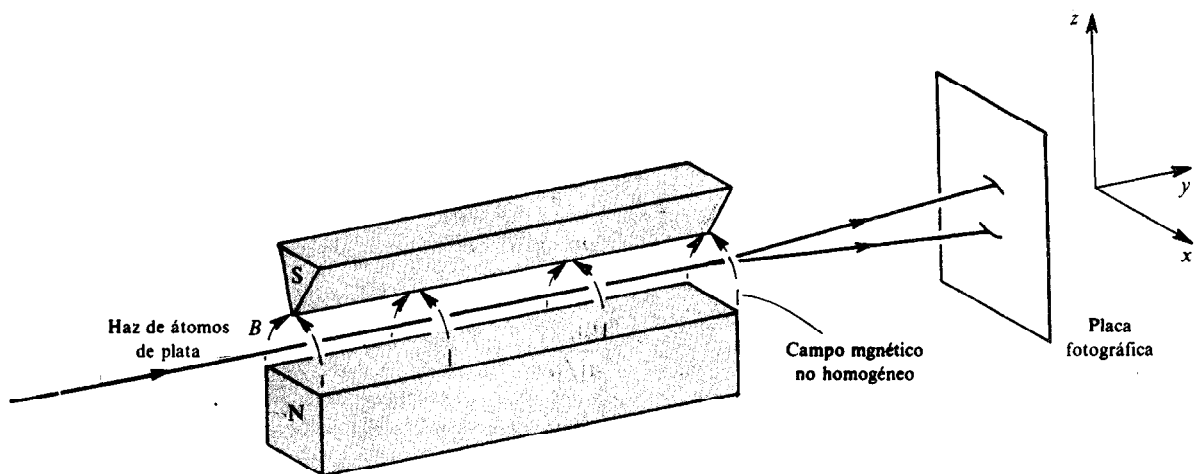


Fig. 21-1

El campo magnético *no homogéneo* se utiliza con el fin de producir una fuerza desviadora que actúe sobre todos los momentos magnéticos que estén presentes en el haz. Si se utilizara un campo magnético homogéneo, cada momento magnético experimentaría solamente un torque y no una fuerza deflector. En un campo magnético no homogéneo se ejercerá una fuerza deflector sobre cada momento magnético μ_s . Para el caso representado en la figura 21-1,

$$F_z = \mu_s \cos \theta \frac{dB}{dz} \quad (21.1)$$

donde θ es el ángulo entre μ_s y \mathbf{B} ; dB/dz el gradiente del campo no homogéneo (ver problema 21.1).

En el experimento se observa que cuando el haz incide sobre la placa fotográfica se encuentra dividido en dos partes diferentes, con igual número de átomos desviados hacia arriba y hacia abajo del punto donde el haz incide cuando no hay campo magnético. Puesto que los átomos tienen momentum angular orbital total nulo y, por lo tanto, momento magnético debido al movimiento orbital de los electrones también nulo, la interacción magnética que causa las desviaciones es producida por otro tipo de momento magnético.

21.2 EL SPIN DEL ELECTRON

En 1925, S. A. Goudsmit y G. E. Uhlenbeck propusieron la existencia de un momentum angular *intrínseco* del electrón, denominado su *spin* (rotación del electrón alrededor de su eje). El momento

magnético adicional μ_s asociado con el momentum angular intrínseco \mathbf{S} del electrón explica la desviación del haz observada en el experimento de Stern y Gerlach.

En forma análoga a lo que ocurre con el momentum angular orbital, el momentum angular intrínseco del electrón y el momento magnético asociado, se encuentran cuantizados tanto en magnitud como en dirección. Las dos líneas igualmente separadas que se observan en el experimento de Stern y Gerlach demuestran que el momentum angular intrínseco puede tomar solamente dos orientaciones con respecto a la dirección del campo magnético establecido. En la sección 20.6 se demostró que para el movimiento orbital determinado por el número cuántico l , la componente del momento magnético orbital a lo largo del campo magnético puede tener $2l + 1$ valores diferentes. Del mismo modo, si el número cuántico del momentum angular de spin se designa por s , y puesto que hay solamente dos posibles orientaciones, se tiene que $2 = 2s + 1$, resultando así un solo valor de $s = 1/2$. La magnitud del momentum angular de spin \mathbf{S} es entonces

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)} \hbar = \sqrt{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)} \hbar = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar \quad (21.2)$$

El componente S_z en la dirección del eje z es

$$S_z = m_s \hbar \quad m_s = s, s-1 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad (21.3)$$

Las dos orientaciones de \mathbf{S} se designan generalmente como “spin hacia arriba” ($m_s = +\frac{1}{2}$) y “spin hacia abajo” ($m_s = -\frac{1}{2}$) (aunque el spin nunca puede apuntar en la dirección positiva o negativa del eje z).

Se encuentra también una relación entre el momento magnético intrínseco μ_s del electrón y el momentum angular \mathbf{S} dada por

$$\mu_s = -g_s \frac{e}{2m} \mathbf{S} \quad (21.4)$$

La cantidad adimensional g_s se denomina *relación giromagnética*; para el electrón, su valor es 2.002 (en los problemas utilizaremos $g_s = 2.0$). Relacionando las ecuaciones (21.4) y (20.2) se obtiene

$$g_s = \frac{|\mu_s|/|\mathbf{S}|}{|\mu|/|\mathbf{L}|}$$

Así, la relación entre el momento magnético y el momentum angular es aproximadamente dos veces mayor para el spin del electrón que para su movimiento orbital.

El valor único de $1/2$ para el número cuántico de spin, es una característica tan fundamental para el electrón como lo es la de su carga y su masa. Las propiedades del spin del electrón fueron explicadas por primera vez por Dirac hacia 1928, combinando los principios de la mecánica ondulatoria con los de la teoría de la relatividad. Se observa que otras partículas diferentes de los electrones, v.g. protones y neutrones, también tienen momentum angular intrínseco.

Problemas resueltos

21.1. Deducir la ecuación (21.1).

La energía potencial de un electrón en un campo magnético es [compárese con (20.4)].

$$E_B = -\mu_s \cdot \mathbf{B} = -\mu_{sx} B_x - \mu_{sy} B_y - \mu_{sz} B_z$$

Para el campo magnético de la figura 21-1, $B_y \equiv 0$, B_x y B_z dependen solamente de x y z . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial E_B}{\partial x} = \mu_{sx} \frac{\partial B_x}{\partial x} + \mu_{sz} \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial E_B}{\partial y} = 0 \\ F_z &= -\frac{\partial E_B}{\partial z} = \mu_{sx} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \mu_{sz} \frac{\partial B_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Pero a lo largo del eje del haz, $\partial B_z / \partial x = 0$ (debido a la simetría) y $B_x = \partial B_x / \partial z = 0$ (por la antisimetría); además, $\partial B_x / \partial x$ es demasiado pequeño. Luego

$$F_x \approx 0 \quad F_y = 0 \quad F_z = \mu_{sz} \frac{dB}{dz} = \mu_z \cos \theta \frac{dB}{dz}$$

- 21.2.** Calcular la máxima separación de un haz de átomos de hidrógeno que recorre una distancia de 20 cm con una velocidad de 2×10^5 m/s perpendicular a un campo magnético, cuyo gradiente es 2×10^2 T/m. Desprecie el momento magnético del protón (ver problema 26.9).

En el estado fundamental, los átomos del hidrógeno tienen momentum angular orbital nulo. Del problema 21.1, la fuerza sobre un átomo de hidrógeno es

$$F_z = \mu_{sz} \frac{dB}{dz}$$

De las ecuaciones (21.3) y (21.4), con $g_s = 2$, $\mu_{sz} = -(e/m)m_s\hbar$, de suerte que

$$|F_z| = \frac{e\hbar}{m} |m_s| \frac{dB}{dz} = \frac{e\hbar}{2m} \frac{dB}{dz} = \left(9.27 \times 10^{-24} \frac{\text{J}}{\text{T}}\right) \left(2 \times 10^2 \frac{\text{T}}{\text{m}}\right) = 1.85 \times 10^{-21} \text{ N}$$

Utilizando las fórmulas de aceleración constante $\Delta z = \frac{1}{2} a_z t^2$ y $\Delta y = vt$ (ver figura 21-1 para las coordenadas), obtenemos

$$\Delta z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{F_z}{m_H} \right) \left(\frac{\Delta y}{v} \right)^2$$

La masa del hidrógeno es 1.67×10^{-27} kg, entonces

$$\Delta z = \frac{1}{2} \left(\frac{1.85 \times 10^{-21} \text{ N}}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} \right) \left(\frac{0.20 \text{ m}}{2 \times 10^5 \text{ m/s}} \right)^2 = 5.54 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Puesto que éste es el desplazamiento hacia arriba o hacia abajo, la separación total es $2 \Delta z = 1.11 \times 10^{-6}$ m.

- 21.3.** Calcular la diferencia de energía entre los electrones que están “alineados” y los “anti-alineados” con un campo magnético uniforme de 0.8 T, cuando el haz de electrones libres se mueve perpendicularmente a la dirección del campo.

Del problema 21.1 con $B_x = B_y = 0$

$$E_B = -B\mu_{sz} = -B \left(-\frac{e\hbar}{m} \right) m_s$$

Entonces,

$$\Delta E_B = B \frac{e\hbar}{m} \Delta m_s = (0.8 \text{ T}) \left(2 \times 5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 9.26 \times 10^{-5} \text{ eV}$$

- 21.4.** La línea de 21 cm es utilizada en radioastronomía para delinear un mapa de la galaxia. La línea surge de la emisión de un fotón cuando el electrón en un átomo de hidrógeno galáctico “vuelca” su spin desde estar alineado hasta encontrarse anti-alineado con el spin del protón en el átomo de hidrógeno. ¿Qué campo magnético experimenta el electrón?

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{21 \times 10^8 \text{ \AA}} = 5.9 \times 10^{-6} \text{ eV}$$

Del problema 21.3 tenemos

$$\Delta E_B = B \frac{e\hbar}{m} \Delta m_s$$

$$5.9 \times 10^{-6} \text{ eV} = B \left[2 \times 5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right] \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right]$$

$$B = 0.0510 \text{ T}$$

Problemas suplementarios

- 21.5.** En un experimento de Stern y Gerlach los átomos de plata recorren una distancia de 0.1 m a lo largo de un campo magnético no homogéneo, cuyo gradiente es de 60 T/m. Si la separación observada en la placa colectora es de 0.15 mm, calcular la velocidad de los átomos de plata. La masa de un átomo de plata es de 1.79×10^{-25} kg.
Resp. 455 m/s
- 21.6.** ¿Cuál es la diferencia de energía entre las dos orientaciones del spin de los electrones, cuando éstos se encuentran en un campo magnético de 0.5 T? *Resp.* 5.79×10^{-5} eV
- 21.7.** Calcular la longitud de onda de la radiación que pueden producir los electrones a que se refiere el problema 21.6 cuando “vuelcan” su spin. *Resp.* 2.14 cm
- 21.8.** La longitud de onda necesaria para producir un “vuelco” en el spin de un electrón es de 1.5 cm. Calcular el campo magnético dentro del cual está el electrón. *Resp.* 0.714 T

Capítulo 22

Spin del electrón y la estructura fina

22.1 ACOPLAMIENTO SPIN-ORBITA

En la sección 20.3 se demostró que un momento magnético μ colocado en un campo magnético \mathbf{B} tiene energía potencial E_B dada por

$$E_B = -\mu \cdot \mathbf{B} \quad (22.1)$$

Cuando se hizo el desarrollo de esta expresión, solamente se consideraron los campos magnéticos *externos*, aunque el resultado es válido en general.

En un modelo semiclásico de Bohr, el electrón gira alrededor del núcleo con un momentum angular \mathbf{L} . Sin embargo, desde el punto de vista del electrón, el núcleo cargado positivamente gira alrededor del electrón con la misma velocidad angular. El núcleo girando, producirá un campo magnético \mathbf{B} paralelo al momentum orbital \mathbf{L} del electrón, en el sitio que éste ocupa. A su vez, este campo magnético interno interactúa con el momento magnético intrínseco μ_s del electrón, descrito en la sección 21.2. Puesto que μ_s es proporcional al spin intrínseco \mathbf{S} del electrón y como \mathbf{B} y \mathbf{L} son proporcionales para una órbita dada, se ve que existe una energía potencial E_s , de la forma

$$E_s = K\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (22.2)$$

no es necesario considerar aquí el valor de K .

En efecto, la interacción spin-órbita se comporta como un efecto Zeeman interno, desdoblando cada nivel de energía para el cual $\mathbf{L} \neq 0$ en dos subniveles correspondientes a los dos valores permitidos de S_z según (21.3).

22.2 ESTRUCTURA FINA

Puesto que hay más niveles de energía disponibles que los considerados previamente, aparecerán más líneas en el espectro del hidrógeno que las indicadas en la figura 22-1. Tales líneas adicionales o *estructura fina*, son realmente observables con espectrómetros de un poder de resolución medianamente alto. Con tales instrumentos se observa que muchas líneas espectrales que antes aparecían como una sola, se encuentran en realidad compuestas por dos o más líneas diferentes separadas en longitud de onda unas de otras por unos pocos angstroms.

Fue la observación de las líneas espectrales de la estructura fina lo que inicialmente motivó a Uhlenbeck y a Goudsmit a introducir el concepto de spin.

22.3 MOMENTUM ANGULAR TOTAL (EL MODELO VECTORIAL)

En mecánica clásica el momentum angular *total* (orbital más spin) es una cantidad importante, debido a que su rapidez de cambio es igual al torque neto aplicado al sistema. En forma análoga, en mecánica ondulatoria, el momentum angular *total* \mathbf{J} , como el resultado de la suma vectorial

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

juegan un papel importante. Puesto que el modelo vectorial se aplica tanto a átomos de muchos electrones, como a los de un electrón, introducimos aquí la siguiente nota: *Los números cuánticos que especifican estados de electrones individuales se denotarán, como ya se ha hecho, con letras minúsculas; los números cuánticos que representan estados atómicos, serán denotados con letras mayúsculas. En el caso especial del átomo de un electrón, se utilizarán letras mayúsculas, ya que el estado electrónico es el mismo atómico.*

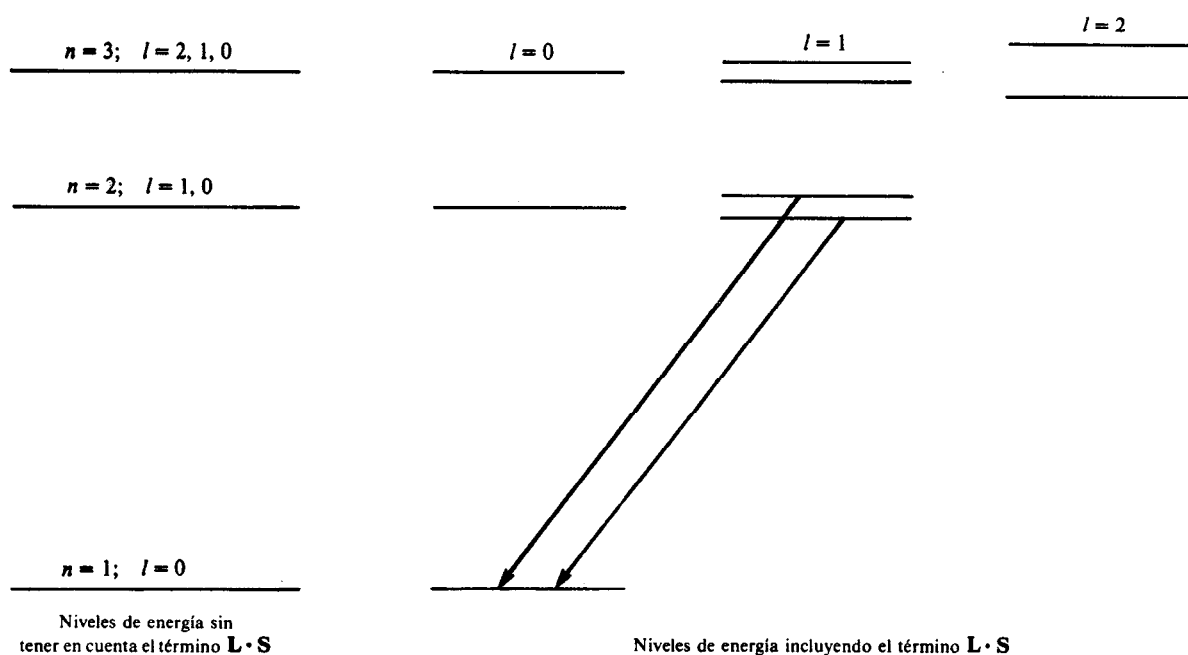


Fig. 22-1

En esta notación, la magnitud de \mathbf{J} está cuantizada de acuerdo con

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)} \hbar \quad (22.3)$$

Los posibles valores del número cuántico J son

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, |L - S| \quad (22.4)$$

donde L y S son los números cuánticos orbital y de spin, respectivamente. Como en el caso de los momentos orbital y de spin, la componente de \mathbf{J} en la dirección del eje z se encuentra cuantizada separadamente. Así

$$J_z = M_J \hbar \quad M_J = J, J - 1, J - 2, \dots, -J \quad (22.5)$$

Para un átomo como el del hidrógeno, $S = 1/2$ y (22.4) se convierte en

$$J = \begin{cases} L + S, L - S & L > 0 \\ S & L = 0 \end{cases} \quad (22.6)$$

Problemas resueltos

22.1. Expresar $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ en función de J , L y S .

Calculando $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} \equiv |\mathbf{J}|^2$, donde $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, tenemos

$$|\mathbf{J}|^2 = (\mathbf{L} + \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{S}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = |\mathbf{L}|^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + |\mathbf{S}|^2$$

ó

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (|\mathbf{J}|^2 - |\mathbf{L}|^2 - |\mathbf{S}|^2)$$

Reemplazando $|\mathbf{J}|^2 = J(J+1)\hbar^2$, $|\mathbf{L}|^2 = L(L+1)\hbar^2$, $|\mathbf{S}|^2 = S(S+1)\hbar^2$, se obtiene

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]\hbar^2$$

22.2. Calcular los posibles valores de $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ para $L = 1$ y $S = 1/2$.

De la ecuación (22.4), los posibles valores de J son

$$J = L + S = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad J = L + S - 1 = |L - S| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Del problema 22.1

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)] \hbar^2$$

Para $J = 3/2$:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \hbar^2 = \frac{1}{2} \hbar^2$$

Para $J = 1/2$:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \hbar^2 = -\hbar^2$$

La figura 22-2 muestra las orientaciones relativas de los tres vectores.

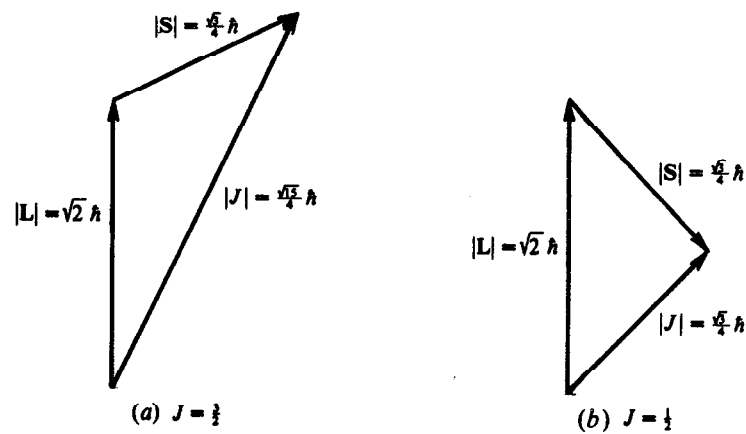


Fig. 22-2

22.3. Calcular la intensidad del campo magnético producido por el movimiento orbital del electrón que origina las dos líneas D del sodio (5889.95 Å, 5895.92 Å).

Esta transición tiene lugar entre los estados $L = 1$ y $L = 0$; solamente se desdobla el estado $L = 1$. La diferencia de energía entre los subestados de $L = 1$ puede obtenerse de la diferencia de las longitudes de onda, a partir de

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$|dE| = \frac{hc|d\lambda|}{\lambda^2} = \frac{(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å})(5.97 \text{ Å})}{(5890 \text{ Å})^2} = 2.13 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

La diferencia de energía se consigue también de (22.1). Utilizando (21.4), con $g_s = 2$, tenemos

$$E_B = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B} = -\mu_{sz} B = \frac{e}{m} m_s \hbar B$$

por lo tanto

$$\Delta E_B = \frac{e\hbar}{m} B \Delta m_s = \frac{e\hbar}{m} B \left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = 2 \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) B$$

Luego,

$$2.13 \times 10^{-3} \text{ eV} = 2 \left(5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) B$$

$$B = 18.4 \text{ T}$$

22.4. Calcular el valor de K en (22.2) utilizando la información dada en el problema 22.3 y $S = 1/2$.

Para $S = 1/2$, los dos estados para $L = 1$ son $J = 3/2$ y $J = 1/2$. Del problema 22.2 tenemos

$$\begin{aligned} J = \frac{3}{2} : \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \hbar^2 \\ J = \frac{1}{2} : \quad \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} &= -\hbar^2 \end{aligned}$$

De (22.2) se obtiene $\Delta E_s = K(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})_{\text{superior}} - K(\mathbf{L} \cdot \mathbf{S})_{\text{inferior}}$, o

$$2.13 \times 10^{-3} \text{ eV} = K\left(\frac{1}{2} \hbar^2\right) - K(-\hbar^2) = K\left(\frac{3}{2} \hbar^2\right) = K \frac{3}{2} (0.658 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s})^2$$

Resolviendo,

$$K = 3.28 \times 10^{27} \frac{1}{\text{eV} \cdot \text{s}^2}$$

Problemas suplementarios

- 22.5.** Calcular los valores posibles de J para $L = 3$ y $S = 1/2$. *Resp.* $\frac{7}{2}; \frac{5}{2}$
- 22.6.** En el problema 22.5, calcular $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$. *Resp.* $\frac{3}{2} \hbar^2; -2\hbar^2$
- 22.7.** Calcular la intensidad del campo magnético producido por el movimiento orbital del electrón que ocasiona las líneas 7664.1 Å y 7699.0 Å, observadas en la transición del potasio de los estados $L = 1$ a $L = 0$.
Resp. 63.3 T
- 22.8.** Repetir el problema 22.4 con los datos del problema 22.7 si $S = 1/2$. *Resp.* $1.13 \times 10^{28} \frac{1}{\text{eV} \cdot \text{s}^2}$

Capítulo 23

El principio de exclusión de Pauli

23.1 INTRODUCCION

Hasta aquí hemos considerado sistemas mecánico-cuánticos con varios niveles de energía, pero solamente un electrón efectivo, es decir, átomos como el del hidrógeno. Hemos encontrado que en ausencia de un fuerte acoplamiento spin-órbita, el acoplamiento del electrón se describe precisando los valores de sus cuatro números cuánticos (n, l, m_l, m_s) , asociados respectivamente con su energía, momentum angular orbital, componente en z del momentum angular orbital y la componente en z de su spin. Cuando se dan estos cuatro números cuánticos, se dice que el *estado* del sistema (un electrón) ha sido determinado.

En este capítulo y en los siguientes describiremos sistemas mecánico-cuánticos que tienen varios niveles de energía y *más de un electrón*.

23.2 EL PRINCIPIO DE EXCLUSION DE PAULI

Mediante análisis de datos espectroscópicos de átomos polieletrónicos, en 1924 Wolfgang Pauli llegó a la conclusión de que en un sistema mecánico-cuántico, *dos electrones no pueden ocupar el mismo estado*. Este resultado se conoce como *principio de exclusión de Pauli*; dicho de otro modo, el principio enunciado establece que en un mismo átomo, dos electrones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos (n, l, m_l, m_s) .

El principio de exclusión de Pauli correlaciona varios hechos experimentales importantes de la estructura atómica y proporciona la explicación de la tabla periódica de los elementos, objeto del capítulo 24. No obstante, para ilustrar el principio de exclusión de Pauli discutiremos el problema sencillo de una o más partículas de masa m que se mueven en línea recta, restringidas entre los puntos 0 y a , por ejemplo, partículas en una "caja" unidimensional de longitud a .

23.3 UNA PARTICULA EN UNA CAJA UNIDIMENSIONAL

El problema de una partícula única en una caja unidimensional fue resuelto anteriormente en el problema 17.3. Se encontró que la energía de la partícula no podía variar continuamente, sino que podía tomar solamente valores discretos dados por

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La figura 23-1(a) muestra estos niveles de energía. Consideremos ahora que la partícula en la caja es un electrón con spin intrínseco. El estado del sistema será determinado por el par de números cuánticos (n, m_s) . En la figura 23-1(b) el electrón se encuentra en el estado $n = 1$ con "spin hacia arriba" ($m_s = +\frac{1}{2}$); en la figura 23-1(c) se encuentra en el estado $n = 3$ con "spin hacia abajo" ($m_s = -\frac{1}{2}$).

23.4 VARIAS PARTICULAS EN UNA CAJA UNIDIMENSIONAL

El principio de exclusión de Pauli tiene una importante consecuencia en el caso en que más de una partícula se encuentre en una caja unidimensional. En lo sucesivo supondremos que los niveles de energía no se alteran con la presencia de más de una partícula.

Con dos electrones, el estado fundamental del sistema (estado de mínima energía) contará con ambos electrones en el nivel de energía $n = 1$, uno de ellos con spin hacia arriba ($1, +\frac{1}{2}$) y el otro con spin hacia abajo ($1, -\frac{1}{2}$), como se indica en la figura 23-2(a). Obsérvese que los dos electrones *no* tienen el mismo conjunto de números cuánticos (n, m_s) .

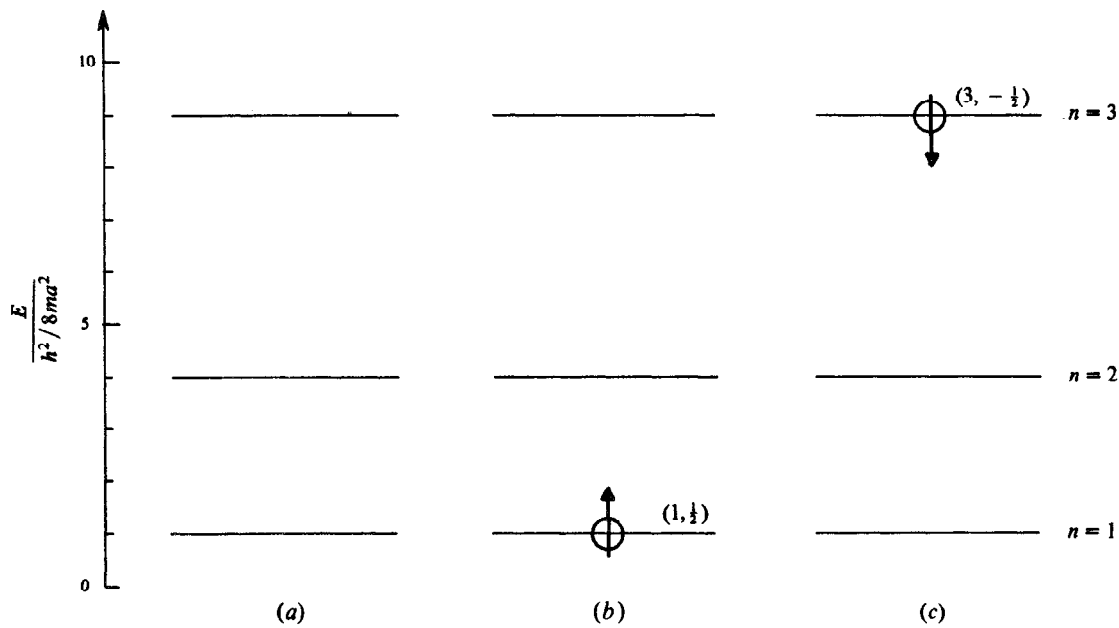


Fig. 23-1

Consideremos ahora qué ocurre cuando se agrega al sistema un tercer electrón. El principio de exclusión de Pauli no permite que este electrón ocupe el nivel de energía $n = 1$; puesto que si estuviese en el nivel $n = 1$, entonces dos de los tres electrones tendrían el mismo conjunto de números cuánticos (n, m_s). El tercer electrón debe ir, por lo tanto, a un nivel de energía *diferente*, al nivel $n = 2$ si el sistema está en su estado fundamental, como se muestra en la figura 23-2(b) para una configuración con spin hacia arriba.

Un razonamiento análogo indica que un cuarto electrón puede ubicarse en el nivel $n = 2$, pero cuando se agrega un quinto electrón, debe ir al nivel $n = 3$, como se muestra en la figura 23-2(c) para una configuración con spin hacia abajo. De este modo se ve que el principio de exclusión de Pauli trae como consecuencia un aumento en la energía total del estado fundamental del sistema, hasta un valor bastante mayor que el que tendría si todos los electrones ocuparan el nivel de energía $n = 1$.

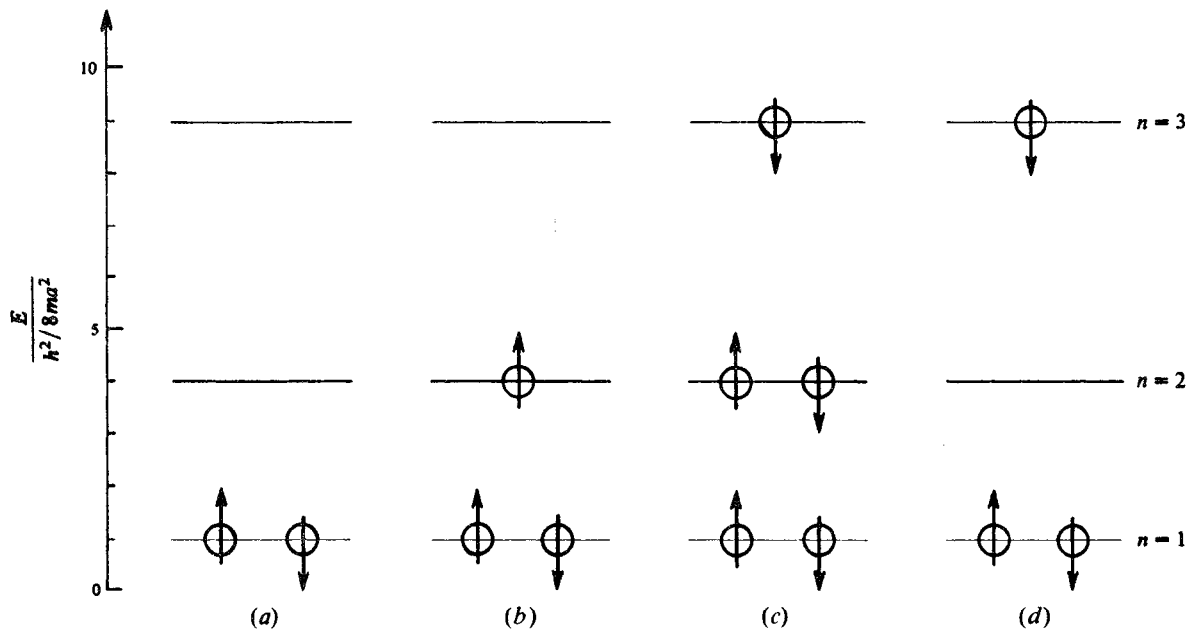


Fig. 23-2

Los anteriores estados excitados aparecen cuando los electrones no ocupan todos los niveles más bajos de energía disponibles, como se muestra en la figura 23-2(d) para un sistema de tres electrones. Al igual que en los sistemas de un electrón, es posible la emisión de energía en forma de fotones, cuando los electrones excitados buscan de nuevo la configuración del estado fundamental.

Problemas resueltos

- 23.1. Calcular los tres primeros niveles de energía para tres electrones que no interactúan entre sí y se encuentran en un pozo rectangular de ancho 6 Å y profundidad infinita.

Los niveles de energía están dados por

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} = \frac{n^2 (hc)^2}{8(mc^2)a^2} = \frac{n^2 (12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å})^2}{8(0.511 \times 10^6 \text{ eV})(6 \text{ Å})^2} = 1.04n^2 \text{ eV}$$

Por lo tanto,

$$E_1 = 1.04 \text{ eV}, E_2 = 4.16 \text{ eV}, E_3 = 9.36 \text{ eV}.$$

- 23.2. Calcular las energías de los fotones que serían emitidos cuando el sistema de cuatro electrones representado en la figura 23-3(a) vuelva a su estado fundamental.

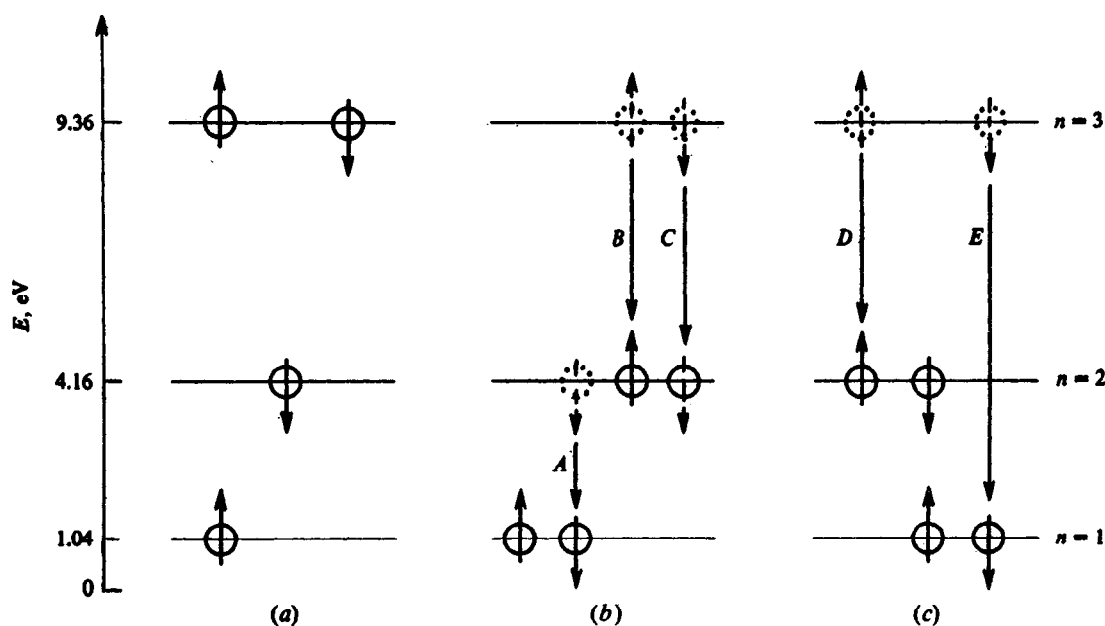


Fig. 23-3

En las figuras 23-3(b) y (c) se indican las posibles transiciones a través de las cuales el sistema vuelve a su estado fundamental. La energía del fotón emitido será igual a la diferencia de energía entre los niveles inicial y final. Las transiciones B, C y D tienen la misma diferencia de energía y, por lo tanto, dan lugar a fotones equienergéticos.

$$E_A = E_2 - E_1 = 4.16 \text{ eV} - 1.04 \text{ eV} = 3.12 \text{ eV}$$

$$E_B = E_C = E_D = E_3 - E_2 = 9.36 \text{ eV} - 4.16 \text{ eV} = 5.20 \text{ eV}$$

$$E_E = E_3 - E_1 = 9.36 \text{ eV} - 1.04 \text{ eV} = 8.32 \text{ eV}$$

- 23.3. Considere tres partículas que no interactúan entre sí y se encuentran en su estado fundamental en un pozo rectangular y paredes infinitas [figura 23-4(a)]. ¿Qué ocurre cuando aparece un campo magnético que interactúa con los spines de las partículas?

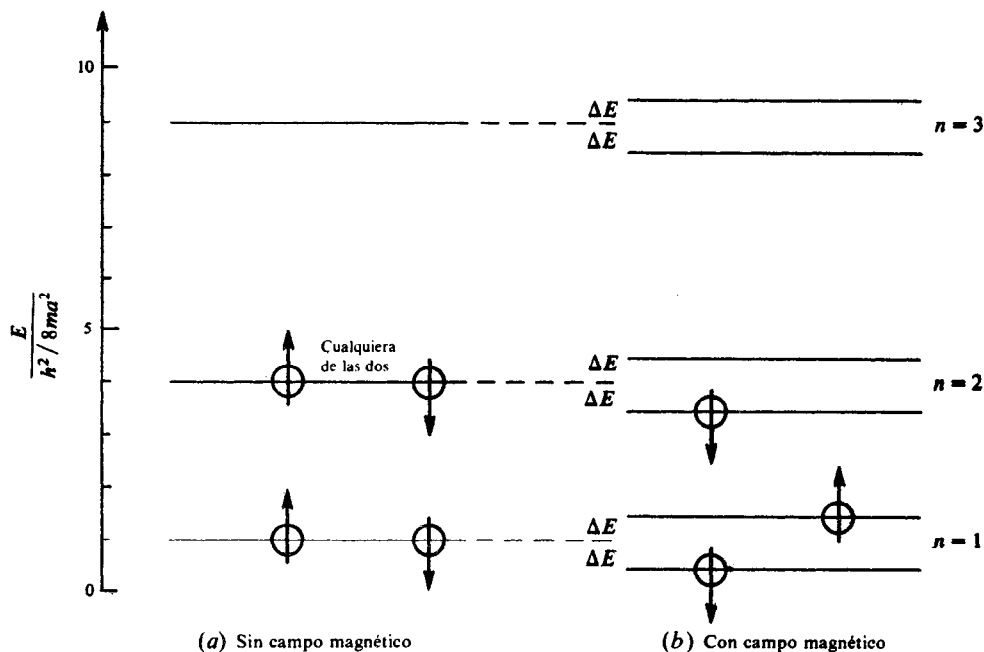


Fig. 23-4

Tan pronto se aplica el campo magnético externo, el nuevo valor (E_i) de la energía de cada partícula es igual al valor original (E_n) más la energía de interacción:

$$E_i = E_n - \mu_z \cdot \mathbf{B} = E_n - \mu_{sz} B = E_n + m_s \frac{e\hbar}{m} B$$

(ver problema 22.3). Puesto que $m_s = \pm \frac{1}{2}$, los nuevos niveles estarán separados del antiguo en una cantidad $\Delta E = \pm e\hbar B / 2m$, con un spin $-\frac{1}{2}$ para la partícula que ocupe el subnivel inferior y spin $+\frac{1}{2}$ para la que ocupe el subnivel superior [figura 23-4(b)]. A diferencia de la situación que se presenta en ausencia de campo magnético, la partícula en el nivel $n = 2$ tendrá su spin de $-\frac{1}{2}$ si el sistema se encuentra en su estado fundamental.

- 23.4. En un pozo rectangular de ancho a y paredes infinitas hay 5×10^9 electrones por metro. Calcular la energía del electrón más energético, si todos los niveles inferiores de energía se encuentran llenos.

Puesto que hay dos electrones en cada nivel de energía, el número total de electrones incluyendo el n -ésimo o último nivel es $N = 2n$. El número total de electrones es por lo tanto

$$\frac{N}{a} = \frac{2n}{a} = 5 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$$

entonces

$$\frac{n}{a} = (2.5 \times 10^9 \text{ m}^{-1}) (10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{\AA}}) = 0.25 \text{ \AA}^{-1}$$

La energía del n -ésimo nivel es

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8ma^2} = \left(\frac{n}{a}\right)^2 \frac{(hc)^2}{8(mc^2)} = (0.25 \text{ \AA}^{-1})^2 \frac{(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{8(0.511 \times 10^6 \text{ eV})} = 2.35 \text{ eV}$$

- 23.5. Si un núcleo se considera aproximadamente como un pozo rectangular, en el cual hay un neutrón por cada 10^{-15} m , ¿cuál es la energía del neutrón más energético? La masa en reposo del neutrón es de 938 MeV.

Como en el problema 23.4

$$\frac{N}{a} = \frac{2n}{a} = 10^{15} \text{ m}^{-1}$$

$$\frac{n}{a} = (0.5 \times 10^{15} \text{ m}^{-1}) \left(10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{\AA}} \right) = 0.5 \times 10^5 \text{ \AA}^{-1}$$

$$E_n = \left(\frac{n}{a} \right)^2 \frac{(hc)^2}{8(mc^2)} = (0.5 \times 10^5 \text{ \AA}^{-1})^2 \frac{(12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{8(938 \times 10^6 \text{ eV})} = 51.2 \times 10^6 \text{ eV} = 51.2 \text{ MeV}$$

Problemas suplementarios

- 23.6.** ¿Cuál sería la energía del fotón emitido en una transición del nivel $n = 3$ a $n = 2$ en el pozo rectangular de paredes infinitas del problema 23.1? *Resp.* 5.20 eV
- 23.7.** Un pozo rectangular de paredes infinitas tiene un ancho de 10^{-14} m. ¿Cuáles son los valores de los tres primeros niveles de energía para un neutrón que se encuentra en este pozo ($m_n = 938$ MeV)?
Resp. 2.05 MeV; 8.20 MeV; 18.45 MeV
- 23.8.** Repetir el problema 23.7 para un electrón en un pozo de ancho 1 Å. *Resp.* 37.6 eV; 150 eV; 338 eV
- 23.9.** Repetir el problema 23.2 para neutrones. *Resp.* 615 MeV; 1024 MeV; 1634 MeV
- 23.10.** Calcular la energía necesaria para producir un "vuelco" en el spin del electrón más alto del problema 23.3, si el campo magnético es de 2 T. *Resp.* 2.32×10^{-4} eV

Capítulo 24

Átomos polieletrónicos y la tabla periódica

24.1 NOTACION ESPECTROSCOPICA PARA CONFIGURACIONES ELECTRONICAS EN LOS ATOMOS

Podemos obtener una buena parte de la información acerca del carácter de los estados atómicos de varios electrones, suponiendo en primer lugar que cada electrón se mueve independientemente en el campo del núcleo y en el campo promedio producido por los demás electrones. Las otras interacciones existentes son tratadas por separado, como se describen a continuación. En un *modelo de partícula independiente*, los números cuánticos n , l , m_l , y m_s se utilizan para describir cada estado del electrón.

Para un valor dado de n , los valores enteros que puede tomar el número cuántico l son

$$l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

Los valores de l se designarán por letras minúsculas de acuerdo con el siguiente esquema:

valor de l :	0	1	2	3	4	5	...
símbolo:	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	...

La convención para especificar el número de electrones en una órbita en particular, definida por los números cuánticos (n, l) , consiste en dar el valor de n seguido de la letra que representa a l , con el número de electrones como un superíndice derecho. Las diferentes órbitas se escriben una a continuación de la otra, definiendo así una *configuración electrónica*. Por ejemplo, la configuración de los cinco electrones en el estado fundamental del boro es, $1s^2 2s^2 2p^1$.

Los electrones con el mismo valor de n ocupan la misma *capa* electrónica. Las diferentes capas se designan con letras mayúsculas de acuerdo con el siguiente esquema.

valor de n :	1	2	3	4	...
capa:	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	...

Dentro de una misma capa son posibles diferentes valores de l ; cada valor de l define una subcapa o subnivel (lo cual equivale a una órbita). Por ejemplo, en la configuración del estado estacionario del boro, $1s^2 2s^2 2p^1$, hay dos electrones en la subcapa *s* y un electrón en la subcapa *p* de la capa *L*.

24.2 LA TABLA PERIODICA Y EL MODELO ATOMICO DE CAPAS

La configuración electrónica para los átomos de varios electrones con la mínima energía, o sea en el estado fundamental, puede explicarse utilizando el principio de exclusión de Pauli y el modelo atómico de capas. El principio de exclusión de Pauli establece que no pueden existir dos electrones en un mismo átomo con igual conjunto de números cuánticos (n, l, m_l, m_s) . Por lo tanto, el número de combinaciones de m_l y m_s para una determinada subcapa (n, l) da el máximo número de electrones en esa subcapa.

Para cada valor de l hay $2l + 1$ valores de m_l y para cada valor de l y m_l hay dos valores de m_s ($m_s = \pm \frac{1}{2}$). Así, el mayor número de electrones que puede ubicarse en una subcapa, sin violar el principio de exclusión de Pauli, es $2(2l + 1)$, como se muestra en la siguiente tabla.

valor de l :	0	1	2	3
letra que representa la subcapa:	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>
máximo número de electrones:	2	6	10	14

El orden en el cual se llenan las diferentes subcapas en la mayoría de los átomos se encuentra leyendo hacia arriba la figura 24-1. Esta figura también muestra las energías relativas en cualquier átomo. Las separaciones observadas en la figura 24-1 se representan para $Z = 2, 10, 18, 36, 54$ y 86 , que son los gases nobles o inertes, químicamente inactivos y muy difíciles de ionizar. A excepción del He ($Z = 2$), las separaciones corresponden a un lleno completo en la subcapa p . Las otras propiedades de la tabla periódica de los elementos pueden explicarse por la forma en que se llenan las diferentes subcapas, como se muestra en los problemas resueltos.

Capa	Nivel	Máximo número de electrones	Número total de electrones
<i>P</i>	<i>6p</i>	6	86
	<i>5d</i>	10	
	<i>4f</i>	14	
	<i>6s</i>	2	
<i>O</i>	<i>5p</i>	6	54
	<i>4d</i>	10	
	<i>5s</i>	2	
<i>N</i>	<i>4p</i>	6	36
	<i>3d</i>	10	
	<i>4s</i>	2	
<i>M</i>	<i>3p</i>	6	18
	<i>3s</i>	2	
<i>L</i>	<i>2p</i>	6	10
	<i>2s</i>	2	
<i>K</i>	<i>1s</i>	2	2

Fig. 24-1

24.3 NOTACION ESPECTROSCOPICA PARA LOS ESTADOS ATOMICOS

En un átomo cada estado se caracteriza por tener un conjunto de números cuánticos L, S, J relacionados respectivamente, con el momentum angular orbital total del átomo, el momentum angular total del spin y el momentum angular total (ver sección 22.3).

El valor particular de L para un estado atómico se designa, en notación espectroscópica, por una letra mayúscula de acuerdo con el siguiente esquema.

valor de L :	0	1	2	3	4	5	...
símbolo:	<i>S</i>	<i>P</i>	<i>D</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	...

Los estados atómicos se especifican mediante el símbolo de L , con el valor $2S + 1$ como un super índice a la izquierda y el valor de J como un subíndice a la derecha. Por ejemplo, en el estado fundamental del boro $L = 1, S = \frac{1}{2}, J = \frac{1}{2}$ y en notación espectroscópica es $^2P_{3/2}$.

24.4 ESTADOS ATOMICOS EXCITADOS Y ACOPLAMIENTO LS

El análisis matemático de los estados atómicos con varios electrones es complicado, debido a que además de las interacciones de Coulomb entre los electrones y el núcleo, existen también interacciones de Coulomb entre electrones individuales, interacciones entre los momenta angulares orbitales de los electrones y los spines electrónicos, e interacciones entre los spines de los diferentes electrones. Para los átomos livianos y de peso medio se ha encontrado que el esquema denominado “acoplamiento LS ”, desarrollado por Russell y Saunders en 1925, proporciona un método para entender los estados atómicos observados. Para el acoplamiento LS , el momentum angular orbital L del átomo es la suma vectorial de los momenta angulares orbitales de los electrones individuales,

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i \quad (24.1)$$

En forma análoga, el momentum angular de spin S del átomo es la suma vectorial de los momenta angulares de spin de los electrones individuales,

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{S}_i \quad (24.2)$$

El momentum angular total del átomo está dado por

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (24.3)$$

como en la sección 22.3. Las magnitudes de los tres vectores de momentum angular atómico están cuantizadas de acuerdo con

$$|\mathbf{L}|^2 = L(L+1)\hbar^2 \quad |\mathbf{S}|^2 = S(S+1)\hbar^2 \quad |\mathbf{J}|^2 = J(J+1)\hbar^2 \quad (24.4)$$

y sus componentes en z están cuantizadas de acuerdo con

$$L_z = M_L \hbar \quad S_z = M_S \hbar \quad J_z = M_J \hbar \quad (24.5)$$

Los números cuánticos de la componente en z están relacionados con los de los electrones individuales de acuerdo con las siguientes reglas de adición:

$$M_L = \sum_i (m_l)_i \quad M_S = \sum_i (m_s)_i \quad M_J = M_L + M_S \quad (24.6)$$

Conociendo M_L , M_S , y M_J , uno puede deducir L , S y J de las condiciones

$$M_L = L, L-1, L-2, \dots, -L \quad (24.7)$$

$$M_S = S, S-1, S-2, \dots, -S \quad (24.8)$$

$$M_J = J, J-1, J-2, \dots, -J \quad (24.9)$$

Es posible excitar un átomo a niveles superiores al estado fundamental. Al regresar a su estado fundamental, el átomo emitirá radiaciones que corresponden a las líneas del espectro. Para transiciones fuertes se aplican las siguientes reglas de selección:

$$\Delta J = 0, \pm 1 \quad (\text{pero } J = 0 \rightarrow J = 0 \text{ no es permitida})$$

$$\Delta L = 0, \pm 1 \quad \Delta S = 0 \quad \Delta M_J = 0, \pm 1 \quad (\text{si } \Delta J = 0, M_J = 0 \rightarrow M_J = 0 \text{ no es permitida})$$

Estas son las transiciones del dipolo eléctrico. Otras transiciones pueden presentarse, pero se ha encontrado que son mucho más débiles. Si la transición de dipolo eléctrico involucra sólo un electrón, $\Delta L \neq 0$.

24.5 EL EFECTO ZEEMAN ANOMALO

En una descripción semiclásica, el efecto Zeeman normal (desdoblamiento triple de una línea) se encuentra asociado con la precesión del momento magnético atómico μ alrededor de un campo magnético externo \mathbf{B} (problema 20.2). Cuanto más fuerte sea el campo, más rápida será la precesión y mayor la separación entre las tres líneas espectrales en que se desdobra la que era única línea en ausencia de campo. Cuando la

interacción $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ es fuerte comparada con la interacción de uno de los dos vectores con \mathbf{B} , entonces \mathbf{S} y \mathbf{L} precesan rápidamente alrededor de \mathbf{J} ; dando como resultado una precesión rápida de $\boldsymbol{\mu}$ alrededor de \mathbf{J} ; este sistema precesa entonces lentamente alrededor de \mathbf{B} . De este modo surge el efecto Zeeman anómalo, cuya intensidad depende del componente de $\boldsymbol{\mu}$ a lo largo de \mathbf{J} . En los problemas 24.17 a 24.21 se muestra que el efecto Zeeman anómalo produce en un desdoblamiento más de tres líneas espectrales.

Problemas resueltos

24.1. Demostrar que bajo el acoplamiento LS , el número cuántico del momentum angular total tiene los valores dados por (22.4), es decir,

$$J = L + S, L + S - 1, L + S - 2, \dots, |L - S|$$

De (24.7) y (24.8),

$$M_L = L, L - 1, L - 2, \dots, -(L - 2), -(L - 1), -L$$

$$M_S = S, S - 1, S - 2, \dots, -(S - 2), -(S - 1), -S$$

y M_J se calcula de $M_J = M_L + M_S$.

Tabla 24-1

(1)	Valor de M_J	$L + S$	$L + S - 1$...	$L - S + 1$	$L - S$...	$-(L - S)$	$-(L - S + 1)$...	$-(L + S - 1)$	$-(L + S)$
(2)	Multiplicidad	1	2	(etapas de +1)	2S	2S + 1	(constante)	2S + 1	2S	(etapas de -1)	2	1
	$J = L + S$	1	1	...	1	1	...	1	1	...	1	1
	$J = L + S - 1$		1	...	1	1	...	1	1	...	1	
	\vdots				\vdots	\vdots		\vdots	\vdots			
	$J = L - S + 1$				1	1	...	1	1			
	$J = L - S$					1	...	1				
(3)	Multiplicidad asignada a:											
(4)	Restante Multiplicidad no asignada	0	0	...	0	0	...	0	0	...	0	0

Suponiendo que $L \geq S$. La fila (1) de la tabla 24-1 muestra los valores calculados de M_J ; en la fila (2) aparecen los valores de las combinaciones de (M_L, M_S) que dan lugar a cada valor de M_J . Por ejemplo, la multiplicidad de $L + S - 2$ es 3 porque

$$L + S - 2 = \begin{cases} (L) + (S - 2) \\ (L - 1) + (S - 1) \\ (L - 2) + (S) \end{cases}$$

Obsérvese que la suma de las multiplicidades es

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + 2S) + (2S + 1)[2(L - S) + 1] = 2 \frac{2S(2S + 1)}{2} + (2S + 1)(2L - 2S + 1) \\ = (2S + 1)(2L + 1)$$

o sea, el número total de combinaciones de (M_L, M_S) .

Los valores deseados de J son tales que a cada uno de ellos corresponde un recorrido de valores de M_J :

$$M_J = J, J - 1, \dots, -(J - 1), -J$$

Las filas (3) y (4) muestran cómo los valores

$$J = L + S, L + S - 1, \dots, L - S = |L - S|$$

agotan las combinaciones (M_L, M_S).

Para el caso en que $S \geq L$, simplemente intercambie L y S en la demostración anterior.

24.2. Hallar el máximo número de electrones que puede ocupar una subcapa d .

Para una subcapa d , $l=2$. Como se indica en la sección 24.2, el máximo número de electrones en la subcapa está dado por

$$2(2l+1) = 2(2 \times 2 + 1) = 10$$

que corresponden a 10 combinaciones de m_l y m_s que se muestran en la tabla 24-2.

Tabla 24-2

l	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
m_l	2	2	1	1	0	0	-1	-1	-2	-2
m_s	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

24.3. Demostrar que el máximo número de electrones que puede situarse en una capa determinada por un número cuántico n es $2n^2$.

El número total de subestados con un l dado es $2(2l+1)$. Los valores de l son

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

por lo tanto, el número de electrones en una capa n llena es

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2[1 + 3 + \dots + (2n-1)]$$

Definamos

$$\mathfrak{S} = 1 + 3 + \dots + (2n-1)$$

que escrito de adelante hacia atrás es

$$\mathfrak{S} = (2n-1) + (2n-3) + \dots + 1$$

Sumando ordenadamente estas dos expresiones, se obtiene

$$2\mathfrak{S} = 2n + 2n + \dots + 2n = (2n)n$$

Por consiguiente, $N = 2\mathfrak{S} = 2n^2$.

24.4. Demostrar que los átomos compuestos de subcapas llenas tienen un estado fundamental dado por 1S_0

La componente en z del momentum angular orbital total del átomo $M_L\hbar$ y la componente en z del momentum angular total del spin $M_S\hbar$, se obtiene de

$$M_L = \sum m_l \quad M_S = \sum m_s$$

las sumas se han efectuado sobre todos los electrones. Los electrones en una subcapa completa l tienen los siguientes valores de m_l y m_s :

$$(m_l, m_s) = (l, \pm \frac{1}{2}), (l-1, \pm \frac{1}{2}), \dots, (-l, \pm \frac{1}{2})$$

Así, sumando sobre todos los electrones en el átomo, se obtiene siempre $M_L = 0$ y $M_S = 0$. Puesto que éstos son los únicos valores posibles de M_L y M_S podemos obtener solamente $L = 0$ y $S = 0$, lo que a su vez implica que $J = 0$. El estado es por lo tanto 1S_0 .

- 24.5. Para el hidrógeno ($l = L$) se han encontrado los estados de energía mostrados en la figura 24-2. ¿Cuáles son las posibles transiciones de dipolo eléctrico para estos estados?

Las transiciones deben obedecer la regla de selección $\Delta l = \pm 1$. Por eso, solamente son permitidas las transiciones que se indican en la figura 24-3.

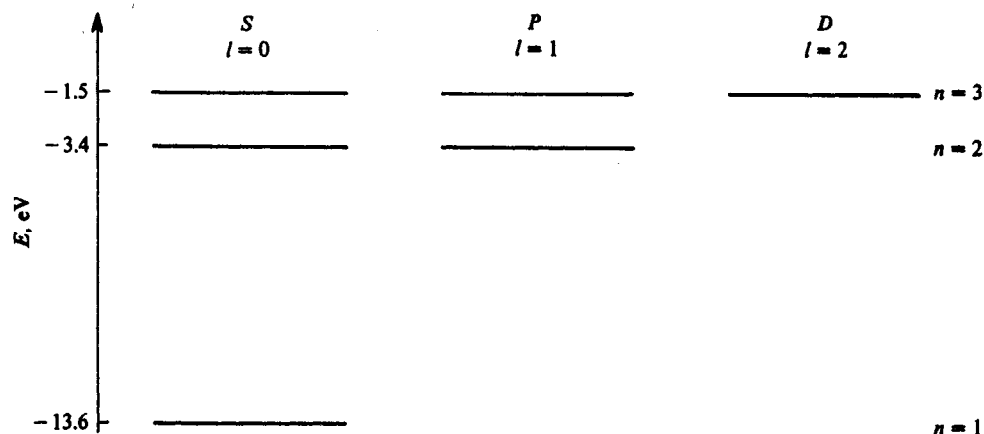


Fig. 24-2

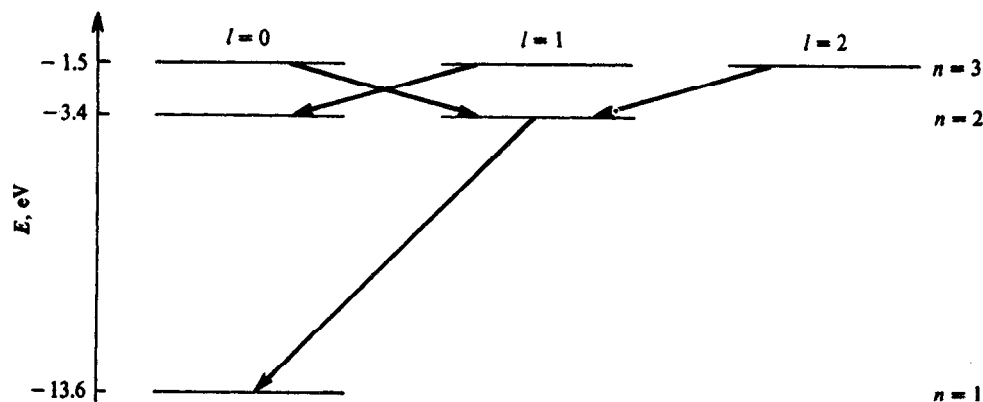


Fig. 24-3

- 24.6. Calcular $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ para un estado 3F_2 .

Para un estado 3F_2 , $S = 1$, $L = 3$ y $J = 2$. Del resultado del problema 22.1, tenemos

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]\hbar^2 = \frac{1}{2} [2(2+1) - 3(3+1) - 1(1+1)]\hbar^2 = -4\hbar^2$$

- 24.7. Determinar las transiciones que tienen lugar de un estado 3F a un estado 3D , en presencia de una interacción $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$.

Los tamaños relativos de los desdoblamientos spin-órbita se obtienen calculando

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} [J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)]\hbar^2$$

Ver tabla 24-3, en la cual J se ha calculado de (22.4).

Tabla 24-3

Estado	L	S	J	$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$
3F	3	1	4, 3, 2	$3\hbar^2, -1\hbar^2, -4\hbar^2$
3D	2	1	3, 2, 1	$2\hbar^2, -1\hbar^2, -3\hbar^2$

En este caso, las interacciones $L \cdot S$ desdoblan cada nivel de energía en tres partes, como se muestra en la figura 24-4. También se muestran allí las transiciones que satisfacen la regla de selección $\Delta J = 0, \pm 1$ (mas no $0 \rightarrow 0$). La regla de transición $\Delta L = \pm 1$ se cumple automáticamente.

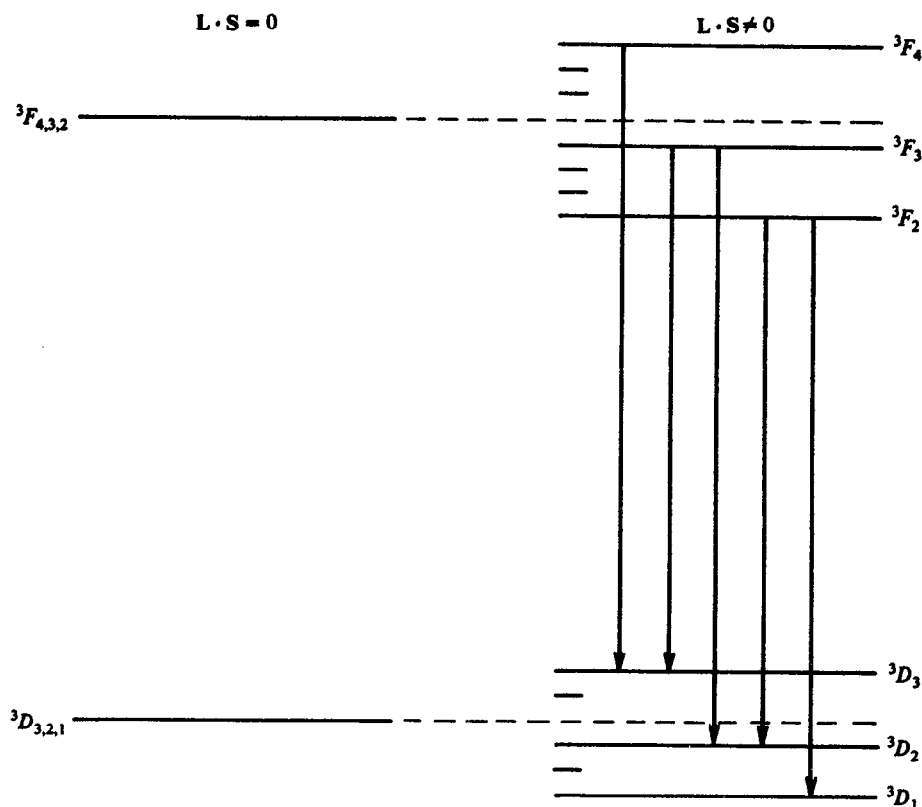


Fig. 24-4

- 24.8. Suponiendo que un átomo de ${}^3\text{Li}$ se comporte como el del hidrógeno, determine la energía de ionización de un electrón en un estado $2s$. Explique en forma cualitativa la diferencia con el valor experimental de 5.39 eV.

Si se desprecian los dos electrones interiores, los electrones de valencia estarían en la órbita de Bohr $n = 2$ con $Z = 3$. De la ecuación (19.5),

$$E_n = - \frac{(13.58)Z^2}{n^2} \text{ eV} \quad \text{así} \quad E_2 = - \frac{(13.58)(3)^2}{2^2} \text{ eV} = -30.6 \text{ eV}$$

por lo tanto, la energía de ionización es 30.6 eV. Por otra parte, si consideramos que los dos electrones interiores resguardan completamente el núcleo del ${}^3\text{Li}$, para el electrón exterior aparece $Z = 1$, entonces

$$E_2 = - \frac{13.58}{2^2} \text{ eV} = -3.4 \text{ eV}$$

y la energía de ionización es 3.4 eV. La respuesta verdadera, 5.39 eV, se encuentra entre estos dos valores. Esto demuestra que el electrón de valencia penetra al corazón del helio y así le "siente" parte de la carga nuclear aunque no toda. Los electrones interiores blindan parcialmente el electrón de valencia de la carga nuclear.

- 24.9. La energía de ionización medida para el He es $E_M = 24.60 \text{ eV}$. Supongamos que la energía de interacción entre los dos electrones de un átomo de He se considera como la diferencia entre sus energías comunes de enlace y la energía de ionización medida, si cada uno se moviera independientemente en una órbita de Bohr. Calcular esta energía de interacción.

De acuerdo con la teoría de Bohr, la energía en el estado fundamental de un electrón en el campo de un núcleo de carga Ze es [ver ecuación (19.5)]

$$E_1 = -Z^2(13.58 \text{ eV})$$

Para el He, $Z = 2$; por eso, si se trata cada electrón como si fuera completamente independiente del otro electrón, su energía de enlace según la teoría de Bohr sería

$$E_B = -E_1 = (2)^2(13.58 \text{ eV}) = 54.32 \text{ eV}$$

y la energía de interacción sería

$$E_i = E_B - E_M = 54.32 \text{ eV} - 24.60 \text{ eV} = 29.72 \text{ eV}$$

La energía de interacción es positiva, debido a que la fuerza entre los dos electrones es repulsiva.

24.10. Calcule el promedio de separación entre los electrones del problema 24.9

Si suponemos que la energía de interacción $E_i = 29.72 \text{ eV}$ se debe a la fuerza de Coulomb entre los dos electrones, la separación promedio d se obtiene de

$$E_i = k \frac{e^2}{d}$$

$$(29.72 \text{ eV}) \left(1.60 \times 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}} \right) = \left(8.998 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \right) \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{d}$$

Resolviendo, $d = 0.484 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.484 \text{ \AA}$.

4.11. Dar la configuración electrónica para los primeros cinco gases nobles.

Los gases nobles son aquellos elementos con números de electrones que llenan completamente las diferentes capas que se muestran en la figura 24-1. Las configuraciones electrónicas para el estado fundamental de los cinco primeros gases nobles se muestran en la tabla 24-4.

Tabla 24-4

Gas noble	Configuración electrónica	Número de electrones (Z)
He	$1s^2$	2
Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	10
Ar	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$	18
Kr	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6$	36
Xe	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6$	54

24.12. Los metales alcalinos tienen un electrón más que un gas noble. Dar las configuraciones electrónicas de los cuatro primeros metales alcalinos.

Cuando una subcapa particular np (es decir, la subcapa p de una capa particular n), correspondiente a uno de los gases nobles, se encuentra completamente llena, el siguiente átomo con Z superior tendrá un $(n+1)s$ electrón agregado al interior de un gas noble. Así tendremos la configuración electrónica del estado fundamental dada en la tabla 24-5.

Tabla 24-5

Metal alcalino	Configuración electrónica	Estructura patrón del gas noble
Li ($Z = 3$)	$1s^2 2s^1$	He
Na ($Z = 11$)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$	Ne
K ($Z = 19$)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$	Ar
Rb ($Z = 37$)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^1$	Kr

Puesto que los metales alcalinos tienen un electrón *s* agregado al interior relativamente inerte, sus espectros son semejantes a los del hidrógeno y sus estados fundamentales son todos $^2S_{1/2}$.

- 24.13.** Los miembros de la *familia de los halógenos* tienen un electrón menos que un gas noble. Dar la configuración electrónica de los tres primeros halógenos.

En un átomo una unidad en *Z* inferior a la de un gas noble, el electrón “perdido” es un electrón *np* (excepto para el H). La configuración electrónica del estado fundamental se muestra en la tabla 24-6.

- 24.14.** Después de llenar la subcapa 4*s*, se llena la subcapa 3*d*. Los 10 elementos así obtenidos se denominan *elementos de transición*. Dar las configuraciones electrónicas de los tres primeros elementos del grupo de transición ($_{21}\text{Sc}$, $_{22}\text{Ti}$, $_{23}\text{V}$). Ver la tabla 24-7.

Tabla 24-6

Halógeno	Configuración electrónica
F (<i>Z</i> = 9)	$1s^2 2s^2 2p^5$
Cl (<i>Z</i> = 17)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$
Br (<i>Z</i> = 35)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^5$

Tabla 24-7

Elemento de transición	Configuración electrónica
Sc (<i>Z</i> = 21)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^1$
Ti (<i>Z</i> = 22)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^2$
V (<i>Z</i> = 23)	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$

- 24.15.** ¿Cuáles son los posibles estados de un átomo, sabiendo que están determinados por dos electrones *np* equivalentes?

Para cada electrón *n* es fijo; *l* = 1; $m_l = 1, 0, -1$; $m_s = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Así, existen $3 \times 2 = 6$ maneras de escoger el estado de cada electrón (m_l, m_s) y, por lo tanto, $6 \times 6 = 36$ formas de especificar el estado de los dos electrones. De estas 36, 6 ubican ambos electrones en el mismo estado, violando así el principio de exclusión de Pauli. Las 30 restantes se convierten en 15 parejas, en donde los miembros de una pareja difieren solamente en relación con la designación del electrón como “electrón 1” ó “electrón 2”. Puesto que no es posible distinguir los electrones, es necesario descartar un miembro de cada pareja, con lo cual quedan 15 posibles subestados atómicos $[(m_l, m_s), (m'_l, m'_s)]$. En la tabla 24-8 calculamos los valores de las componentes en *z* de los números cuánticos atómicos correspondientes a estos 15 subestados.

Tabla 24-8

Subestado	(m_l, m_s)	(m'_l, m'_s)	$M_L = m_l + m'_l$	$M_S = m_s + m'_s$
#1	$(1, -\frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	2	0
#2	$(0, \frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	1	1
#3	$(0, \frac{1}{2})$	$(1, -\frac{1}{2})$	1	0
#4	$(0, -\frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	1	0
#5	$(0, -\frac{1}{2})$	$(1, -\frac{1}{2})$	1	-1
#6	$(0, -\frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{2})$	0	0
#7	$(-1, \frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	0	1
#8	$(-1, \frac{1}{2})$	$(1, -\frac{1}{2})$	0	0
#9	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{2})$	-1	1
#10	$(-1, \frac{1}{2})$	$(0, -\frac{1}{2})$	-1	0
#11	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(1, \frac{1}{2})$	0	0
#12	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(1, -\frac{1}{2})$	0	-1
#13	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(0, \frac{1}{2})$	-1	0
#14	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(0, -\frac{1}{2})$	-1	-1
#15	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-1, \frac{1}{2})$	-2	0

Debemos encontrar ahora los valores de L y S que, compatibles con las ecuaciones (24.7) y (24.8), expliquen los valores (M_L, M_S) de todos los quince subestados (y solamente para éstos). Primero, busquemos el valor máximo en las dos últimas columnas de la tabla 24-8; éste es $M_L = 2$ en el subestado #1. (Si, en el caso más general, más de una pareja (M_L, M_S) contienen el valor máximo, podemos tomar el máximo de nuevo sobre el otro miembro de la pareja.) Entonces, la ecuación (24.7) muestra que el mayor valor de L que debe ser considerado es $L = 2$. Análogamente, $S = 0$. (Según la ecuación (24.8), $S \geq 0$, pero si $S > 0$ entonces el subestado #1 no sería máximo.) Para $L = 2, S = 0$, construimos sin repetir las parejas (M_L, M_S) con $+2 \geq M_L > -2$, $+0 \geq M_S > -0$; v.g. los subestados #1, #3, #6, #10, #15. (Podríamos haber escogido #4 en vez de #3, #8 ó #11 en vez de #6, #13 en vez de #10.)

Ahora se repite el proceso para los 10 subestados restantes. El nuevo subestado máximo es #2, el cual da $L = 1, S = 1$; y a éstos les asignamos los subestados #2, #4, #5, #7, #8, #9, #12, #13, #14.

Por último queda el subestado #11 al cual corresponde $L = 0, S = 0$.

La tabla 24-9 muestra los resultados finales, en ella se ha calculado J a partir de L y S por medio de la ecuación (22.4).

Tabla 24-9

Subestado	L	S	J	Designación del estado atómico
#1, #3, #6, #10, #15	2	0	2	1D_2
#2, #4, #5, #7, #8, #9, #12, #13, #14	1	1	2, 1, 0	$^3P_{2,1,0}$
#11	0	0	0	1S_0

- 24.16.** La configuración para el estado fundamental del ${}_6\text{C}$ es $1s^2 2s^2 2p^2$. Calcular los posibles estados atómicos de esta configuración y compararlos con el espectro observado.

Queremos calcular los posibles valores de L , S y J para los seis electrones. Los dos electrones $1s$ no contribuyen al estado atómico, puesto que ellos forman una concha cerrada (problema 24.4). Los $2s$ electrones tienen $l=0$ y de acuerdo con el principio de Pauli, sus spines deben ser antiparalelos, lo cual da un spin neto de cero para estos dos. Luego el estado atómico es determinado por completo por los electrones $2p$ y, según el problema 24.15, las posibilidades son 1D_2 , 3P_2 , 3P_1 , 3P_0 , y 1S_0 .

El verdadero estado fundamental que muestra el carbón es 3P_0 . Los cinco primeros estados, como se deduce del espectro observado, aparecen en la figura 24-5.

- 24.17.** Sabiendo que

$$\mu_L = -\left(\frac{e}{2m}\right)L \quad \text{y} \quad \mu_S = -2\left(\frac{e}{2m}\right)S$$

muestre en un diagrama vectorial que μ y J no son paralelos.

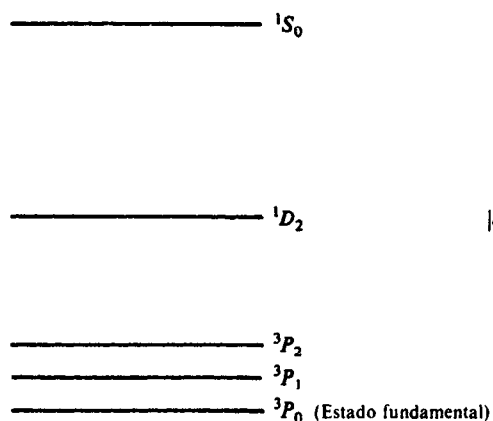


Fig. 24-5

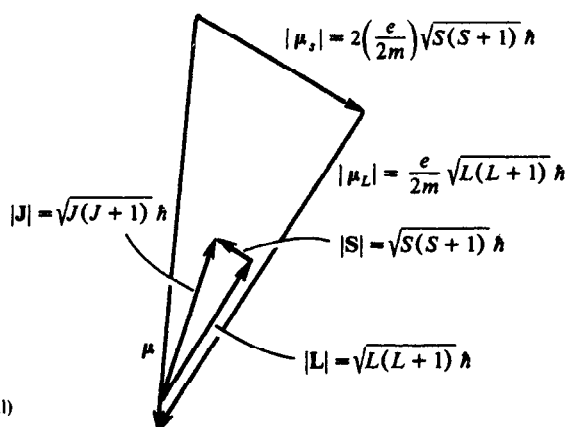


Fig. 24-6

Las relaciones vectoriales $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ y $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S$ se muestran en la figura 24-6. Debido a que

$$\frac{|\boldsymbol{\mu}_S|}{|\mathbf{S}|} = 2 \frac{|\boldsymbol{\mu}_L|}{|\mathbf{L}|}$$

los dos triángulos no son semejantes y, por lo tanto, $\boldsymbol{\mu}$ y \mathbf{J} no son paralelos.

24.18. Calcular la proyección del vector momento magnético total $\boldsymbol{\mu}$ sobre el vector \mathbf{J} del problema 24.17.

Del problema 24.17,

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) = -\frac{e}{2m} (\mathbf{J} + \mathbf{S})$$

La proyección de $\boldsymbol{\mu}$ sobre \mathbf{J} es

$$\frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \left(-\frac{e}{2m} \right) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}}{|\mathbf{J}|}$$

Ahora,

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{J} - \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{S}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - 2\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$$

ó

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{L})$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} &= \left(-\frac{e}{2m} \right) \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{2} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{L})}{|\mathbf{J}|} \\ &= \left(-\frac{e}{2m} \right) \frac{J(J+1)\hbar^2 + \frac{1}{2} [J(J+1)\hbar^2 + S(S+1)\hbar^2 - L(L+1)\hbar^2]}{\sqrt{J(J+1)} \hbar} \\ &= \left(-\frac{e\hbar}{2m} \right) \sqrt{J(J+1)} \left[1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \right] \\ &\equiv \left(-\frac{e\hbar}{2m} \right) \sqrt{J(J+1)} g \end{aligned}$$

La cantidad

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

se denomina *factor g de Landé*. Como se verá en los siguientes problemas, el factor g es necesario para calcular el desdoblamiento relativo de diferentes niveles de energía en campos magnéticos débiles.

24.19. Calcular la energía de desdoblamiento de un átomo en un campo magnético B , suponiendo que el desdoblamiento depende solamente del componente de $\boldsymbol{\mu}$ a lo largo de \mathbf{J} .

Del problema 24.18, la componente de $\boldsymbol{\mu}$ a lo largo de \mathbf{J} es

$$\mu_J = \left(-\frac{e\hbar}{2m} \right) \sqrt{J(J+1)} g$$

o en notación vectorial

$$\mu_J = \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} = \left(-\frac{e\hbar}{2m} \right) \sqrt{J(J+1)} g \frac{\mathbf{J}}{\sqrt{J(J+1)} \hbar} = -\frac{e}{2m} g \mathbf{J}$$

La energía de desdoblamiento está dada por la ecuación (22.1) como

$$\Delta E = -\boldsymbol{\mu}_J \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m} g \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{2m} g B J_z = \frac{e}{2m} g B M_J \hbar$$

Puesto que $M_J = J, J-1, \dots, -J+1, -J$, se ve que para un campo dado B , cada nivel de energía se desdoblará en $2J+1$ subniveles, con una separación determinada por el factor g asociado con ese nivel.

- 24.20.** Suponiendo que la interacción $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ sea mucho más fuerte que la interacción con el campo magnético externo, calcular el desdoblamiento anómalo de Zeeman para los estados más bajos ($^2S_{1/2}$, $^2P_{1/2}$, $^2P_{3/2}$) en el hidrógeno con un campo de 0.05 T.

Del problema 24.19 tenemos

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m} g B M_J = \left(5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) g (0.05 \text{ T}) M_J$$

con

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

En la tabla 24-10 aparecen los cálculos

Tabla 24-10

Estado	L	S	J	g	M_J	$\Delta E, \text{eV} \times 10^{-5}$
$^2P_{3/2}$	1	1/2	3/2	4/3	$\pm 3/2$	± 0.579
					$\pm 1/2$	± 0.193
$^2P_{1/2}$	1	1/2	1/2	2/3	$\pm 1/2$	± 0.097
$^2S_{1/2}$	0	1/2	1/2	2	$\pm 1/2$	± 0.290

- 24.21.** Con relación al problema 24.20, calcular las líneas obtenidas de las transiciones $^2P_{3/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ y $^2P_{1/2} \rightarrow ^2S_{1/2}$ en el hidrógeno para un campo de 0.05 T. En ausencia de campo magnético estas transiciones dan líneas de $(1210 - 3.54 \times 10^{-3}) \text{ \AA}$ y $(1210 + 1.77 \times 10^{-3}) \text{ \AA}$, respectivamente.

La relación entre el desdoblamiento de las líneas espectrales y el campo aplicado se obtiene de

$$E_u - E_l = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{ó} \quad dE_u - dE_l = -\frac{hc}{\lambda^2} d\lambda$$

ó

$$d\lambda = -\frac{\lambda^2}{hc} (dE_u - dE_l) = -\frac{(1210 \text{ \AA})^2}{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}} (dE_u - dE_l) = \left(-118 \frac{\text{\AA}}{\text{eV}} \right) (dE_u - dE_l)$$

Los valores de dE_u y dE_l se encuentran en la tabla 24-10. Hay 10 transiciones que satisfacen la regla $\Delta M_J = \pm 1, 0$ (ver figura 24.7). La desviación de cada una de estas líneas del valor $\lambda_0 = 1210 \text{ \AA}$ aparece en la tabla 24-11.

Este problema muestra el efecto Zeeman anómalo en el que se observan 10 líneas en vez de 3 como ocurre en el efecto Zeeman normal.

Tabla 24-11

$d\lambda_0,$ $\text{\AA} \times 10^{-3}$	Transición	$dE_u,$ $\text{eV} \times 10^{-5}$	$dE_l,$ $\text{eV} \times 10^{-5}$	$d\lambda,$ $\text{\AA} \times 10^{-3}$	$d\lambda_T = d\lambda_0 + d\lambda,$ $\text{\AA} \times 10^{-3}$
-3.54	a	+0.579	+0.290	-0.341	-3.88
-3.54	b	+0.193	+0.290	+0.114	-3.43
-3.54	c	+0.193	-0.290	-0.570	-4.11
-3.54	d	-0.193	+0.290	+0.570	-2.97
-3.54	e	-0.193	-0.290	-0.114	-3.65
-3.54	f	-0.579	-0.290	+0.341	-3.20
1.77	g	+0.097	+0.290	+0.228	+2.00
1.77	h	+0.097	-0.290	-0.457	+1.31
1.77	i	-0.097	+0.290	+0.457	+2.23
1.77	j	-0.097	-0.290	-0.228	+1.54

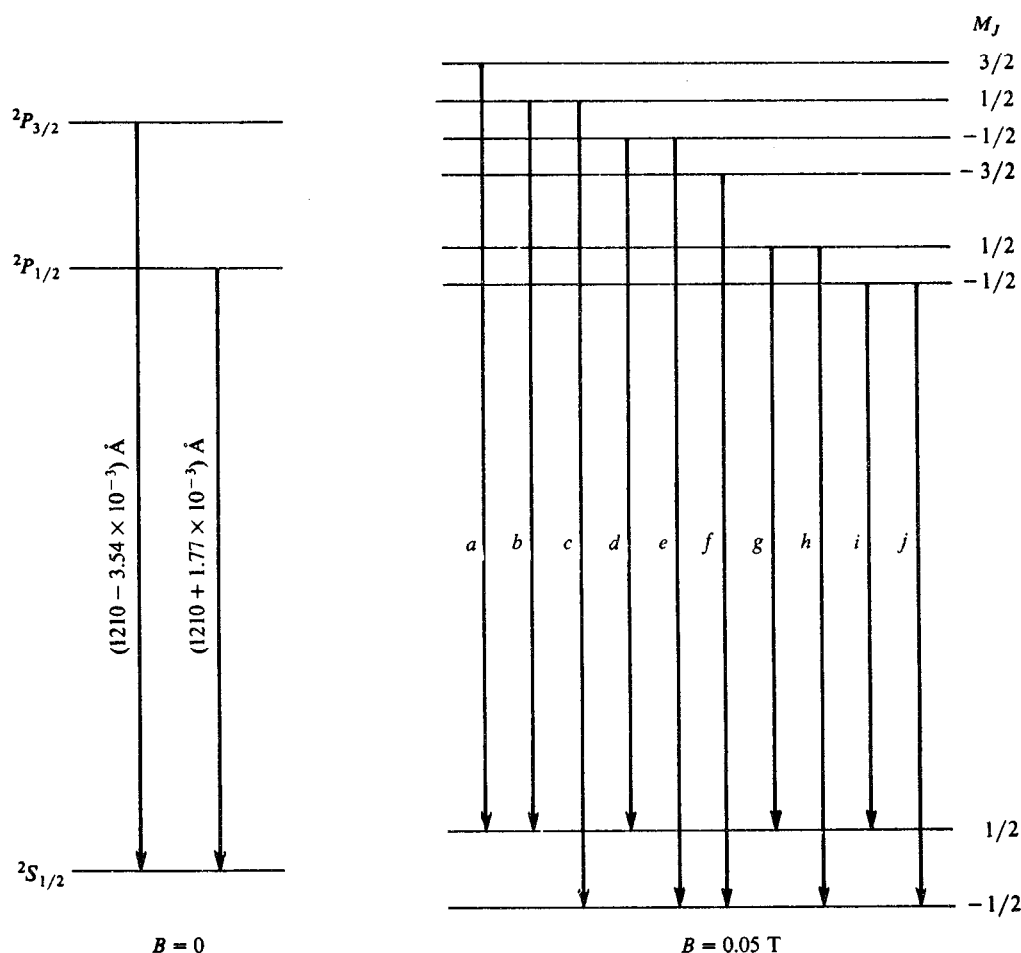


Fig. 24-7

24.22. Despreciando la interacción spin-órbita en un campo magnético externo fuerte de 5 T, determinar las líneas que resultan de la transición $2p \rightarrow 1s$ en el hidrógeno ($\lambda_0 = 1210 \text{ Å}$).

El momento magnético total es la suma vectorial de los momentos magnéticos orbital y de spin:

$$\mu = \mu_L + \mu_S = -\frac{e}{2m} \mathbf{L} - 2\frac{e}{2m} \mathbf{S} = -\frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})$$

Si se desprecia la interacción spin-órbita, el cambio de energía en el sistema será determinado únicamente por la interacción del momento magnético total con el campo externo, lo que da

$$\begin{aligned} dE &= -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B = \frac{e}{2m} (L_z + 2S_z) B = \frac{e\hbar}{2m} (M_L + 2M_S) B \\ &= \left(5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \right) (5 \text{ T}) (M_L + 2M_S) = (28.94 \times 10^{-5} \text{ eV}) (M_L + 2M_S) \end{aligned}$$

Por eso hemos dado los desdoblamientos en la tabla 24-12.

La desviación en las longitudes de onda se obtiene del problema 24.21, como

$$d\lambda = \left(-118 \frac{\text{Å}}{\text{eV}} \right) (dE_u - dE_l)$$

Puesto que la separación entre los niveles de energía superiores es igual a la que aparece en los niveles inferiores ($28.94 \times 10^{-5} \text{ eV}$), sólo resultan tres líneas de las transiciones que satisfacen las reglas de selección, $\Delta M_L = \pm 1, 0$, $\Delta M_S = 0$ (ver figura 24-8 y tabla 24-13).

Se puede observar que en un campo magnético externo fuerte donde la interacción spin-órbita es despreciable, se tiene una situación similar a la del efecto Zeeman normal, en donde sólo aparecen tres líneas.

Tabla 24-12

Estado	L	M_L	M_S	$M_L + 2M_S$	dE , $\text{eV} \times 10^{-5}$
$2p$	1	+1	$+\frac{1}{2}$	+2	+57.88
$2p$	1	0	$+\frac{1}{2}$	+1	+28.94
$2p$	1	-1	$+\frac{1}{2}$	0	0.00
$2p$	1	+1	$-\frac{1}{2}$	0	0.00
$2p$	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-28.94
$2p$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	-2	-57.88
$1s$	0	0	$+\frac{1}{2}$	+1	+28.94
$1s$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	-28.94

Tabla 24-13

Transiciones	$dE_u - dE_l$, $\text{eV} \times 10^{-5}$	$d\lambda$, $\text{\AA} \times 10^{-3}$	$\lambda = \lambda_0 + d\lambda$, \AA
a, d	28.94	-34.15	$1210 - 34.15 \times 10^{-3}$
b, e	0	0	1210
c, f	-28.94	+34.15	$1210 + 34.15 \times 10^{-3}$

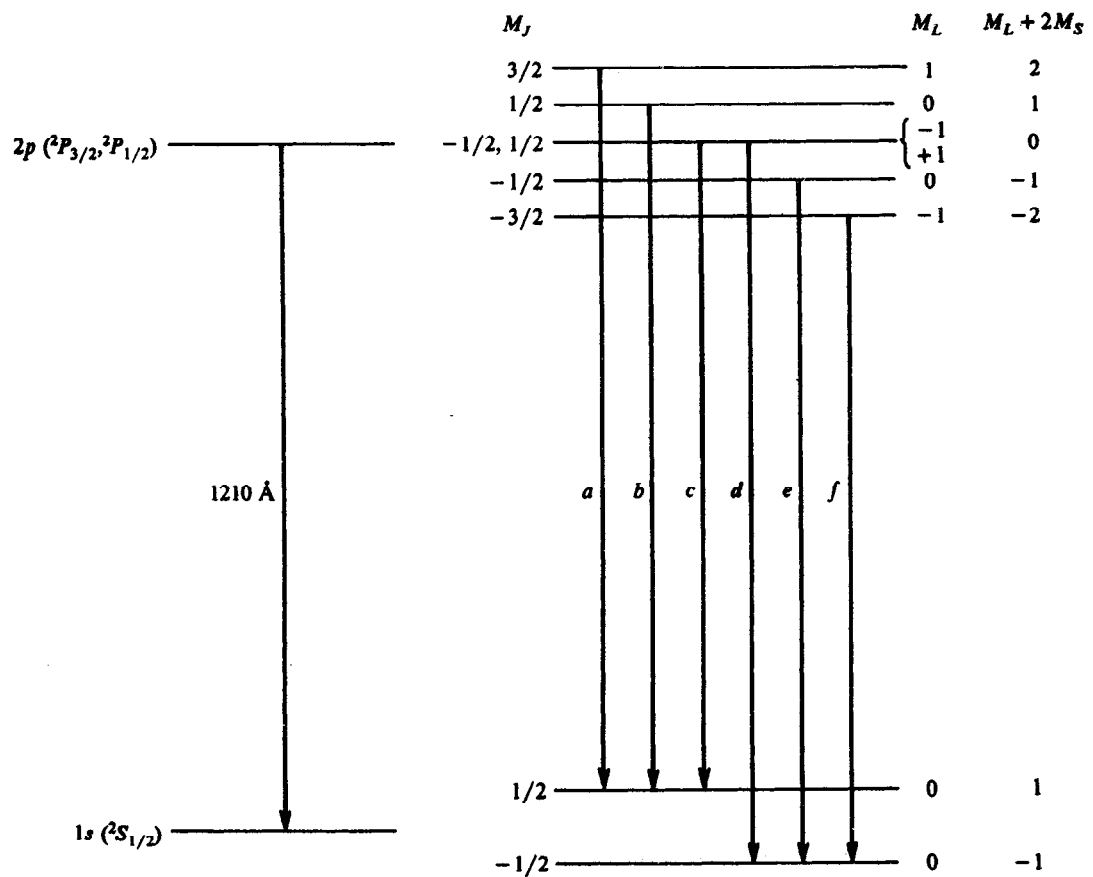


Fig. 24-8

Problemas suplementarios

- 24.23. Supongamos que un estado en un átomo se determina por un solo electrón. ¿Cuáles son los posibles valores del momentum angular total del átomo en (a) un estado S , (b) un estado P , (c) un estado D ?

Resp. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$; (b) $\frac{\sqrt{15}}{2} \hbar, \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$; (c) $\frac{\sqrt{35}}{2} \hbar, \frac{\sqrt{15}}{2} \hbar$

- 24.24. Hallar el máximo número de electrones que pueden ocupar una subcapa p . Resp. 6 electrones

- 24.25. Hallar el máximo número de electrones que pueden ocupar una subcapa f y anotar los valores de m_l y m_s para los electrones. Resp. 14 electrones; $m_l = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$; $m_s = \pm \frac{1}{2}$

- 24.26. Calcular $L \cdot S$ para un estado $^2D_{3/2}$. Resp. $-\frac{3}{2} \hbar^2$

- 24.27. Dar los siguientes estados en notación espectroscópica: (a) $L = 0, S = 0, J = 0$; (b) $L = 2, S = 0, J = 2$; (c) $L = 3, S = 1/2, J = 5/2$; (d) $L = 4, S = 1, J = 5$. Resp. (a) 1S_0 ; (b) 1D_2 ; (c) $^2F_{5/2}$; (d) 3G_5

- 24.28. Dar las transiciones fuertes de un estado 2D a un estado 2P , en presencia de una interacción $L \cdot S$
Resp. $^2D_{5/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$; $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{3/2}$; $^2D_{3/2} \rightarrow ^2P_{1/2}$

- 24.29. ¿Qué gas noble completa la subcapa $6p$? Resp. $_{86}\text{Rn} \equiv \text{Rn} (Z = 86)$

- 24.30. Dar la configuración electrónica para el metal alcalino construido con base en el gas noble Xe.
Resp. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^6 6s^1$ ($_{55}\text{Cs}$)

- 24.31. Las tierras alcalinas tienen dos electrones más que un gas noble. Dar la configuración electrónica de las primeras cuatro.

Resp. Be ($Z = 4$): $1s^2 2s^2$
Mg ($Z = 12$): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$
Ca ($Z = 20$): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$
Sr ($Z = 38$): $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2$

- 24.32. Dar la configuración electrónica para el halógeno con un electrón menos que el gas noble Xe.
Resp. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 5s^2 4d^{10} 5p^5$ ($_{53}\text{I}$)

- 24.33. ¿Qué elemento de transición tiene la configuración electrónica $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$?
Resp. $_{26}\text{Fe}$

- 24.34. Dar en notación espectral los posibles estados de un átomo que tiene una estructura cerrada con un electrón d adicional. Resp. $^2D_{5/2}$; $^2D_{3/2}$

- 24.35. Anote los posibles estados (M_L, M_S) de los electrones nd equivalentes.

Resp. Las 45 combinaciones permisibles de números cuánticos (10 objetos tomando 2 al tiempo) da 23 estados: $(\pm 4, 0)$, $(\pm 3, 1)$, $(\pm 3, 0)$, $(\pm 3, -1)$, $(\pm 2, 1)$, $(\pm 2, 0)$, $(\pm 2, -1)$, $(\pm 1, 1)$, $(\pm 1, 0)$, $(\pm 1, -1)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$

- 24.36. Para un campo de 2 T, calcular la energía de desdoblamiento Zeeman de los estados $^2P_{1/2}$ y $^2S_{1/2}$ en el Na.
Resp. $\pm 3.86 \times 10^{-5} \text{ eV}$; $\pm 11.58 \times 10^{-5} \text{ eV}$

- 24.37. La transición ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ en el Na tiene una longitud de onda de 5895.9 Å. Calcular los cambios de longitud de onda observados en un campo magnético de 2 T. Resp. ± 0.216 Å; ± 0.433 Å
- 24.38. Suponiendo que la interacción $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ sea mucho mayor que la interacción con un campo magnético externo, calcular el desdoblamiento Zeeman anómalo de los estados ${}^2D_{3/2}$ y ${}^2D_{5/2}$ en el hidrógeno en un campo de 0.05 T.
Resp. para ${}^2D_{3/2}$: $\pm 3.47 \times 10^{-6}$ eV, $\pm 1.16 \times 10^{-6}$ eV; para ${}^2D_{5/2}$: $\pm 8.68 \times 10^{-6}$ eV, $\pm 5.21 \times 10^{-6}$ eV, eV, $\pm 1.74 \times 10^{-6}$ eV

Capítulo 25

Transiciones de electrones internos: Rayos X

25.1 APARATO DE RAYOS X

Los rayos X, descubiertos por Wilhelm Roentgen en 1895, son fotones de alta energía (1–100 keV) con longitudes de onda de aproximadamente 1 Å. Generalmente se producen al bombardear un blanco con electrones de alta energía, como se muestra en la figura 25-1. La energía cinética de los electrones en el cátodo es despreciable, por eso cuando golpean el blanco, su energía cinética es $K = eV$.

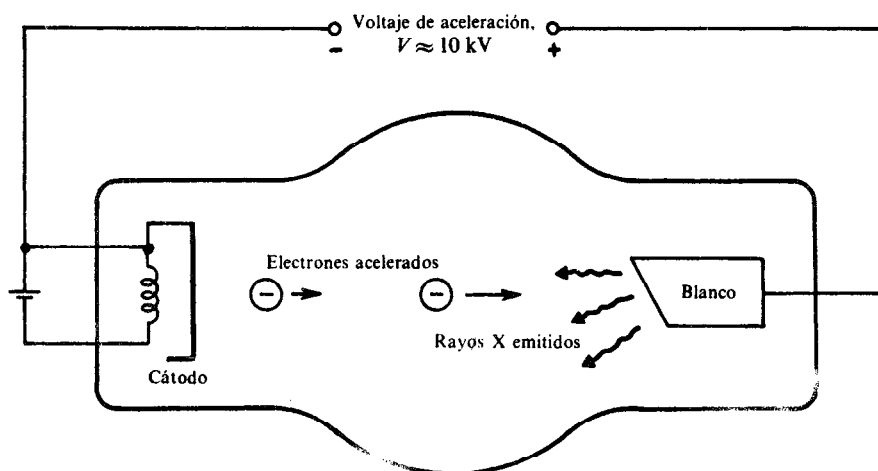


Fig. 25-1

25.2 PRODUCCION DE RADIACION DE FRENADO (BREMSSTRAHLUNG)

Los electrones incidentes pueden interactuar en diferentes formas con los átomos del blanco. En uno de estos tipos de interacción, los electrones son acelerados por los núcleos cargados positivamente, como se muestra en la figura 25-2. Siempre que una carga es acelerada, produce una radiación que, de acuerdo con la

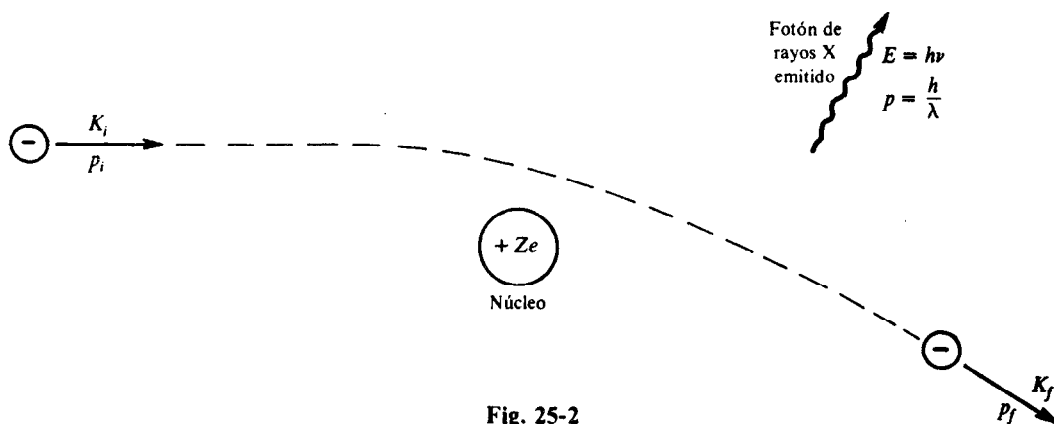


Fig. 25-2

descripción cuántica, aparecerá en forma de un fotón de energía $h\nu$ igual a la variación de la energía cinética del electrón, es decir, $h\nu = K_i - K_f$. La radiación producida de este modo, se denomina *bremsstrahlung*, según la palabra alemana para “frenar”, o radiación de “frenado”.

Un electrón puede producir un gran número de fotones antes de quedar en reposo. Es evidente que el fotón más energético proviene de un electrón que ha perdido toda su energía cinética en una sola interacción, produciendo un solo fotón con máxima frecuencia o mínima longitud de onda dada por

$$h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} = eV \quad (25.1)$$

Por esta razón, el proceso de radiación de frenado producirá una radiación con espectro continuo que tiene una interrupción de frecuencia o longitud de onda que depende del voltaje de aceleración de acuerdo con la ecuación (25.1).

25.3 PRODUCCION DE ESPECTROS CARACTERISTICOS DE RAYOS X

Los electrones incidentes también pueden excitar los electrones de los átomos en el blanco del tubo de rayos X. Por otra parte, debido al elevado voltaje de aceleración, los electrones incidentes pueden tener energía suficiente para expulsar de los átomos del blanco a los electrones más estrechamente ligados a ellos. Si un electrón de las capas interiores es expelido, los electrones del átomo que se encuentran en niveles de energía superiores realizarán transiciones al estado inferior vacante, emitiendo una radiación en este proceso. Puesto que las diferencias de energía entre los niveles interiores de los átomos del blanco son relativamente grandes, la radiación emitida se encuentra en la región de rayos X.

Si los electrones extraídos pertenecen a la capa K ($n = 1$) los electrones ubicados en estados con energía superior caen a la capa K , produciendo una serie de líneas que, en notación de rayos X, se denominan líneas $K_\alpha, K_\beta, K_\gamma, \dots$. Ver figura 25-3(a). Si los electrones expelidos pertenecen a la capa L ($n = 2$), se produce otra serie de líneas, denominadas *serie L*. En forma análoga, las transiciones hacia la capa M ($n = 3$) originan la *serie M* y así sucesivamente.

Cuando se observa el espectro de un átomo polieletrónico excitado por bombardeo de electrones, se ve una suave radiación de frenado de fondo, con una interrupción en la longitud de onda mínima correspondiente al máximo voltaje de aceleración, junto con líneas agudas producidas por las transiciones K_α, K_β , etc., como se muestra en la figura 25-4.

Observando más cuidadosamente las líneas características de los rayos X, se encuentra que están compuestas por un número de líneas finamente espaciadas [figura 25-3(b)]. Este desdoblamiento de las líneas resulta del desdoblamiento de la estructura fina de los niveles de energía del átomo (con excepción de la capa K donde $n = 1, L = 0$) como se describió en el capítulo 22.

25.4 LA RELACION DE MOSELEY

En 1913 H. Moseley encontró que las frecuencias ν observadas para las series K y L de rayos X podían obtenerse de la relación

$$\nu^{1/2} = A(Z - Z_0) \quad (25.2)$$

donde Z es el número atómico del material del blanco, A y Z_0 son constantes que dependen de la transición que se esté observando. Para la serie K se ha encontrado experimentalmente que $Z_0 = 1$ y el valor de A varía ligeramente con la transición K_α, K_β, \dots , observada. Para la serie L $Z_0 = 7.4$, y de nuevo existe una pequeña variación en A para las líneas L_α, L_β, \dots .

La forma de la ecuación (25.2) puede deducirse del tipo de Bohr (problema 25.6). Se ha encontrado que

$$A_{K_\alpha} = \left(\frac{3}{4} cR_\infty \right)^{1/2} = \left[\left(\frac{3}{4} \right) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left(1.097 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}} \right) \right]^{1/2} = 4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$$

$$A_{L_\alpha} = \left(\frac{5}{36} cR_\infty \right)^{1/2} = \left[\left(\frac{5}{36} \right) \left(3 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \left(1.097 \times 10^7 \frac{1}{\text{m}} \right) \right]^{1/2} = 2.14 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$$

Estos valores se encuentran en muy buena concordancia con los obtenidos experimentalmente (ver problema 25.7 y 25.8) y, a menos que se diga lo contrario, serán utilizados en los problemas que tengan que ver con la relación de Moseley.

Aunque la teoría de Bohr fue desarrollada para átomos que en estado gaseoso no interactúan, se ve que también proporciona una explicación de las propiedades de los átomos de un material sólido, los cuales interactúan muy frecuentemente unos con otros. La razón está en que en la producción de rayos X las tran-

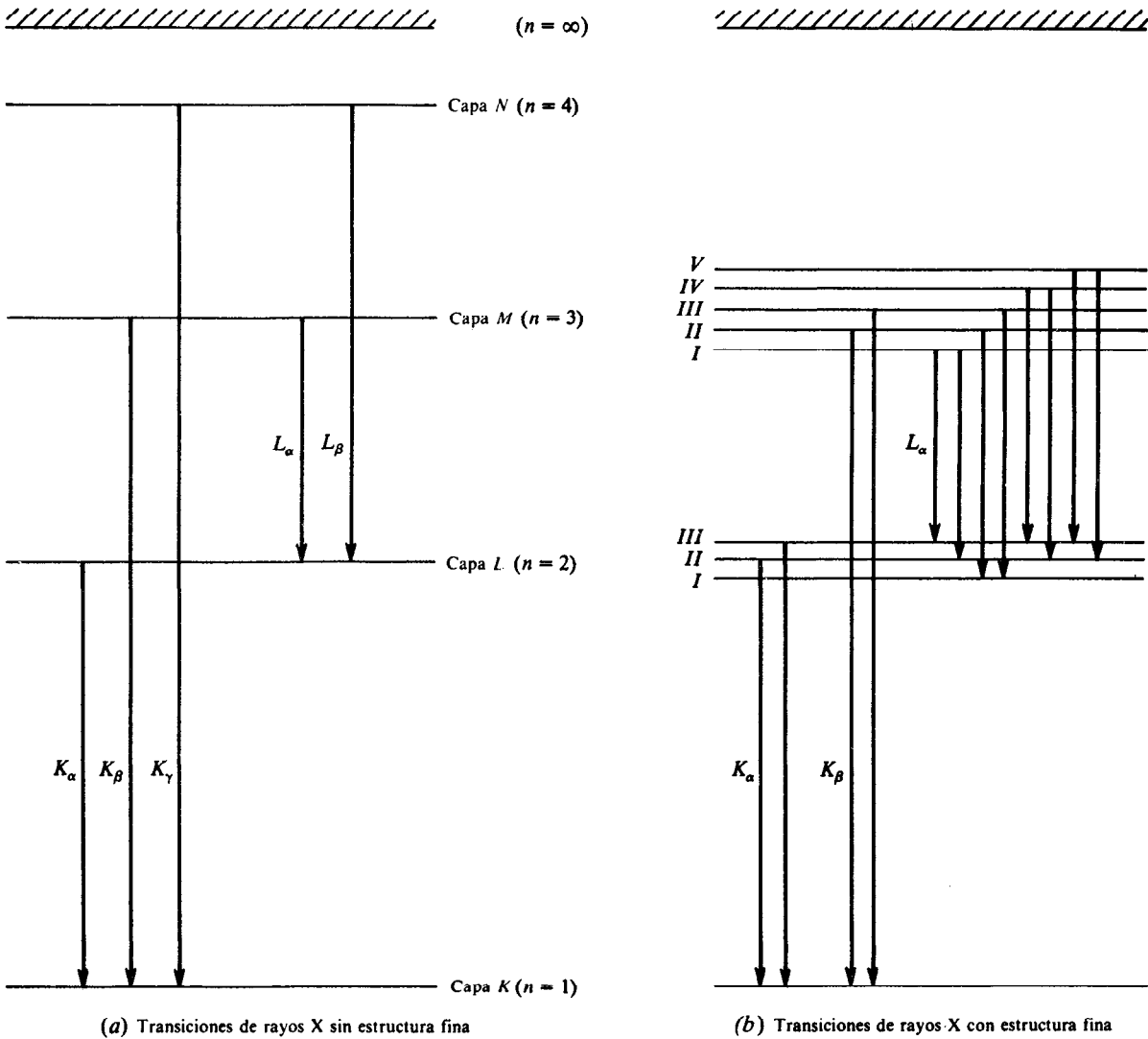


Fig. 25-3

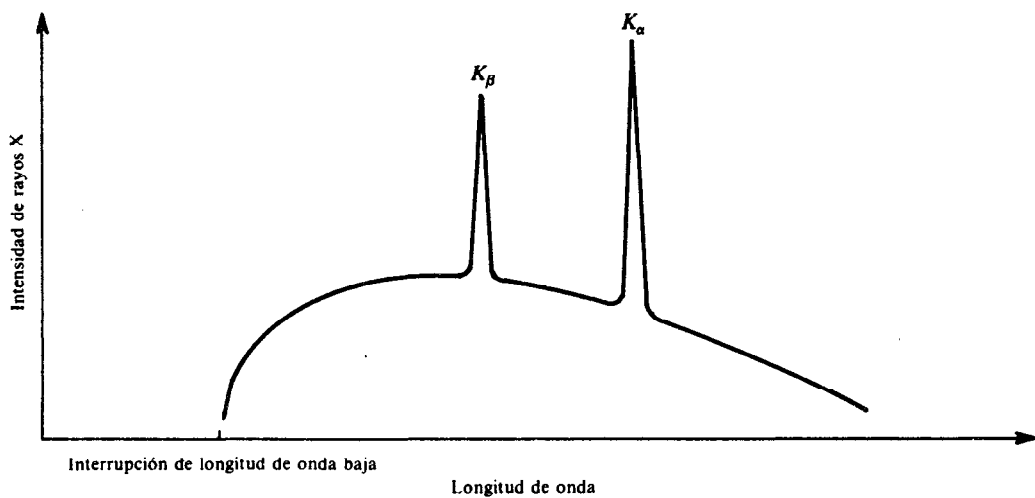


Fig. 25-4

siciones se efectúan solamente entre los electrones interiores fuertemente ligados. Cuando los átomos se ligan para formar un sólido, los niveles de energía de los electrones exteriores es diferente que cuando se encuentran en estado gaseoso. Sin embargo, debido a que los electrones interiores están fuertemente ligados, permanecen prácticamente invariantes cuando el material pasa del estado gaseoso al sólido o al líquido.

25.5 PICOS DE ABSORCION DE RAYOS X

Cuando un haz de rayos X pasa a través de un material, parte de los fotones puede interactuar con los átomos del material, ocasionando la absorción de los fotones del haz. Los principales procesos de interacción que producen la disminución en la intensidad de cualquier haz de fotones son el efecto fotoeléctrico, la dispersión de Compton y la producción de pares (capítulo 14). Como los rayos X tienen energías entre 1 y 100 keV, no pueden producir pares electrón-positrón, ya que para esto se requieren energías superiores a los 1 000 keV (problema 13.12). Por lo tanto, la intensidad de los rayos X sólo podrá ser reducida a causa de los dos primeros procesos de interacción, de los cuales el mecanismo predominante corresponde al efecto fotoeléctrico.

La intensidad I de un haz monocromático de rayos X, después de que ha penetrado una distancia x en un blanco de material determinado, está dada por (14.1)

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

donde I_0 es la intensidad del haz incidente y μ es el coeficiente de absorción del material. La cantidad μ depende tanto de los átomos del blanco, como de la energía de los fotones de los rayos X.

Supongamos que μ es función de la energía de los rayos X incidentes, para un blanco de material dado. A medida que la energía crece, el coeficiente de absorción decrece, debido a que los fotones altamente energéticos son menos aptos para producir fotoelectrones o para sufrir una dispersión de Compton. Este decrecimiento continúa hasta que la energía de los rayos X sea exactamente igual a la energía de uno de los electrones en el blindaje. En este punto, un mayor número de electrones se torna de repente en electrones disponibles para producir emisión fotoeléctrica, ocasionando una marcada disminución en la intensidad de los rayos X transmitidos o, lo que es igual, un repentino aumento en el valor del coeficiente de absorción. Este abrupto crecimiento en μ se presenta en las energías de enlace de cada uno de los electrones del blindaje, dando como resultado los *picos de absorción* mostrados en la figura 25-5(a). Las medidas de las energías de los picos de absorción K, L, \dots , sirven para determinar las energías de enlace de los correspondientes electrones internos del material.

Con excepción del K , cada pico de absorción consta en realidad de un número de picos muy unidos que corresponden a la estructura fina de los niveles de energía [figura 25-5(b)].

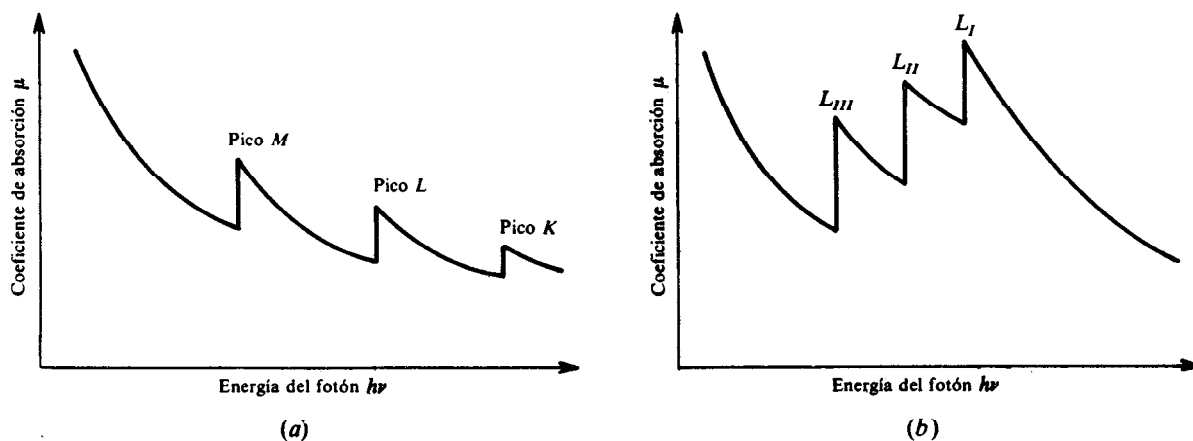


Fig. 25-5

25.6 EFECTO AUGER

En la discusión anterior se supuso que los fotoelectrones eran producidos por rayos X procedentes de una fuente externa. Es posible, sin embargo, que un rayo X emitido por la transición dentro de un átomo sea

absorbido por un electrón del mismo átomo, produciendo su expulsión. Los fotoelectrones obtenidos mediante estas conversiones internas de rayos X se denominan *electrones de Auger*.

25.7 FLUORESCENCIA DE RAYOS X

Los rayos X pueden utilizarse para excitar o para expulsar electrones internos del material. Las transiciones descendentes que resultan cuando el átomo regresa a su estado fundamental, producirán fotones adicionales de rayos X de menor energía que los rayos X incidentes. Este fenómeno se conoce como *fluorescencia de rayos X*.

Problemas resueltos

- 25.1.** Un tubo de TV funciona con un potencial de aceleración de 20 kV. ¿Cuál es la máxima energía de los rayos X del equipo de TV?

Los electrones en el tubo de TV tienen una energía de 20 keV. La longitud de onda correspondiente es

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{20 \text{ keV}} = 0.62 \text{ \AA}$$

- 25.2.** Calcular la longitud de onda de la línea K_α para el molibdeno ($Z = 42$).

De la relación del efecto Moseley tenemos

$$\nu^{1/2} = A(Z - 1) = (4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2})(42 - 1) = 2.04 \times 10^9 \text{ Hz}^{1/2}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{(2.04 \times 10^9 \text{ Hz}^{1/2})^2} = 0.721 \times 10^{-10} \text{ m} = 0.721 \text{ \AA}$$

Este valor concuerda muy bien con el valor experimental de 0.709 Å.

- 25.3.** En la relación de Moseley, ¿a cuál de las transiciones K_α ó K_β le corresponde el mayor valor de la constante A ?

La relación de Moseley para las transiciones K es $\nu^{1/2} = A(Z-1)$. Las transiciones K_β son de mayor energía que las transiciones K_α ; por lo tanto, los fotones de mayor frecuencia son emitidos en transiciones K_β , en consecuencia, A es mayor para las transiciones K_β que para las K_α .

- 25.4.** Un experimento realizado para medir las líneas K_α para varios elementos dio los siguientes datos:

$$\text{Fe: } 1.94 \text{ \AA} \quad \text{Co: } 1.79 \text{ \AA} \quad \text{Ni: } 1.66 \text{ \AA} \quad \text{Cu: } 1.54 \text{ \AA}$$

A partir de estos datos, calcular el número atómico de cada uno de los elementos.

La relación de Moseley da

$$\nu^{1/2} = (4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2})(Z - 1) \quad \text{ó} \quad Z = 1 + \frac{\nu^{1/2}}{4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}}$$

y utilizando $\nu = c/\lambda$ obtenemos

$$Z = 1 + \frac{c^{1/2}}{\lambda^{1/2}} \left(\frac{1}{4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}} \right) = 1 + \frac{34.85}{\lambda^{1/2}} \quad (\lambda \text{ en \AA})$$

Los resultados se encuentran en la tabla 25-1.

Tabla 25-1

Elemento	$\lambda, \text{\AA}$	Z
Fe	1.94	$26.02 \approx 26$
Co	1.79	$27.04 \approx 27$
Ni	1.66	$28.04 \approx 28$
Cu	1.54	$29.08 \approx 29$

Antes del trabajo de Moseley, el Ni, cuyo peso atómico es 58.69, se había anotado en la tabla periódica antes que el Co, cuyo peso atómico es 58.94 y se creía que los números atómicos del Ni y del Co eran 27 y 28, respectivamente. Utilizando los datos experimentales anteriores, Moseley demostró que tanto el ordenamiento, como los correspondientes números atómicos deberían invertirse.

- 25.5. Un haz de electrones de 100 keV incide sobre un blanco de Mo ($Z = 42$). Las energías de enlace de las subcapas electrónicas en el Mo se encuentran en la tabla 25-2. Calcular las longitudes de onda de las posibles transiciones.

Tabla 25-2

Capa	K	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V
Electrón	$1s$	$2s$	$2p$	$2p$	$3s$	$3p$	$3p$	$3d$	$3d$
Energía de enlace, keV	20.000	2.866	2.625	2.520	0.505	0.410	0.393	0.230	0.227

Sólo son permitidas las transiciones con $\Delta l = \pm 1$, las cuales se indican en la figura 25-6. Las longitudes de onda se consiguen a partir de

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{E_u - E_l} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{E_u - E_l}$$

cuyos resultados se dan en la tabla 25-3.

Tabla 25-3

Transición		E_u, keV	E_l, keV	$\lambda, \text{\AA}$
K_α	1	- 2.625	- 20.000	0.7137
	2	- 2.520	- 20.000	0.7094
K_β	1	- 0.410	- 20.000	0.6330
	2	- 0.393	- 20.000	0.6324
L_α	1	- 0.505	- 2.520	6.1538
	2	- 0.505	- 2.625	5.8491
	3	- 0.410	- 2.866	5.0489
	4	- 0.393	- 2.866	5.0142
	5	- 0.230	- 2.520	5.4148
	6	- 0.230	- 2.625	5.1775
	7	- 0.227	- 2.520	5.4078
	8	- 0.227	- 2.625	5.1710

Este problema muestra la estructura fina de los rayos X característicos.

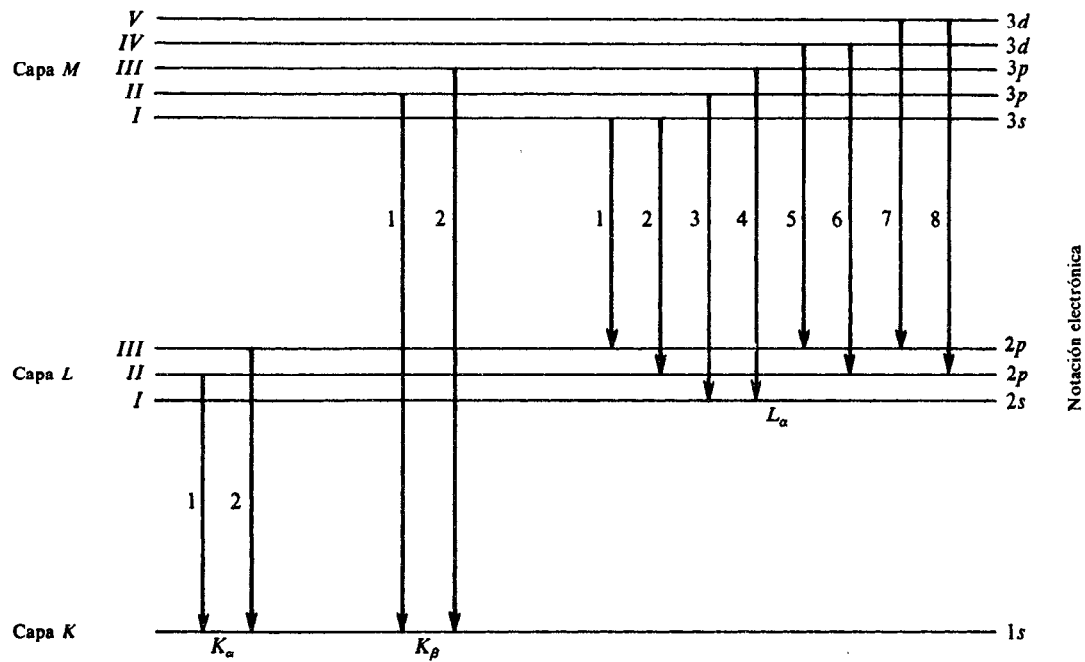


Fig. 25-6

25.6. Utilizando un modelo de Bohr, calcular el valor de A en la ecuación de Moseley para las series de transiciones K_{α} y L_{α} .

Para el átomo de un electrón sabemos que (sección 19.3)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = R_{\infty} Z^{*2} \left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) \quad \text{ó} \quad \nu^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_u^2} \right) c R_{\infty} \right]^{1/2} Z^{*}$$

donde R_{∞} es la constante de Rydberg, n_u y n_l son los números cuánticos principales de los estados superior e inferior para las transiciones electrónicas y $Z^{*}e$ es la carga neta positiva que actúa sobre el electrón. Para las transiciones K_{α} se tiene $n_u = 2$, $n_l = 1$ y para las L_{α} , $n_u = 3$, $n_l = 2$, entonces

$$\nu_{K_{\alpha}}^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) c R_{\infty} \right]^{1/2} Z^{*} = \left(\frac{3}{4} c R_{\infty} \right)^{1/2} Z^{*} = (4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}) Z^{*}$$

$$\nu_{L_{\alpha}}^{1/2} = \left[\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) c R_{\infty} \right]^{1/2} Z^{*} = \left(\frac{5}{36} c R_{\infty} \right)^{1/2} Z^{*} = (2.14 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}) Z^{*}$$

Por lo tanto, $A_{K_{\alpha}} = 4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$ y $A_{L_{\alpha}} = 2.14 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$. Si en una transición K_{α} se supone que los electrones interiores no son afectados por los demás electrones del átomo antes de la transición, el electrón L experimenta una carga efectiva de $(Z - 1)e$, porque el electrón que permanece en la capa K resguarda el núcleo atómico, cuya carga es Ze . Utilizando $Z^{*} = Z - 1$ en la expresión anterior para la transición K_{α} , obtenemos

$$\nu_{K_{\alpha}}^{1/2} = (4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2})(Z - 1)$$

En transiciones en las que se consideran electrones de las capas exteriores a la capa L , el efecto de pantalla del núcleo se torna más complicado y la constante Z_0 en la relación de Moseley ya no es igual al número de electrones que apantallan el núcleo.

25.7. Dar el valor de A en la relación de Moseley, para cada una de las líneas K_α que se dan en la tabla 25.4.

Tabla 25-4

Elemento	Sc	Ga	Nb	Sb	Pm	Lu	Tl
Z	21	31	41	51	61	71	81
$K_{\alpha 1}$, keV	4.09	9.25	16.62	26.36	38.72	54.07	72.87
$K_{\alpha 2}$, keV	4.09	9.22	16.52	26.11	38.17	52.97	70.83

Utilizando

$$\nu^{1/2} = \left(\frac{E}{h} \right)^{1/2} = \left(\frac{E}{4.136 \times 10^{-18} \text{ keV} \cdot \text{s}} \right)^{1/2} = \left(49.17 \times 10^7 \frac{\text{Hz}^{1/2}}{\text{keV}^{1/2}} \right) E^{1/2}$$

donde E se encuentra en keV; en la relación de Moseley, obtenemos

$$A = \frac{\nu^{1/2}}{Z-1} = \left(49.17 \times 10^7 \frac{\text{Hz}^{1/2}}{\text{keV}^{1/2}} \right) \frac{E^{1/2}}{Z-1}$$

Los resultados numéricos se registran en la tabla 25-5.

Tabla 25-5

Z	21	31	41	51	61	71	81
A_1 , $\text{Hz}^{1/2} \times 10^7$	4.97	4.98	5.01	5.05	5.10	5.17	5.25
A_2 , $\text{Hz}^{1/2} \times 10^7$	4.97	4.98	5.00	5.02	5.06	5.11	5.17

Estos valores de A concuerdan con el valor de $A = 4.97 \times 10^7 \text{ Hz}$ obtenido en el problema 25.6.

25.8. Las energías de las capas L y M del W ($Z = 74$) son

Capa	L_I	L_{II}	L_{III}	M_I	M_{II}	M_{III}	M_{IV}	M_V
Energía, keV	12.099	11.542	10.205	2.820	2.575	2.281	1.872	1.810

Calcular los valores de A en la relación de Moseley, para la frecuencia máxima y mínima de las líneas L_α y compare estos valores con los obtenidos en el problema 25.6.

Las líneas L_α tienen lugar en las transiciones de la capa M a la capa L . Las frecuencias máxima y mínima permitidas se presentan en las transiciones $M_{III} \rightarrow L_I$ y $M_I \rightarrow L_{III}$, respectivamente (ver problema 25.5). Estas frecuencias son

$$\nu_{\text{máx}} = \frac{E_{L_I} - E_{M_{III}}}{h} = \frac{12.099 \text{ keV} - 2.281 \text{ keV}}{4.136 \times 10^{-18} \text{ keV} \cdot \text{s}} = 2.374 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

$$\nu_{\text{mín}} = \frac{E_{L_{III}} - E_{M_I}}{h} = \frac{10.205 \text{ keV} - 2.820 \text{ keV}}{4.136 \times 10^{-18} \text{ keV} \cdot \text{s}} = 1.786 \times 10^{18} \text{ Hz}$$

Sustituyendo estos valores en la relación de Moseley, obtenemos

$$A_{\text{máx}} = \frac{\nu_{\text{máx}}^{1/2}}{Z - 7.4} = \frac{(2.374 \times 10^{18} \text{ Hz})^{1/2}}{74 - 7.4} = 2.31 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$$

$$A_{\text{mín}} = \frac{\nu_{\text{mín}}^{1/2}}{Z - 7.4} = \frac{(1.786 \times 10^{18} \text{ Hz})^{1/2}}{74 - 7.4} = 2.01 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$$

Estos valores no concuerdan con el valor de $A = 2.14 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$ obtenido en el problema 25.6.

- 25.9.** Suponga la siguiente descripción para los dos electrones K en un átomo: la energía total de cada electrón se obtiene mediante la energía de Bohr, para una carga nuclear "efectiva" Z^*e , más la energía de interacción de Coulomb, presumiendo que los dos electrones se encuentran a la máxima distancia de separación, igual al doble del radio de Bohr r_B . Hallar el factor de protección $Z_0 = Z - Z^*$ para los elementos cuyas energías de enlace de la capa K se encuentran en la tabla 25.6.

Tabla 25-6

Elemento	Ni	Zr	Sb	Gd	Ta
Z	28	40	51	64	73
Energía de enlace de la capa K	8.333	17.998	30.491	50.239	67.417

Según la ecuación (19.5) con $n = 1$, la energía de Bohr es $-Z^{*2}E_1^\circ$; y por el problema (24.10), la energía de interacción de Coulomb es $ke^2/2r_B$. La energía de enlace de cada electrón es igual a la energía total tomada con signo negativo; entonces

$$\text{BE} = -\left(-Z^{*2}E_1^\circ + \frac{ke^2}{2r_B}\right) = E_1^\circ Z^{*2} - \frac{ke^2}{2r_B} \quad (1)$$

en la cual $E_1^\circ = 13.6 \text{ eV} = 0.0136 \text{ keV}$; ahora de (19.4) y con $n = 1$,

$$r_B = \frac{r_1^\circ}{Z^*} = \frac{1}{Z^*} \frac{h^2}{4\pi^2 k m e^2} = \frac{1}{Z^*} \frac{ke^2}{2E_1^\circ}$$

6

$$\frac{ke^2}{2r_B} = E_1^\circ Z^*$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1), se obtiene la ecuación de segundo grado

$$Z^{*2} - Z^* - \frac{\text{BE}}{E_1^\circ} = 0$$

cuya raíz positiva es Z^* . Los resultados numéricos se encuentran en la tabla 25.7.

Tabla 25-7

Z	Z^*	Z_0
28	25.3	2.7
40	36.9	3.1
51	47.9	3.1
64	61.3	2.7
73	70.9	3.1

El hecho de haber encontrado los valores de los factores de protección Z_0 aproximadamente iguales, demuestra que el modelo de Bohr es lo suficientemente aproximado para los electrones de la capa K .

- 25.10.** En el uranio ($Z = 92$), el pico de absorción K corresponde a 0.107 \AA y la línea K_α es de 0.126 \AA . Calcular la longitud de onda del pico de absorción L .

En la figura 25-7 se encuentra que

$$E_K = -\frac{hc}{\lambda_K} = -\frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{0.107 \text{ \AA}} = -115.9 \text{ keV}$$

y

$$E_L - E_K = \frac{hc}{\lambda_{K_\alpha}} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{0.126 \text{ \AA}} = 98.4 \text{ keV}$$

Por lo tanto $E_L = 98.4 - 115.9 = -17.5 \text{ keV}$, y

$$\lambda_L = \frac{hc}{-E_L} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{17.5 \text{ keV}} = 0.709 \text{ \AA}$$

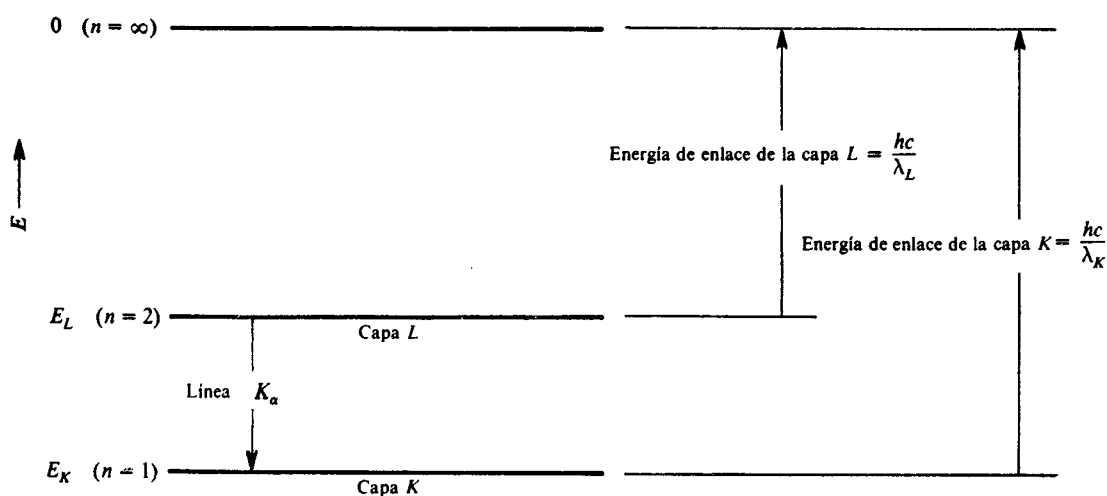


Fig. 25-7

- 25.11.** El pico de absorción K para el Y ($Z = 39$) está en 0.7277 \AA . Para producir una emisión de la serie K del Y, se necesita un potencial de aceleración de por lo menos 17.039 kV . A partir de estos datos, calcule h/e .

La energía de un fotón de 0.7277 \AA que extrae un electrón de la capa K es

$$E_\nu = h \frac{c}{\lambda} = h \frac{2.998 \times 10^8 \text{ m/s}}{0.7277 \times 10^{-10} \text{ m}} = (4.120 \times 10^{18} \text{ s}^{-1})h$$

La energía de los electrones bombardeantes que alcanzan a extraer un electrón de la capa K es

$$E_e = eV = e(17.039 \times 10^3 \text{ V})$$

Puesto que estas energías deben ser iguales, entonces

$$(4.120 \times 10^{18} \text{ s}^{-1})h = e(17.039 \times 10^3 \text{ V})$$

$$\frac{h}{e} = 4.136 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s} = 4.136 \times 10^{-15} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{C}}$$

- 25.12.** Un material cuyo pico de absorción K corresponde a 0.15 \AA , es irradiado con rayos X de 0.10 \AA . ¿Cuál es la máxima energía cinética de los fotoelectrones emitidos por la capa K ?

La energía de enlace de la capa K es

$$|E_K| = \frac{hc}{\lambda_K} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{0.15 \text{ \AA}} = 82.7 \text{ keV}$$

La energía del fotón incidente es

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{0.10 \text{ \AA}} = 124 \text{ keV}$$

La máxima energía cinética es la diferencia entre estos dos valores.

$$K_{\text{máx}} = E_\nu - |E_K| = 124 \text{ keV} - 82.7 \text{ keV} = 41.3 \text{ keV}$$

- 25.13.** Cuando un haz de rayos X de 0.50 \AA incide sobre un material, se observa que los fotoelectrones de la capa K se mueven en una órbita circular de 23 mm de radio en un campo magnético de $2 \times 10^{-2} \text{ T}$. ¿Cuál es la energía de enlace de los electrones de la capa K ?

La velocidad de los fotoelectrones se encuentra a partir de $F = ma$:

$$evB = m \frac{v^2}{R} \quad \text{ó} \quad v = \frac{e}{m} BR$$

La energía cinética de los fotoelectrones es entonces

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \frac{e^2 B^2 R^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (2 \times 10^{-2} \text{ T})^2 (23 \times 10^{-3} \text{ m})^2}{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 2.97 \times 10^{-15} \text{ J}$$

ó

$$K = (2.97 \times 10^{-15} \text{ J}) \frac{1 \text{ keV}}{1.6 \times 10^{-16} \text{ J}} = 18.6 \text{ keV}$$

La energía del fotón incidente es

$$E_\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{0.50 \text{ \AA}} = 24.8 \text{ keV}$$

La energía de enlace es la diferencia entre estos dos valores.

$$BE = E_\nu - K = 24.8 \text{ keV} - 18.6 \text{ keV} = 6.2 \text{ keV}$$

- 25.14.** En la emisión de fotoelectrones de cierto elemento al ser irradiado con rayos X monocromáticos, se midieron los potenciales de frenado de 24, 100, 110 y 115 kV. Si este elemento se utiliza como blanco en un tubo de rayos X, ¿cuál será la longitud de onda de línea K_α ?

La energía potencial de frenado, eV_s , es igual a la diferencia entre la energía del fotón incidente y la energía de enlace del electrón en una determinada capa.

$$eV_s = E_p - E_B$$

Los diferentes potenciales de frenado se deben a que los electrones son emitidos de diferentes capas, con el valor menor (24 kV) para la expulsión de un electrón de la capa K . Efectuando la diferencia entre los dos potenciales menores de frenado, se obtiene

$$eV_{sL} - eV_{sK} = (E_p - E_{BL}) - (E_p - E_{BK}) = E_{BK} - E_{BL}$$

ó

$$100 \text{ keV} - 24 \text{ keV} = E_{BK} - E_{BL}$$

Esta diferencia, 76 keV, es la energía de la línea K_α . La correspondiente longitud de onda es

$$\lambda = \frac{hc}{E_{BK} - E_{BL}} = \frac{12.4 \text{ keV} \cdot \text{\AA}}{76 \text{ keV}} = 0.163 \text{ \AA}$$

- 25.15.** En el Zn ($Z = 30$), las energías de ionización (enlace) de las capas K y L son, respectivamente, 9659 keV y 1021 keV. Calcular la energía cinética de un electrón Auger emitido de la capa L por un rayo X K_α .

La energía de un rayo X K_α es

$$E_{K_\alpha} = E_L - E_K = -1.021 \text{ keV} - (-9.659 \text{ keV}) = 8.638 \text{ keV}$$

La energía cinética del electrón Auger es igual a la diferencia entre la energía del fotón K_α y la energía de enlace del electrón en la capa L :

$$K = E_{K_\alpha} - E_{BL} = 8.638 \text{ keV} - 1.021 \text{ keV} = 7.617 \text{ keV}$$

- 25.16.** En la tabla 25-8 aparecen los niveles de energía K , L y M para el Cu, el Ni y el Co. Se desea filtrar la radiación K_β de las radiaciones K_α y K_β emitidas por el Cu. ¿Cuál de los elementos actúa mejor como filtro, el Ni ó el Co?

Tabla 25-8

Elemento	Z	E_K , keV	E_L , keV	E_M , keV
Cu	29	- 8.979	- 0.931	- 0.074
Ni	28	- 8.333	- 0.855	- 0.068
Co	27	- 7.709	- 0.779	- 0.060

Las energías de los rayos X emitidos del Cu son iguales a las diferencias entre los distintos niveles de energía del Cu, así

$$E_{K_\alpha} = -0.931 \text{ keV} - (-8.979 \text{ keV}) = 8.048 \text{ keV}$$

$$E_{K_\beta} = -0.074 \text{ keV} - (-8.979 \text{ keV}) = 8.905 \text{ keV}$$

Un material servirá de filtro para los rayos X si la energía de los rayos X es mayor que la energía necesaria para expulsar los electrones de los átomos del material. De lo contrario, los rayos X incidentes no interactuarán con el material en forma apreciable y pasarán sin ser filtrados. Se ve que el pico de absorción K del Ni (8333 keV) se encuentra entre las energías K_α (8048 keV) y K_β (8905 keV) de los rayos X del Cu, por eso, los fotones K_β interactúan mucho más con el Ni que los fotones K_α . Por otra parte, tanto los fotones K_α como los K_β pueden producir emisión fotoeléctrica en la capa K del Co (7.709 keV). Luego el Ni será el mejor filtro.

- 25.1** Se aceleran electrones entre el filamento y la rejilla a través de vapor de mercurio mediante un potencial variable V , como se muestra en la figura 25-8(a). Entre la rejilla y la placa colectora se establece un pequeño potencial de retardo, $V_R \approx 0.5 \text{ V}$. Cuando se mide la corriente I en el colector, como una función del voltaje de aceleración, se obtiene la curva de la figura 25-8(b). Calcular la primera energía de excitación del mercurio y la longitud de onda de la luz emitida por el mercurio en el experimento.

Para llegar al colector, los electrones deben tener una energía cinética mayor que la energía potencial de retardo que es de unos 0.5 eV entre la rejilla y el colector. A medida que se aumenta el potencial de aceleración, los electrones adquieren más y más energía cinética y, por lo tanto, muchos más llegan al colector, dando como resultado un aumento en la corriente. Con el tiempo, los electrones adquieren una energía igual a la del primer estado excitado de los átomos de mercurio. En este momento, los electrones pueden excitar los átomos de mercurio hasta este estado, perdiendo, desde luego, energía cinética. Así, pocos electrones tendrán la energía suficiente para vencer el potencial de retardo V_R , hecho que se manifiesta en la caída de la corriente en el colector. Además, el vapor de mercurio, inicialmente oscuro, emitirá radiación cuando los átomos regresen a su estado fundamental.

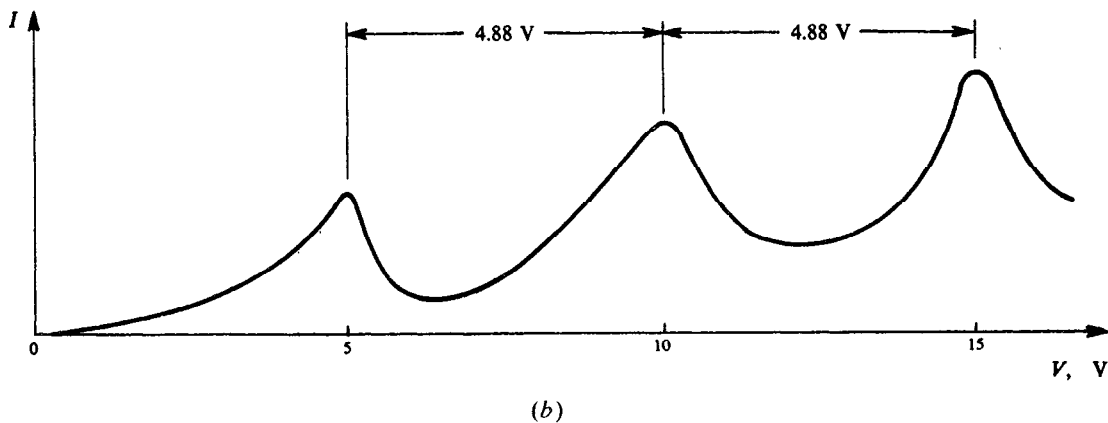
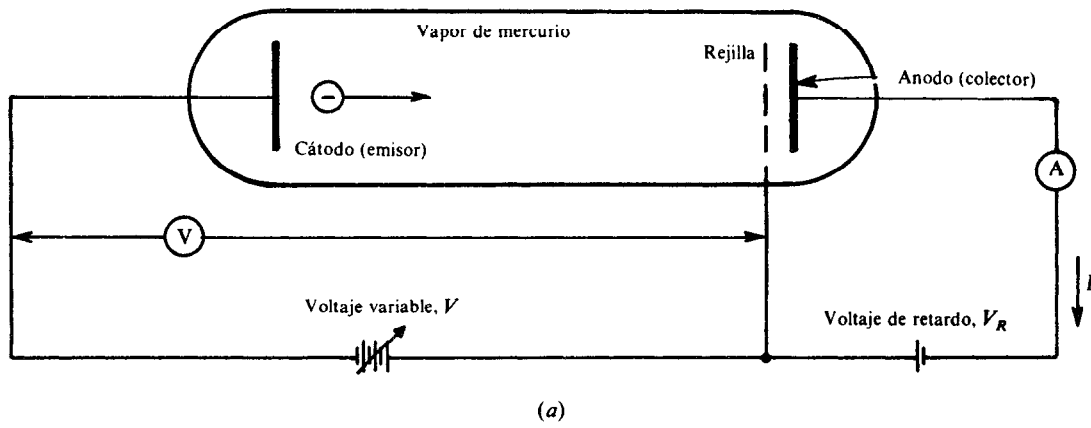


Fig. 25-8

Con posteriores aumentos en V , la corriente crecerá de nuevo, debido a que los electrones pueden adquirir energía cinética adicional después de que exciten los átomos de mercurio. Con potenciales de aceleración aún mayores, los electrones tendrán suficiente energía para excitar dos átomos de mercurio, resultando así una segunda caída en I , y así sucesivamente. (No hemos considerado la posibilidad de que un electrón pueda llevar a un átomo de mercurio a un estado excitado superior. Esto podría ocurrir, pero se requerirían variaciones especiales de potencial a través del tubo de vapor.) Las diferencias de voltaje entre los picos de corriente corresponden a la energía necesaria para excitar al mercurio hasta su primer estado excitado, luego

$$\Delta E = e \Delta V = 4.88 \text{ eV}$$

(El potencial del primer pico no puede utilizarse, debido a la existencia de V_R y a diferentes potenciales de contacto.) La longitud de onda de los fotones emitidos cuando los átomos de mercurio excitados regresan a su estado fundamental es

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{4.88 \text{ eV}} = 2540 \text{ \AA}$$

Este experimento fue realizado por primera vez por J. Franck y G. Hertz en 1914, y fue el primer experimento para demostrar la existencia de los estados estacionarios en los átomos, confirmando además la naciente hipótesis cuántica de Bohr. Además, demostró que los átomos pueden ser excitados al interactuar con electrones energéticos.

Problemas suplementarios

- 25.18 Si una transición K_{α} de rayos X de cierto elemento tiene una longitud de onda de 0.786 \AA , ¿cuál es este elemento? *Resp.* ${}_{40}\text{Zr}$
- 25.19. Un electrón es acelerado a través de un potencial de 10^5 V . Hallar la menor longitud de onda posible producida cuando este electrón interactúa con un blanco pesado. *Resp.* 0.124 \AA
- 25.20. ¿Cuántas líneas hay en la transición K_{α} de estructura fina? *Resp.* 2
- 25.21. Calcular la constante A en la ecuación de Moseley para las transiciones L_{α} si las líneas L_{α} tienen los valores de 30.1 \AA en el Ca ($Z = 20$) y 11.2 \AA en el Zn ($Z = 30$).
Resp. Para Ca, $A = 2.51 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$; para Zn, $A = 2.29 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$
- 25.22. Con los datos del problema 25.7 calcular para cada línea el valor de Z_0 en la relación de Moseley si el valor de A para cada línea se toma como $4.97 \times 10^7 \text{ Hz}^{1/2}$.
Resp.

Elemento	Sc	Ga	Nb	Sb	Pm	Lu	Tl
Z_0 para $K_{\alpha 1}$	0.99	0.91	0.67	0.21	- 0.56	- 1.75	- 3.46
Z_0 para $K_{\alpha 2}$	0.99	0.96	0.79	0.45	- 0.12	- 1.00	- 2.26

- 25.23. En un cristal de NaCl, la distancia entre los planos de la estructura es de 2820 \AA . Si la reflexión de Bragg de primer orden para una línea K_{α} de rayos X se observa desde un plano principal bajo un ángulo de 15.8° , ¿cuáles su longitud de onda? (Este problema indica cómo se pueden medir longitudes de onda de los rayos X.)
Resp. 1.54 \AA
- 25.24. Un haz de rayos X obtenidos del cobre ($K_{\alpha} = 1.54 \text{ \AA}$, $K_{\beta} = 1.39 \text{ \AA}$, $K_{\text{abs}} = 1.38 \text{ \AA}$) pasa a través de una lámina de níquel ($K_{\alpha} = 1.66 \text{ \AA}$, $K_{\beta} = 1.50 \text{ \AA}$, $K_{\text{abs}} = 1.49 \text{ \AA}$). ¿Cuál es la longitud de onda del haz emergente?
Resp. 8.05 \AA
- 25.25. En un elemento dado, ¿cuál es mayor, la absorción de energía K ó la energía de una línea K_{α} de rayos X?
Resp. La absorción de energía K
- 25.26. En el Os ($Z = 76$) los picos de absorción K y L tienen longitudes de onda 0.168 \AA y 1.17 \AA , respectivamente. ¿Cuál es la longitud de onda de la línea K_{α} ? *Resp.* 0.196 \AA
- 25.27. En el Ta ($Z = 73$) la línea K_{α} es de 0.216 \AA y el pico de absorción L es de 1.25 \AA . ¿Cuál es la longitud de onda del pico de absorción K ? *Resp.* 0.184 \AA
- 25.28. Cuando un material es irradiado con rayos X de 0.257 \AA se encuentra que el potencial de frenado para los fotoelectrones emitidos de la capa L es de 8.20 V . Hallar la longitud de onda del pico de absorción L .
Resp. 0.310 \AA
- 25.29. La energía cinética de un electrón Auger emitido por una línea K_{α} de rayos X de la capa L de un material con un pico de absorción K de 0.827 \AA es de 10.2 keV . Hallar la energía de la línea K_{α} de rayos X y la longitud de onda del pico de absorción L . *Resp.* 12.6 keV ; 5.17 \AA

Capítulo 26

Propiedades del nucleón y del deuterón

26.1 LOS NUCLEONES

Todos los núcleos están compuestos de dos tipos de partículas, los *protones* cargados positivamente y los *neutrones* sin carga eléctrica. Protones y neutrones reciben el nombre de nucleones. Sus principales propiedades aparecen en la tabla 26.1

Tabla 26-1

	Protón	Neutrón
Carga	$+ 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	0 C
Masa en reposo	$1.67252 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 938.256 MeV 1.007277 u	$1.67482 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 939.550 MeV 1.008665 u
Spin	1/2	1/2
Momento magnético	$+ 2.7928 \beta_n$	$- 1.9128 \beta_n$

La *unidad atómica de masa*, u, está definida de tal manera que un átomo de $^{12}_6\text{C}$ tenga una masa en reposo de exactamente 12 u; el *magnetón nuclear* β_n , está dado por

$$\beta_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s})}{2(1.673 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3.15 \times 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

donde m_p es la masa en reposo del protón. El signo positivo para el momento magnético indica que los vectores momento magnético y spin tienen el mismo sentido, el signo negativo indica que estos vectores tienen sentidos opuestos. Es interesante anotar que aunque el neutrón no tiene carga, posee momento magnético.

Los protones tienen un período de vida media infinito; no decaen cuando se encuentran solos. Los neutrones, por otra parte, tienen una vida media de 12 minutos; si se abandona un grupo de neutrones, la mitad de ellos, en promedio, decae en 12 minutos.

26.2 FUERZAS ENTRE NUCLEONES

Cuando los nucleones se encuentran estrechamente unidos (a unos $10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ fm}$), se observa que presentan intensas fuerzas atractivas que tienen un rango muy corto, es decir, a distancias mayores que unos pocos femtómetros las fuerzas nucleónicas son prácticamente cero. Se ha encontrado que la fuerza atractiva es independiente de la carga de los nucleones; esto significa que las fuerzas entre protón-protón, neutrón-neutrón y protón-neutrón son aproximadamente iguales.

La fuerza entre dos nucleones se compone de varias partes. Además de la componente central normal, hay un término dependiente del spin que varía según que los spines del nucleón estén alineados o estén en sentido contrario. Además, existe una componente no central que no apunta en la dirección de la línea que

une los dos nucleones. Esta componente no central depende de cómo estén orientados los spines de los nucleones respecto a la línea que los une.

A distancias mucho menores que 1 fm, las fuerzas nucleónicas cambian su carácter de fuerzas atractivas y se convierten en repulsivas. Este comportamiento se conoce generalmente como *corazón nuclear repulsivo*.

26.3 EL DEUTERON

Un *deuterón* ó *deuterio* es un sistema ligado compuesto de un protón y un neutrón, y como tal representa el núcleo más simple que tiene más de un nucleón. Las propiedades de un deuterón son: carga, $+1.6 \times 10^{-19}$ C; masa, 1875.5803 MeV ó 2.013553 u; spin, $S = 1$ (esta es la suma de los spines del protón y del neutrón); momento magnético $+0.8574\beta_n$; momentum angular total, $J = 1$.

Es posible asignarle a un átomo un único momentum angular cuantizado L . Puesto que la interacción protón-neutrón no es central, se encuentra que el deuterón no posee un momentum angular definido. En cambio, un deuterón en su estado fundamental tiene un 96% de probabilidad de encontrarse en un estado S ($L = 0$) y un 4% de probabilidad de estar en un estado D ($L = 2$).

También se ha encontrado que el deuterón no es esférico. Una cantidad que mide la desviación de esfericidad de un cuerpo cargado es el *momento cuadrupolar eléctrico* (ver problema 26.5). Si un cuerpo es esférico, su momento cuadrupolar, es cero. El momento cuadrupolar de un deuterón encontrado experimentalmente es de $+0.282 \text{ fm}^2$.

La discusión anterior muestra que, a pesar de que el deuterón está compuesto de sólo dos nucleones, su estructura es muy compleja, indicando así las complicaciones que deben esperarse cuando se estudian núcleos más pesados.

Problemas resueltos

- 26.1.** Un electrón está aprisionado dentro de un núcleo, cuyo diámetro es de 10^{-14} m, calcular su mínima energía cinética.

La longitud de onda de de Broglie para un electrón de mínima energía aprisionado en el núcleo sería aproximadamente el doble del diámetro nuclear (media longitud de onda debe acomodarse en el diámetro). Por lo tanto, el momentum del electrón sería aproximadamente de

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{12.4 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{(2 \times 10^{-4} \text{ \AA})c} = 62 \times 10^6 \frac{\text{eV}}{c} = 62 \frac{\text{MeV}}{c}$$

lo cual corresponde a una energía cinética de

$$K = \sqrt{(pc)^2 + E_0^2} - E_0 = \sqrt{\left(62 \frac{\text{MeV}}{c} \times c\right)^2 - (0.511 \text{ MeV})^2} - 0.511 \text{ MeV} = 61 \text{ MeV}$$

- 26.2.** Calcular la energía de Coulomb del electrón para el núcleo del problema 26.1.

El número nucleónico A es aproximadamente (ver sección 27.3)

$$A = \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 = \left(\frac{0.5 \times 10^{-14} \text{ m}}{1.4 \times 10^{-15} \text{ m}}\right)^3 \approx 46$$

Para estos núcleos, el número de protones es $Z \approx A/2 = 23$. Si suponemos que el electrón se encuentra en la periferia del núcleo, la energía de Coulomb está dada por

$$E_C = -\frac{ke^2Z}{R} = -\frac{(1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm})(23)}{5 \text{ fm}} = -6.6 \text{ MeV}$$

Esta corrección es despreciable comparada con los 61 MeV de energía cinética del electrón encontrada en el problema 26.1. Los electrones emitidos de los núcleos tienen energías cinéticas de unos pocos MeV y no de aproximadamente 54 MeV, como lo predice este problema y el anterior. Además, debe existir algún tipo de barrera positiva, tal que los electrones puedan estar ligados al núcleo con una energía positiva. Ninguno de estos efectos puede obtenerse mediante una interacción de Coulomb, de ahí que una conclusión razonable consiste en asegurar que los electrones no son partes constitutivas del núcleo.

Una propuesta alterna, presentada por E. Rutherford en 1920, consistió en ubicar en el núcleo partículas de masa aproximadamente igual a la del protón, pero con carga cero. En 1932, J. Chadwick verificó por medio de sus experimentos la existencia de estos *neutrones* (ver problemas 30.14 al 30.16), estableciéndose así que un núcleo está compuesto por Z protones y $N = A - Z$ neutrones, para un total de A nucleones.

26.3. Calcular la energía de enlace del deuterón.

La energía de enlace del deuterón es igual a la energía necesaria para separar el deuterón en un protón y un neutrón.

$$\begin{aligned} \text{BE} &= (m_p + m_n - M_d)c^2 \\ &= 938.256 \text{ MeV} + 939.550 \text{ MeV} - 1875.5803 \text{ MeV} = 2.226 \text{ MeV} \end{aligned}$$

26.4. Calcular la diferencia entre el momento magnético del deuterón y la suma de los momentos magnéticos del protón y el neutrón.

Momento magnético del protón	$2.793\beta_n$
Momento magnético del neutrón	$-1.913\beta_n$
SUMA	$0.880\beta_n$
Momento magnético del deuterón	$0.857\beta_n$
DIFERENCIA	$0.023\beta_n$

El momento magnético del deuterón no es igual a la suma de los momentos magnéticos del protón y el neutrón porque el deuterón no siempre se encuentra en un estado S ($L = 0$) sino que puede encontrarse en un estado D ($L = 2$) durante 4% del tiempo.

26.5. El momento cuadrupolar eléctrico de una distribución de carga nuclear simétrico alrededor del eje z está dado por

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{e} \int_V (3z^2 - r^2) \rho(x, y, z) d\tau \quad (1)$$

donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de carga y $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Para un elipsoide de revolución uniformemente cargado definido por la ecuación

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

el momento cuadrupolar eléctrico se reduce a

$$\mathcal{Q} = \frac{2Z}{5} (b^2 - a^2) \quad (3)$$

donde Ze es la carga total nuclear. Si el radio nuclear promedio se considera como $R_0^3 = a^2b$ (el volumen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi a^2b$), con $R_0 + \delta R_0 = b$, demuestre que el momento cuadrupolar eléctrico es

$$\mathcal{Q} = \frac{6Z}{5} R_0^2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)$$

Si $b = R_0 + \delta R_0$ y $R_0^3 = a^2 b$, entonces, para $\delta R_0 \ll R_0$,

$$a^2 = \frac{R_0^3}{R_0 + \delta R_0} = \frac{R_0^2}{1 + \frac{\delta R_0}{R_0}} \approx R_0^2 \left(1 - \frac{\delta R_0}{R_0} \right)$$

y

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &\approx R_0^2 \left[1 + 2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right) + \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)^2 \right] - R_0^2 \left(1 - \frac{\delta R_0}{R_0} \right) \\ &= R_0^2 \left[3 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right) + \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)^2 \right] \approx 3 R_0^2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathcal{Q} = \frac{2Z}{5} (b^2 - a^2) = \frac{6Z}{5} R_0^2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)$$

- 26.6.** El momento cuadripolar del $^{155}_{64}\text{Gd}$ es 130 fm^2 . Si R_0 está dado por $R_0 = (1.4 \text{ fm}) A^{1/3}$, hallar $\delta R_0/R_0$.

El radio promedio es

$$R_0 = (1.4 \text{ fm}) A^{1/3} = (1.4 \text{ fm})(155)^{1/3} = (1.4 \text{ fm})(5.37) = 7.52 \text{ fm}$$

Del problema 26.5,

$$\mathcal{Q} = \frac{6Z}{5} R_0^2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)$$

$$130 \text{ fm}^2 = \frac{6(64)}{5} (7.52 \text{ fm})^2 \left(\frac{\delta R_0}{R_0} \right)$$

$$\frac{\delta R_0}{R_0} = 2.99 \times 10^{-2} = 2.99\%$$

Esto demuestra que para el $^{155}_{64}\text{Gd}$ el núcleo es casi esférico, con una desviación de esfericidad de sólo un 2.99% del radio promedio.

- 26.7.** Determinar los posibles estados de un deuterón si su momentum angular total tiene un número cuántico $J = 1$.

El momentum angular total (\mathbf{J}) del deuterón es la suma vectorial del momentum angular del sistema ligado neutrón-protón (\mathbf{L}) y el spin intrínseco total del sistema neutrón-protón (\mathbf{S}). Puesto que ambos, neutrón y protón tienen spin $S = 1/2$, el spin total intrínseco es 0 (único estado) ó 1 (estado triple). Como $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ y $J = 1$; $S = 0, 1$, los únicos valores posibles para L son 0, 1 y 2. En la notación espectroscópica de la sección 24.3, los posibles estados del deuterón son 3S_1 , 3P_1 , 1P_1 y 3D_1 .

El estado fundamental del deuterón es una mezcla de 3S_1 y 3D_1 .

Problemas suplementarios

- 26.8.** Calcular el magnetón nuclear en unidades de J/T. *Resp.* 5.03×10^{-27} J/T.
- 26.9.** ¿Cuál es la relación del magnetón nuclear al magnetón de Bohr para un electrón? *Resp.* 5.45×10^{-4}
- 26.10.** Hallar la relación entre la densidad nuclear a la atómica para el hidrógeno. (Suponga que el radio del núcleo es 1 fm.) *Resp.* 0.15×10^{15}
- 26.11.** Un rayo γ es absorbido y disocia un deuterón en un protón y un neutrón. Si el neutrón forma un ángulo de 90° con la dirección del rayo γ , calcular las energías cinéticas del protón y el neutrón.
Resp. $K_p = 1.91$ MeV; $K_n = 1.86$ MeV
- 26.12.** Calcular el ángulo que forma el protón con el rayo γ en el problema 26.11. *Resp.* 84°
- 26.13.** Con relación al problema 26.5. Deducir (3) a partir de (1) y (2) y del hecho de que el elipsoide esté uniformemente cargado.
- 26.14.** El momento cuadripolar eléctrico del ${}^{165}_{67}\text{Ho}$ es 300 fm^2 . Si $R_0 = (1.4)A^{1/3}$, hallar $\delta R_0/R_0$.
Resp. 6.33%

Capítulo 27

Propiedades de los núcleos

De todos los núcleos conocidos, cerca de 270 son estables, mientras que aproximadamente cuatro y media veces ese número son inestables. La siguiente es una descripción de algunas de las propiedades básicas de los núcleos en su estado fundamental (de más baja energía). Parte de esta discusión es también aplicable a los núcleos en estados excitados.

27.1 DESIGNACION DE LOS NUCLEOS

Cada núcleo está identificado por el número atómico Z , un número entero igual al número de protones en el núcleo; un número entero N , igual al número de neutrones y un número de masa $A = N + Z$, que es el número total de nucleones. Los núcleos se designan con el símbolo X del elemento químico, con el valor de Z como subíndice izquierdo y el valor de A como superíndice izquierdo; así, A_ZX . Por ejemplo, ${}^{23}_{11}\text{Na}$ tiene 11 protones, 23 nucleones y $23 - 11 = 12$ neutrones.

Los núcleos se agrupan en tres categorías. Los *isótopos* son núcleos con el mismo número atómico (protones) Z , v.g. ${}^{16}_8\text{O}$ y ${}^{17}_8\text{O}$. Los *isótonos* son núcleos con el mismo número de neutrones N , por ejemplo, ${}^{13}_6\text{C}$ y ${}^{14}_7\text{N}$. Los *isóbaros* son núcleos con el mismo número de masa A , v.g. ${}^{14}_6\text{C}$ y ${}^{14}_7\text{N}$.

27.2 NUMERO RELATIVO DE PROTONES Y DE NEUTRONES

En los núcleos livianos el número de neutrones es aproximadamente igual al de protones ($N \approx Z$). A medida que crece el número de nucleones, se encuentra que para núcleos estables, el número de neu-

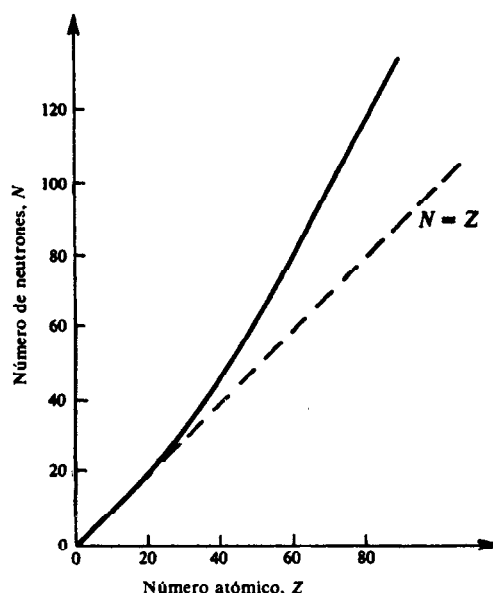


Fig. 27-1

trones se torna mayor que el número de protones ($N > Z$), siguiendo aproximadamente la curva mostrada en la figura 27-1. El exceso de neutrones se debe a que la fuerza repulsiva de Coulomb de los protones los mantiene alejados. Por lo tanto, la masa de protones es menos densa que la masa de neutrones y cuando el número de nucleones aumenta, hay menos protones que neutrones en un volumen dado.

27.3 EL NUCLEO COMO UNA ESFERA

Si se supone que la densidad de la materia nuclear es constante, el volumen del núcleo será directamente proporcional al número de nucleones, A , en él. Por simetría esférica tenemos $V = (\frac{4}{3}\pi r_0^3)A$, lo que da como radio nuclear

$$R = r_0 A^{1/3}$$

Se han realizado varios experimentos para comprobar esta relación y obtener r_0 . Se ha encontrado que el valor de r_0 depende de la propiedad nuclear que se mide. Para el tamaño de la distribución de masa, $r_0 = 1.4$ fm; mientras que para el tamaño de la distribución de carga, $r_0 = 1.2$ fm. A menos que se especifique otra cosa, en la discusión y problemas siguientes, se utilizará el valor de $r_0 = 1.4$ fm.

Del modelo esférico del núcleo con distribución de carga uniforme Ze se deduce que este tiene una energía electrostática de (ver problema 27.7)

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{kZ(Z-1)e^2}{R}$$

$$\approx \frac{3}{5} \frac{kZ^2e^2}{R} \quad (\text{para } Z \text{ grande})$$

Esta relación proporciona un método para determinar la dimensión de las distribuciones nucleares de carga.

27.4 ENERGIA DE ENLACE NUCLEAR

Se ha encontrado que la masa en reposo de un núcleo estable es menor que la suma de las masas en reposo de los nucleones que lo forman. El decrecimiento en la masa, es debido a la energía negativa necesaria para mantener los nucleones unidos dentro del núcleo (ver problema 26.3). La energía total de enlace, EE , se obtiene de la diferencia entre las energías en reposo de los nucleones que conforman el núcleo y la energía de reposo del núcleo final:

$$EE = (Zm_p)c^2 + (Nm_n)c^2 - M_{\text{nuc}}c^2$$

donde m_p , m_n , y M_{nuc} son respectivamente, las masas en reposo del protón, neutrón y nuclear. El modelo de "gota de líquido" (sección 28.1) puede utilizarse para calcular las energías de enlace de los núcleos estables.

Generalmente en las tablas aparecen las masas atómicas de los elementos en vez de las masas nucleares de los mismos. Para obtener la masa nuclear, es necesario restar de la masa atómica la de los electrones del átomo. (Estrictamente hablando, debería agregarse la masa equivalente a la energía de enlace de los electrones, pero esta es, por lo general, despreciable comparada con las masas en reposo.) Por ejemplo, ${}^6_3\text{Li}$, que tiene una masa atómica de 6.015125 u, tiene una masa nuclear de

$$M_{\text{nuc}} = M_{\text{atom}} - Zm_e = 6.015125 \text{ u} - 3(0.000549 \text{ u}) = 6.013478 \text{ u}$$

A menos que se diga otra cosa, las masas dadas en los problemas serán las masas atómicas. Cuando los valores de las masas no sean dados, el lector deberá consultar la tabla de masas atómicas en el apéndice. Cuando sea aplicable, en la expresión de EE la masa del hidrógeno será utilizada en lugar de la masa del protón, con el fin de compensar los electrones en las masas atómicas.

Problemas resueltos

- 27.1. Calcular los radios de los núcleos de ^{16}O y ^{208}Pb .

$$\text{De } R = r_0 A^{1/3} = (1.4 \text{ fm}) A^{1/3},$$

$$R_{\text{O}} = (1.4 \text{ fm})(16)^{1/3} = 3.53 \text{ fm}$$

$$R_{\text{Pb}} = (1.4 \text{ fm})(208)^{1/3} = 8.29 \text{ fm}$$

- 27.2. Determinar la densidad aproximada de un núcleo.

Si el núcleo se considera como una esfera uniforme,

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} \approx \frac{A \times (\text{masa de un nucleón})}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{A(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})}{\frac{4}{3}\pi(1.4 \times 10^{-15} A^{1/3} \text{ m})^3} = 1.5 \times 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Una pulgada cúbica de material nuclear pesaría cerca de 10^3 millones de toneladas.

- 27.3. Encontrar el núcleo estable, cuyo radio es $1/3$ del radio del ^{189}Os .

Puesto que $R \propto A^{1/3}$,

$$\frac{1}{3} = \frac{R}{R_{\text{Os}}} = \left(\frac{A}{A_{\text{Os}}} \right)^{1/3} = \left(\frac{A}{189} \right)^{1/3}$$

lo que da

$$A = \frac{189}{27} = 7$$

que corresponde a ^7Li .

- 27.4. Un núcleo con $A = 235$ se fisiona en dos nuevos núcleos, cuyos números de masa están en relación de 2 : 1. Hallar los radios de los nuevos núcleos.

Los nuevos números de masa son

$$A_1 = \frac{1}{3}(235) \quad A_2 = \frac{2}{3}(235)$$

por lo tanto

$$r_1 = (1.4 \text{ fm}) A_1^{1/3} = (1.4 \text{ fm}) \left(\frac{235}{3} \right)^{1/3} = 5.99 \text{ fm}$$

$$r_2 = (1.4 \text{ fm}) A_2^{1/3} = (1.4 \text{ fm}) \left[\frac{2}{3}(235) \right]^{1/3} = 7.55 \text{ fm}$$

- 27.5. Calcular la energía de enlace del $^{126}_{52}\text{Te}$.

La energía de enlace está dada por

$$EE = (Zm_p)c^2 + (Nm_n)c^2 - M_{\text{nuc}}c^2$$

$$= (52 \times 1.007825 \text{ u} + 74 \times 1.008665 \text{ u} - 125.903322 \text{ u}) \times 931.5 \text{ MeV/u} = 1.066 \times 10^3 \text{ MeV}$$

ó 1.066 GeV.

- 27.6. ¿Cuál es la energía necesaria para extraer el neutrón más débilmente ligado en el $^{40}_{20}\text{Ca}$?

De la conservación de la masa-energía,

$$M_{^{40}\text{Ca}}c^2 + E = (M_{^{39}\text{Ca}} + m_n)c^2$$

$$(39.962589 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) + E = (38.970691 \text{ u} + 1.008665 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u})$$

$$E = 15.6 \text{ MeV}$$

- 27.7.** Calcular la energía potencial eléctrica de los protones en un núcleo si se supone que la carga está uniforme y esféricamente distribuida.

Consideremos una delgada capa esférica de carga,

$$dq = \rho dV = \rho(4\pi r^2 dr)$$

esto se suma sobre una esfera con la misma densidad de carga y que tiene una carga total

$$q = \rho V = \rho \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right)$$

La energía potencial eléctrica dE de la capa delgada es

$$dE = \frac{kq}{r} dq = \frac{k}{r} \left(\frac{4}{3} \rho \pi r^3 \right) (4\pi \rho r^2 dr) = 3k \left(\frac{4}{3} \rho \pi \right)^2 r^4 dr$$

La energía potencial total de la esfera se obtiene integrando dE desde $r = 0$ hasta $r = R$ el radio final de la esfera.

$$E = \int_0^R dE = 3k \left(\frac{4}{3} \rho \pi \right)^2 \int_0^R r^4 dr = \frac{3}{5} k \left(\frac{4}{3} \rho \pi \right)^2 R^5 = \frac{3k}{5R} \left(\frac{4}{3} \rho \pi R^3 \right)^2$$

Puesto que $\frac{4}{3} \rho \pi R^3 = \rho V = Q = Ze$, tenemos

$$E = \frac{3}{5} \frac{kZ^2 e^2}{R}$$

Las cargas que conforman un núcleo no son en realidad continuas, sino que están agrupadas en cantidades discretas. Para $Z = 1$ la energía de Coulomb sería cero, no obstante, la expresión anterior da una respuesta finita. Para corregir la relación anterior, debe sustituirse en ella Z^2 por $Z(Z - 1)$. Para valores grandes de Z , esta es una corrección mínima, no así para valores pequeños de Z . La expresión correcta para la energía de Coulomb es

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{kZ(Z - 1)e^2}{R}$$

- 27.8.** Calcular la energía de Coulomb del ${}^{73}_{32}\text{Ge}$.

Utilizando el resultado del problema 27.7, tenemos

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{3}{5} \frac{kZ(Z - 1)e^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{ke^2 Z(Z - 1)}{r_0 A^{1/3}} = \frac{3}{5} \frac{(1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm})}{(1.4 \text{ fm}) A^{1/3}} Z(Z - 1) \\ &= (0.617 \text{ MeV}) \frac{Z(Z - 1)}{A^{1/3}} = (0.617 \text{ MeV}) \frac{32(31)}{(73)^{1/3}} = 146 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Problemas suplementarios

Las masas atómicas están tabuladas en el apéndice.

- 27.9.** Utilizando la notación patrón, dé los símbolos para el neón con 20 nucleones e itrio con 89 nucleones.
 Resp. ${}^{20}_{10}\text{Ne}$; ${}^{89}_{39}\text{Y}$
- 27.10.** El radio del Ge es el doble que el radio del ${}^9_4\text{Be}$. Con estos datos, ¿cuántos nucleones hay en el Ge?
 Resp. 72

- 27.11. ¿Cuál es la energía necesaria para extraer el protón más débilmente ligado en el ${}^{40}_{20}\text{Ca}$? Compare esta respuesta con la obtenida en el problema 27.6. *Resp.* 8.33 MeV
- 27.12. Calcule la relación del radio nuclear del ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ al radio de los electrones más próximos al núcleo obtenido de la teoría de Bohr. *Resp.* 1/77.8
- 27.13. Calcular el valor de Z para el cual, las expresiones para la energía de Coulomb correcta y aproximada, difieran en un 5%. *Resp.* 21
- 27.14. Calcular las energías de Coulomb del ${}^{18}_8\text{O}$ y ${}^{172}_{71}\text{Lu}$. *Resp.* 13.2 MeV; 548 MeV
- 27.15. ¿Cuál es la energía de enlace del ${}^{39}_{19}\text{K}$? *Resp.* 333.7 MeV

Capítulo 28

Modelos nucleares

En la actualidad no existe una teoría fundamental que explique todas las propiedades observadas de los núcleos. A falta de una teoría, se han desarrollado diferentes modelos, cada uno de los cuales explica con éxito algunas de las propiedades nucleares.

28.1 EL MODELO DE GOTA DE LIQUIDO

En 1935 C. v. Weizsäcker descubrió que las propiedades nucleares relacionadas con tamaño, masa y energía de enlace eran parecidas a las encontradas para una gota de líquido. En una gota de líquido la densidad es constante, el tamaño es proporcional al número de partículas, o moléculas, de la gota y el calor de vaporización, o energía de enlace, de la gota es directamente proporcional a la masa o número de partículas que conforman la gota.

Como lo demostraremos más adelante, el modelo nuclear de gota de líquido conduce a la siguiente expresión, conocida como *fórmula semiempírica de la masa*, que proporciona la masa del núcleo en función de A y Z :

$$M = Zm_p + (A - Z)m_n - b_1A + b_2A^{2/3} + b_3Z^2A^{-1/3} + b_4(A - 2Z)^2A^{-1} + b_5A^{-3/4} \quad (28.1)$$

Las constantes que aparecen en la ecuación (28.1) se determinan de datos experimentales; sus valores (en unidades de energía) pueden tomarse como

$$\begin{aligned} b_1 &= 14.0 \text{ MeV} & b_3 &= 0.58 \text{ MeV} \\ b_2 &= 13.0 \text{ MeV} & b_4 &= 19.3 \text{ MeV} \end{aligned}$$

y b_5 está dado de acuerdo con el siguiente esquema:

A	Z	b_5
Par	Par	- 33.5 MeV
Impar	Impar	0
Par	Impar	+ 33.5 MeV

Los términos de (28.1) han sido obtenidos mediante una serie de correcciones sucesivas, como se indica a continuación.

Despreciando la energía de enlace, la primera aproximación de la masa de un núcleo formado por Z protones y $N = A - Z$ neutrones, sería $Zm_p + (A - Z)m_n$.

A continuación, este valor de la masa se corrige considerando la energía de enlace de los nucleones. Puesto que la fuerza nuclear es atractiva, esta energía de enlace será positiva (para separar los nucleones debe efectuarse un trabajo positivo), por eso la masa del núcleo será menor que la masa de los nucleones separados. Del modelo de gota de líquido, el calor de vaporización (energía de enlace) será directamente proporcional al número de nucleones A , resultado que se traduce en una corrección de $-b_1A$ ($b_1 > 0$).

La suposición hecha en la primera corrección, con la energía de enlace igual a b_1 por nucleón, equivale a suponer que todos los nucleones están igualmente rodeados por otros nucleones. Esto, por supuesto, no es verdadero para los nucleones de la superficie nuclear, que están más débilmente ligados. Por lo tanto, en la

primera corrección se sustrajo demasiado y por eso debe agregarse una corrección de masa proporcional al área de la superficie nuclear, $b_2 A^{2/3}$, para tener en cuenta este efecto de "superficie".

La energía positiva de Coulomb entre los protones, E_C , (que es equivalente a la energía de enlace $-E_C$) aumenta la masa del núcleo en una cantidad E_C/c^2 . Del problema 27.7, para Z grande,

$$E_C \propto Z^2 R^{-1} = Z^2 (r_0 A^{1/3})^{-1} \propto Z^2 A^{-1/3}$$

que se considera en el término $b_3 Z^2 A^{-1/3}$.

Hasta aquí, todos los términos de la expresión de la masa nuclear se han obtenido por analogía con una gota de líquido incompresible y cargada. Además, debido a los efectos mecánico-cuántico, generalmente se agregan dos términos, como sigue.

Se ha encontrado que si en un núcleo hay más neutrones que protones (o viceversa), su energía y, por consiguiente su masa, se aumenta debido al principio de exclusión de Pauli. El término de corrección por este efecto depende del neutrón (o protón) de exceso, de acuerdo con

$$b_4 (N - Z)^2 A^{-1} = b_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}$$

(ver problema 28.16).

Los nucleones en el núcleo también tienden a "aparejarse", es decir, los neutrones y los protones se agrupan juntos con sus spines opuestos. Debido a este efecto se ha encontrado que existe una energía de apareamiento que varía según $A^{-3/4}$ que crece con el número de nucleones no apareados. Este número se determina como sigue:

A	Z	Número de nucleones sin aparear
Par	Par	0
Impar	Par	1
Par	Impar	2 (1 neutrón y 1 protón)

La inclusión de este término de energía de apareamiento da la expresión final, (28.1), para la masa nuclear.

La *energía de enlace promedio por nucleón* se obtiene de (28.1) efectuando la diferencia entre la masa-energía nuclear y la masa-energía de los nucleones que la integran dividida por el número de nucleones:

$$BE/A = \frac{[Zm_p + (A - Z)m_n - M]c^2}{A} = b_1 - b_2 A^{-1/3} - b_3 Z^2 A^{-4/3} - b_4 (A - 2Z)^2 A^{-2} - b_5 A^{-7/4} \quad (28.2)$$

(Obsérvese que EE/A no es la misma energía necesaria para extraer un único nucleón de un núcleo dado.) En la figura 28-1 se indica el gráfico de esta ecuación. Se observa que para un valor grande de A el valor de EE/A es aproximadamente constante con un valor de 8 MeV.

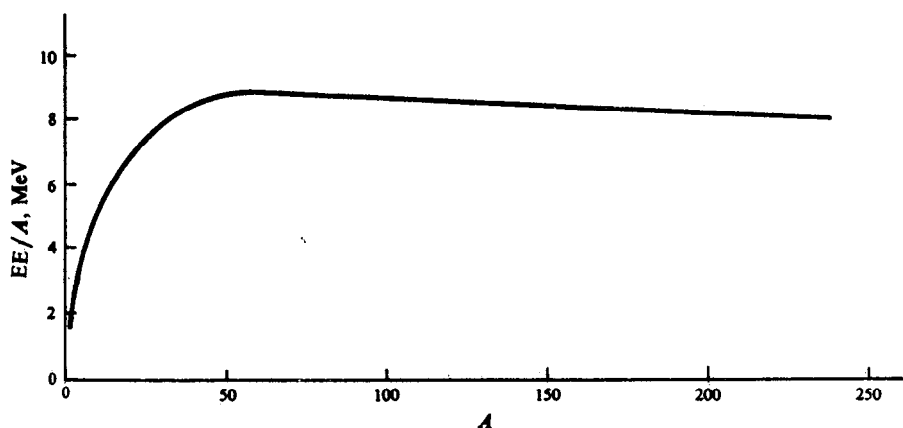


Fig. 28-1

Debe resaltarse que las ecuaciones (28.1) ó (28.2) no dan valores exactos sino que predicen únicamente valores aproximados con exactitud diferente para diferentes núcleos, como se demuestra en los problemas resueltos.

28.2 MODELO DE CAPAS

En el modelo de gota de líquido, el núcleo no se considera individualmente sino que sus efectos son promediados sobre el núcleo. Con este modelo se explican satisfactoriamente algunas propiedades nucleares como la energía de enlace promedio por nucleón. Sin embargo, otras propiedades nucleares, tales como las energías de los estados excitados y los momentos magnéticos nucleares requieren un modelo microscópico que tenga en cuenta el comportamiento individual de los nucleones.

A medida que los datos nucleares se han venido acumulando, ha resultado evidente que aparecen enormes cambios en las propiedades nucleares en los núcleos con N ó Z igual a 2, 8, 20, 28, 50, 82 ó 126, generalmente conocidos como “números mágicos”. Se ha encontrado que los núcleos correspondientes a estos números mágicos son particularmente estables y numerosos y el último de los nucleones mágicos que completa esta “capa” tiene energías altas de enlace. Además, se ha encontrado que las energías del primer estado excitado son mayores para los núcleos cercanos que no tienen números mágicos. Por ejemplo, el estaño, con el número mágico $Z = 50$, tiene 10 isótopos estables (el mismo Z y diferente A), la energía necesaria para extraer un protón es de aproximadamente 11 MeV, los primeros estados excitados de los isótopos par-par (esto es, N y Z pares) son de aproximadamente 1.2 MeV por encima del estado fundamental. En cambio, para los isótopos cercanos al telurio, con $Z = 52$, la energía necesaria para extraer un protón es aproximadamente 7 MeV y para el primer estado excitado de los isótopos par-par la energía es aproximadamente de 0.60 MeV.

Recordemos que en los átomos se observan fluctuaciones semejantes, cuando los electrones llenan completamente las diferentes capas atómicas (capítulo 24). Este comportamiento similar nos lleva a pensar que algunas propiedades nucleares podrían explicarse en términos de un *modelo de capas nuclear*.

La estructura *atómica* de capas se obtiene mediante una serie de aproximaciones sucesivas. En primer lugar, se supone que los niveles de energía para un núcleo de carga Ze se llenan sucesivamente con electrones Z cuando no interactúan unos con otros y luego se tienen en cuenta las correcciones para diferentes efectos de interacción. No obstante, estas correcciones son pequeñas; el principal efecto que resulta en la primera aproximación de los niveles de capas, consiste en que, en promedio, los electrones se mueven independientemente en el campo de Coulomb del núcleo.

Si se considera la misma aproximación para desarrollar el modelo de capas para el núcleo, debe utilizarse un potencial diferente para representar las fuerzas nucleares de corto alcance. Una aproximación consiste en suponer que los nucleones se mueven en promedio en un potencial oscilador armónico.

$$V = \frac{1}{2} kR^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2$$

Un tratamiento mecánico-cuántico demuestra que los niveles de energía están dados por

$$E = \left(\mathcal{N} + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega \quad (28.3)$$

con $\mathcal{N} = 2(n-1) + l$. La cantidad de l es el número cuántico del momentum angular orbital y toma uno de los valores 0, 1, 2, 3, ...; se acostumbra relacionarlo con el vector momentum angular orbital, según $|\mathbf{l}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$. (Para los nucleones, tanto los vectores cuantizados como los números cuánticos se representan con letras minúsculas.) La cantidad n es un número entero y toma los valores 1, 2, 3, 4, A diferencia de la solución del átomo de hidrógeno, el valor de l no está limitado por n .

Los estados del momentum angular orbital del nucleón se indican en notación espectroscópica así:

valor de l :	0	1	2	3	4	5	...
símbolo:	<i>s</i>	<i>p</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	...

El orden (con respecto a la energía creciente) de un determinado estado l se indica dando la letra símbolo con el valor de n . (Para un l fijo, \mathcal{N} aumenta con n .) Así, el estado $2d$ es el siguiente estado más bajo para el estado $l = 2$.

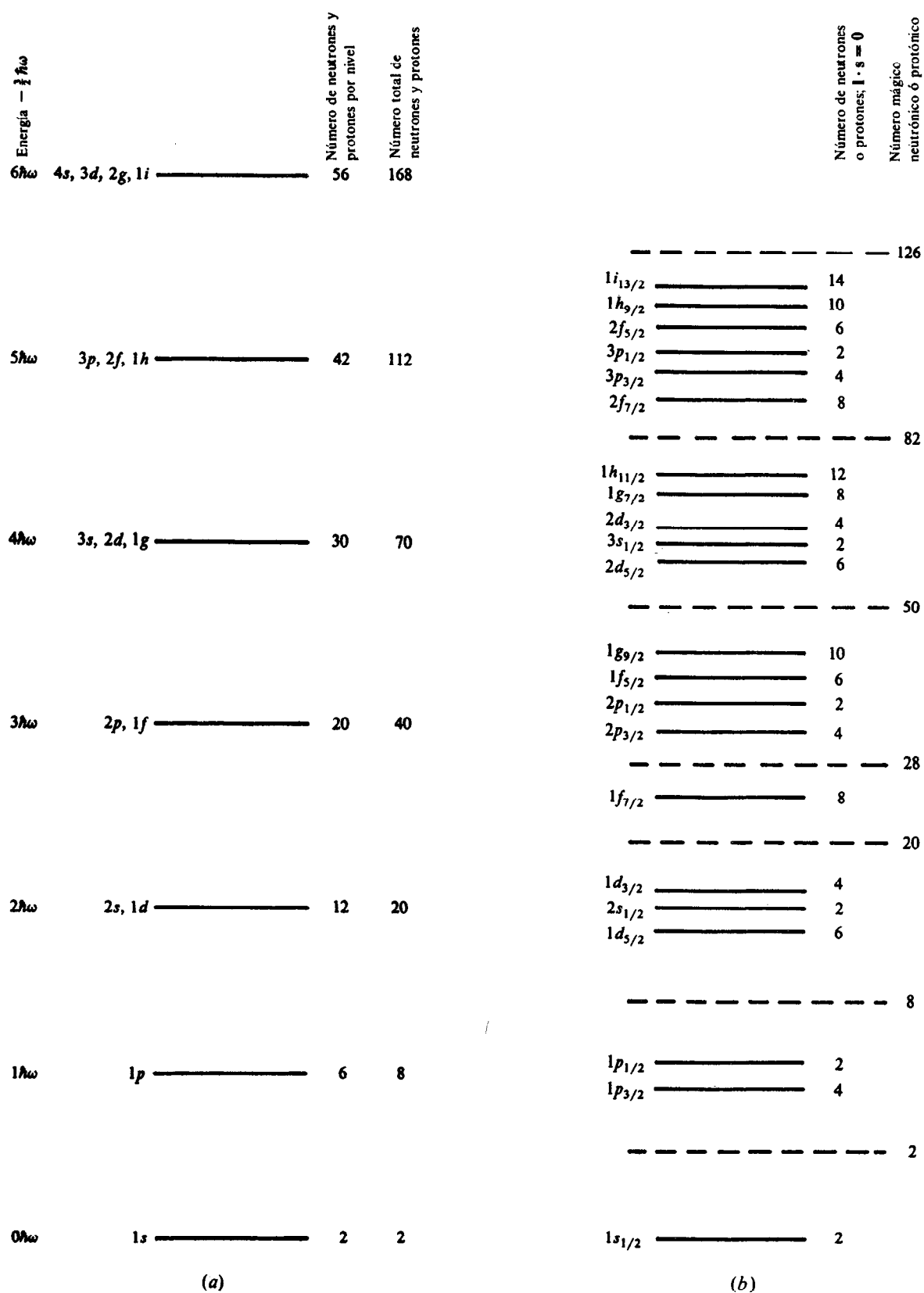


Fig. 28-8

La figura 28-2(a) muestra los niveles de energía predichos por un potencial oscilador armónico, junto con el máximo número de nucleones en cada nivel de energía de acuerdo con el principio de exclusión de Pauli. Se ve que los niveles de energía finales se encuentran en los nucleones 2, 8, 20, 40, 70, 112 y 168, de los cuales solamente los tres primeros son números mágicos.

Para tener en cuenta los números mágicos observados, M. Mayer y J. Jensen en 1949, individualmente propusieron la existencia de una interacción spin-órbita ($\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$) además del potencial oscilador armónico. Puesto que los nucleones tienen un único valor $s = \frac{1}{2}$ para su número cuántico de spin, el efecto spin-órbita ocasionará para cada estado de momentum angular orbital con $l > 0$ un desdoblamiento en dos órbitas (u orbitales), según que el número cuántico del momentum angular total j sea $j = l + s$ ó $j = l - s$ [ver ecuación (22.6)]. La energía de desdoblamiento se encuentra al calcular $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ (problema 22.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} &= \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \\ &= \begin{cases} \frac{l}{2} \hbar^2 & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{l+1}{2} \hbar^2 & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (28.4)$$

Restando estas dos expresiones se encuentra que la separación de energía entre las dos órbitas es proporcional a $2l + 1$ y, por lo tanto, aumenta cuando l aumenta.

Las órbitas se designan agregando el valor de j como un subíndice derecho al símbolo para el estado del momentum angular orbital. Por ejemplo $1d_{3/2}$ se utiliza para las combinaciones de números cuánticos $n = 1$, $l = 2$, $j = l - s = 3/2$. Para los núcleos es conveniente reformular el principio de exclusión de Pauli como sigue: dos nucleones no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos (n, l, j, m_j). Por lo tanto, (problema 28.10) una órbita puede contener a lo sumo $2j + 1$ nucleones.

En los átomos el desdoblamiento spin-órbita es un efecto pequeño que da lugar a la estructura "fina". En los núcleos, sin embargo, la interacción spin-órbita es más bien fuerte y da lugar a desdoblamientos de energía comparables con la separación entre los niveles de energía del oscilador armónico. Otra diferencia entre el desdoblamiento $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ en los núcleos y en los átomos consiste en que en los núcleos la energía de la órbita $j = l + \frac{1}{2}$ es inferior que la de la órbita $j = l - \frac{1}{2}$, lo cual está en oposición a lo que se encontró para los átomos.

No es posible predecir si el desdoblamiento spin-órbita sobrepasará o no los niveles iniciales del oscilador armónico. El ordenamiento final de las órbitas se determina mediante evidencia experimental y se indica en la figura 28.2(b). Las capas finales —el número total de nucleones por encima de la mayor separación de energía— corresponden a los números mágicos.

Los protones (y neutrones) en la misma órbita tienden a aparearse para dar un momentum angular cero. Por lo tanto, los núcleos par-par tendrán un momentum angular total $J = \sum j$, de cero, mientras que si un núcleo tiene un número impar de protones o neutrones su momentum angular total es igual al momentum angular del último (impar) nucleón. Para núcleos impar-impar la situación es más complicada (ver problema 28.13).

Problemas resueltos

- 28.1. ¿Cuál es la energía de repulsión de Coulomb de los dos protones en un ${}^3_2\text{He}$ si se supone que están separados una distancia igual al radio nuclear?

La energía de Coulomb es

$$E_C = \frac{ke^2}{R} = \frac{ke^2}{(r_0 A^{1/3})} = \frac{1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{(1.4 \text{ fm})(3^{1/3})} = 0.71 \text{ MeV}$$

- 28.2. ¿Cuál es la diferencia entre las energías de enlace del ${}^3_2\text{He}$ y ${}^3_1\text{H}$?

La energía de enlace para el ${}^3_2\text{He}$ es

$$EE_{\text{He}} = (Zm_p + Nm_n - M)c^2 = [2(1.007825 \text{ u}) + 1.008665 \text{ u} - 3.016030 \text{ u}](931.5 \text{ MeV/u}) = 7.72 \text{ MeV}$$

La energía de enlace para el ${}^3_1\text{H}$ es

$$EE_{\text{H}} = [1.007825 \text{ u} + 2(1.008665 \text{ u}) - 3.016050 \text{ u}](931.5 \text{ MeV/u}) = 8.48 \text{ MeV}$$

Observamos que la energía de enlace del ${}^3_2\text{He}$ es inferior a la del ${}^3_1\text{H}$ en una cantidad (0.76 MeV) que es aproximadamente igual a la energía de repulsión de Coulomb del ${}^3_2\text{He}$ calculada en el problema 28.1.

- 28.3. Calcular la energía de enlace por nucleón para el ${}^{98}_{42}\text{Mo}$.

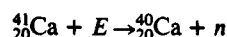
$$EE/A = \frac{(Zm_p + Nm_n - M_{\text{nuc}})c^2}{A}$$

donde sólo se han utilizado las masas atómicas para m_p y M_{nuc} (por lo tanto, las masas electrónicas se cancelan)

$$EE/A = \frac{42(1.007825 \text{ u}) + 56(1.008665 \text{ u}) - 97.905409 \text{ u}}{98} \left(931.5 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \right) = 8.64 \text{ MeV}$$

- 28.4. Compare las energías mínimas necesarias para extraer un neutrón del ${}^{41}_{20}\text{Ca}$, ${}^{42}_{20}\text{Ca}$ y ${}^{43}_{20}\text{Ca}$.

Para el ${}^{41}_{20}\text{Ca}$ la energía necesaria para extraer un neutrón se obtiene del proceso



por lo tanto

$$E = (M_{{}^{40}\text{Ca}} + m_n - M_{{}^{41}\text{Ca}})c^2 = (39.962589 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} - 40.962275 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 8.36 \text{ MeV}$$

Para ${}^{42}_{20}\text{Ca}$,

$$E = (M_{{}^{41}\text{Ca}} + m_n - M_{{}^{42}\text{Ca}})c^2 = (40.962275 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} - 41.958625 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 11.47 \text{ MeV}$$

Para ${}^{43}_{20}\text{Ca}$,

$$E = (M_{{}^{42}\text{Ca}} + m_n - M_{{}^{43}\text{Ca}})c^2 = (41.958625 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} - 42.958780 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 7.93 \text{ MeV}$$

La energía necesaria para extraer un neutrón del ${}^{42}_{20}\text{Ca}$ es 3.11 MeV mayor que la energía necesaria para extraer un neutrón del ${}^{41}_{20}\text{Ca}$ y 3.54 MeV mayor que la energía necesaria para extraer un neutrón del ${}^{43}_{20}\text{Ca}$, aunque todos los neutrones se encuentran en una capa $1f_{7/2}$ (lo cual constituye la órbita $1f_{7/2}$). La razón de esta diferencia está en que los neutrones de la misma órbita tienden a aparejarse. Por lo tanto, en el ${}^{42}_{20}\text{Ca}$ con 22 neutrones se necesitaría no solamente la energía de enlace normal del neutrón sino una energía adicional para romper el apareamiento del neutrón en la órbita $1f_{7/2}$. En el ${}^{41}_{20}\text{Ca}$ y ${}^{43}_{20}\text{Ca}$ hay un neutrón apareado disponible y, por lo tanto, se necesita menos energía. Es interesante anotar que en el ${}^{44}_{20}\text{Ca}$ se requieren 11.14 MeV para extraer un neutrón (tiene dos neutrones apareados).

- 28.5. Los núcleos de “espejo” tienen el mismo valor impar de A , pero los valores de N y Z están intercambiados. Calcular la diferencia de masa entre dos núcleos de espejo para los cuales N y Z difieren en una unidad.

El término $A - 2Z$ en la fórmula semiempírica de la masa puede escribirse así

$$A - 2Z = N + Z - 2Z = N - Z$$

por lo tanto, si N y Z difieren en una unidad, $A - 2Z = \pm 1$. Si ahora restamos una de otra, las dos masas M_{Z+1} y M_Z , el término $(A - 2Z)^2$ se cancela, dando $A = 2Z + 1$,

$$M_{Z+1} - M_Z = (m_p - m_n)[(Z + 1) - Z] + b_3 A^{-1/3}[(Z + 1)^2 - Z^2] = m_p - m_n + b_3 A^{2/3}$$

- 28.6. Las masas del ${}^{23}_{11}\text{Na}$ y ${}^{23}_{12}\text{Mg}$ son 22.989771 u y 22.994125 u, respectivamente. A partir de estos datos, calcular el valor de la constante b_3 en la fórmula semiempírica de la masa.

Los dos núcleos son de espejo. Del problema 28.5,

$$M_{Z+1} - M_Z = m_p - m_n + b_3 A^{2/3}$$

$$22.994125 \text{ u} - 22.989771 \text{ u} = 1.007825 \text{ u} - 1.008665 \text{ u} + b_3 (23)^{2/3}$$

$$b_3 = 6.42 \times 10^{-4} \text{ u} = 0.598 \text{ MeV}$$

28.7. Para valores grandes de Z , según el problema 27.7, la energía de Coulomb de un núcleo es

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{kZ^2 e^2}{R}$$

Calcular b_3 en la fórmula semiempírica de la masa con $r_0 = 1.5 \text{ fm}$.

Para un núcleo $R = r_0 A^{1/3}$, la energía de Coulomb es

$$E_C = \frac{3}{5} \frac{kZ^2 e^2}{r_0 A^{1/3}} = b_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}$$

Por lo tanto,

$$b_3 = \frac{3}{5} \frac{ke^2}{r_0} = \frac{3(1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm})}{5(1.5 \text{ fm})} = 0.58 \text{ MeV}$$

Si r_0 se considera como 1.4 fm, el valor de b_3 resulta ser 0.62 MeV. Estas respuestas concuerdan con los valores de b_3 obtenidos en el problema 28.6.

28.8. Utilizando el modelo de gota de líquido, hallar el isóbaro más estable para un determinado A impar.

Para A impar, $b_5 = 0$ en la fórmula semiempírica de masa y la energía de enlace es

$$EE = b_1 A - b_2 A^{2/3} - b_3 Z^2 A^{-1/3} - b_4 (A - 2Z)^2 A^{-1}$$

El isóbaro más estable ($A = \text{constante}$) es aquél que tiene la máxima energía de enlace. Esto se obtiene haciendo $d(EE)/dZ = 0$.

$$\frac{d(EE)}{dZ} = -2b_3 Z A^{-1/3} + 4b_4 (A - 2Z) A^{-1} = 0$$

$$Z = \frac{4b_4}{2b_3 A^{-1/3} + 8b_4 A^{-1}} = \frac{A}{\frac{b_3}{2b_4} A^{2/3} + 2}$$

Utilizando $b_3 = 0.58 \text{ MeV}$ y $b_4 = 19.3 \text{ MeV}$ da

$$Z = \frac{A}{0.015 A^{2/3} + 2}$$

28.9. Encontrar los núcleos más estables para $A = 25, 43, 77$.

El resultado del problema 28.8 da para $A = 25$,

$$Z = \frac{A}{0.015 A^{2/3} + 2} = \frac{25}{(0.015)(25)^{2/3} + 2} = 11.7 \approx 12$$

y ${}^{25}_{12}\text{Mg}$ es en efecto estable. Se encuentra experimentalmente que ${}^{25}_{13}\text{Al}$ y ${}^{25}_{11}\text{Na}$ no son estables.
Para $A = 43$,

$$Z = \frac{43}{(0.015)(43)^{2/3} + 2} = 19.7 \approx 20$$

y se encuentra experimentalmente que $^{43}_{20}\text{Ca}$ es estable, mientras que $^{43}_{19}\text{K}$ y $^{43}_{21}\text{Sc}$ son inestables.
Para $A = 77$,

$$Z = \frac{77}{(0.015)(77)^{2/3} + 2} = 33.9 \approx 34$$

y se encuentra experimentalmente que $^{77}_{34}\text{Se}$ es estable, mientras que $^{77}_{33}\text{As}$ y $^{77}_{35}\text{Br}$ son inestables.

- 28.10.** Demostrar que en una órbita de un j dado puede haber a lo sumo $2j + 1$ nucleones. Demostrar que para los estados p ($l = 1$) esto concuerda con el principio de Pauli que permite $2(2l + 1) = 6$ nucleones.

Para un j dado,

$$m_j = j, j - 1, \dots, -(j - 1), -j$$

se obtiene un total de $2j + 1$ valores. Por lo tanto, el principio de Pauli permite $2j + 1$ nucleones en la órbita.

Un estado p se desdobra en una órbita $p_{3/2}$ que puede contener $2j + 1 = 2(3/2) + 1 = 4$ nucleones y una órbita $p_{1/2}$ puede contener $2j + 1 = 2(1/2) + 1 = 2$ nucleones, para un total de 6 nucleones.

- 28.11.** Las masas conocidas para $A = 50$ son: $^{50}_{21}\text{Sc}$, 49.951730 u; $^{50}_{22}\text{Ti}$, 49.944786 u; $^{50}_{23}\text{V}$, 49.947164 u; $^{50}_{24}\text{Cr}$, 49.946055 u; $^{50}_{25}\text{Mn}$, 49.954215 u. A partir de estos datos calcular la constante b_5 , la intensidad del término de apareamiento, en la fórmula semiempírica de la masa.

Para un valor fijo par de A y un valor impar de Z (puesto que $Z + 1$ es par, etc.) la fórmula semiempírica de la masa puede escribirse así:

$$\begin{aligned} M(Z) &= a_1 Z^2 + a_2 Z + a_3 + b_5 A^{-3/4} \\ M(Z + 1) &= a_1 (Z + 1)^2 + a_2 (Z + 1) + a_3 - b_5 A^{-3/4} \\ M(Z + 2) &= a_1 (Z + 2)^2 + a_2 (Z + 2) + a_3 + b_5 A^{-3/4} \\ M(Z + 3) &= a_1 (Z + 3)^2 + a_2 (Z + 3) + a_3 - b_5 A^{-3/4} \end{aligned}$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son constantes. Estableciendo la tercera diferencia:

$$M(Z + 3) - 3M(Z + 2) + 3M(Z + 1) - M(Z) = -8b_5 A^{-3/4}$$

Aplicando esto para $Z = 21$ se obtiene (después de simplificar los datos por 49 u)

$$0.946055 \text{ u} - 3(0.947164 \text{ u}) + 3(0.944786 \text{ u}) - 0.951730 \text{ u} = -8(50^{-3/4})b_5$$

por lo tanto

$$b_5 = \frac{50}{8}^{3/4} (0.012809 \text{ u}) = 0.0301 \text{ u} = 28.0 \text{ MeV}$$

Si tomamos otra tercera diferencia,

$$M(Z + 4) - 3M(Z + 3) + 3M(Z + 2) - M(Z + 1) = +8b_5 A^{-3/4}$$

obtenemos

$$b_5 = \frac{50}{8}^{3/4} (0.012756 \text{ u}) = 0.0300 \text{ u} = 27.9 \text{ MeV}$$

y se encuentra que los dos valores calculados para b_5 están muy cercanos uno del otro. El valor aceptado es 33.5 MeV.

- 28.12.** Hallar el momentum angular del estado fundamental de (a) $^{15}_8\text{O}$, (b) $^{39}_{19}\text{K}$, (c) $^{20}_{10}\text{Ne}$.

Las configuraciones al estado fundamental, de acuerdo con el modelo de capas, se indican en la figura 28-3.

- (a) Todos los nucleones están apareados excepto el neutrón $1p_{1/2}$; por lo tanto, el momentum angular total en el estado fundamental es $J = 1/2$.

- (b) Todos los nucleones están apareados excepto el protón $1d_{3/2}$; el momentum angular total es $J = 3/2$.
 (c) Todos los nucleones están apareados; $J = 0$.

28.13. ¿Cuáles son los valores posibles del momentum angular del estado fundamental para el $^{32}_{15}\text{P}$?

El modelo de capas para el estado fundamental del $^{32}_{15}\text{P}$, suponiendo que los niveles de energía más bajos están totalmente llenos, se indica en la figura 28-4. En este modelo todos los nucleones del $^{32}_{15}\text{P}$ se encuentran apareados, con lo cual se obtiene un momentum angular igual a cero, excepto para el protón $2s_{1/2}$ y el neutrón $1d_{3/2}$. El momentum angular en el estado fundamental del $^{32}_{15}\text{P}$ en este modelo debe ser la suma vectorial de los momenta angular de las partículas para $j = 1/2$ y $j = 3/2$. Para el protón tenemos como posibles valores de m_j

$$m_{1/2} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

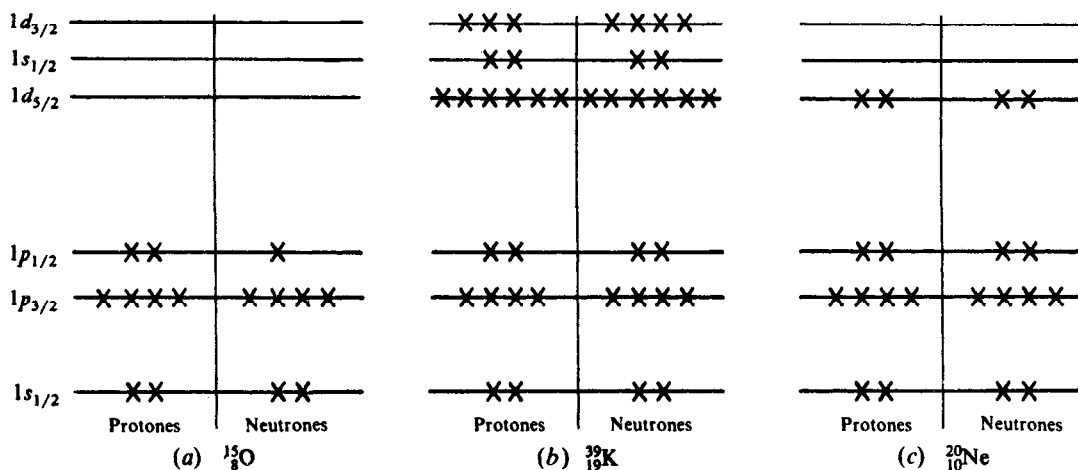


Fig. 28-3

y para el neutrón,

$$m_{3/2} = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

Entonces

$$M_J = m_{1/2} + m_{3/2} = 2, \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}, \left\{ \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right\}, -2$$

La línea superior de los valores de M_J corresponde a $J = 2$ y la línea inferior a $J = 1$.

El valor experimental del estado fundamental del $^{32}_{15}\text{P}$ es $J = 1$, $J = 2$ que corresponden al primer estado excitado.

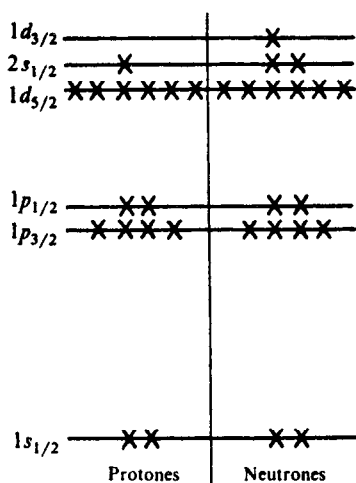


Fig. 28-4

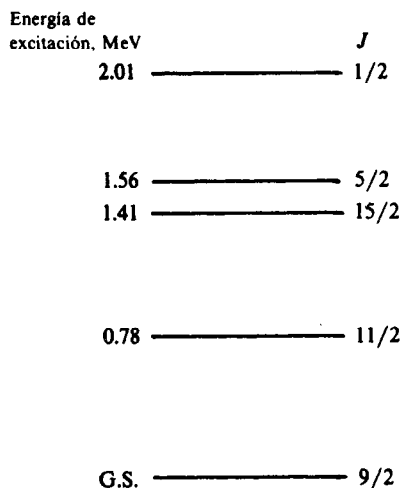


Fig. 28-5

- 28.14.** En la figura 28-5 se muestran los primeros cuatro estados excitados del $^{209}_{82}\text{Pb}$. Utilizando el modelo de capas, explique el espectro como si se tratara de una sola partícula.

El isótopo $^{208}_{82}\text{Pb}$, con 82 protones y 126 neutrones es doblemente mágico. Como se indica en la figura 28-6(a), el $^{209}_{82}\text{Pb}$ tiene la estructura cerrada de un $^{208}_{82}\text{Pb}$ y un neutrón adicional en la órbita $2g_{9/2}$. Los estados excitados $11/2$, $15/2$, $5/2$ y $1/2$ corresponden a las excitaciones del neutrón en las órbitas $1i_{11/2}$, $1j_{15/2}$, $3d_{5/2}$ y $4s_{1/2}$, según el modelo de capas [figura 28-6(b) a (e)].

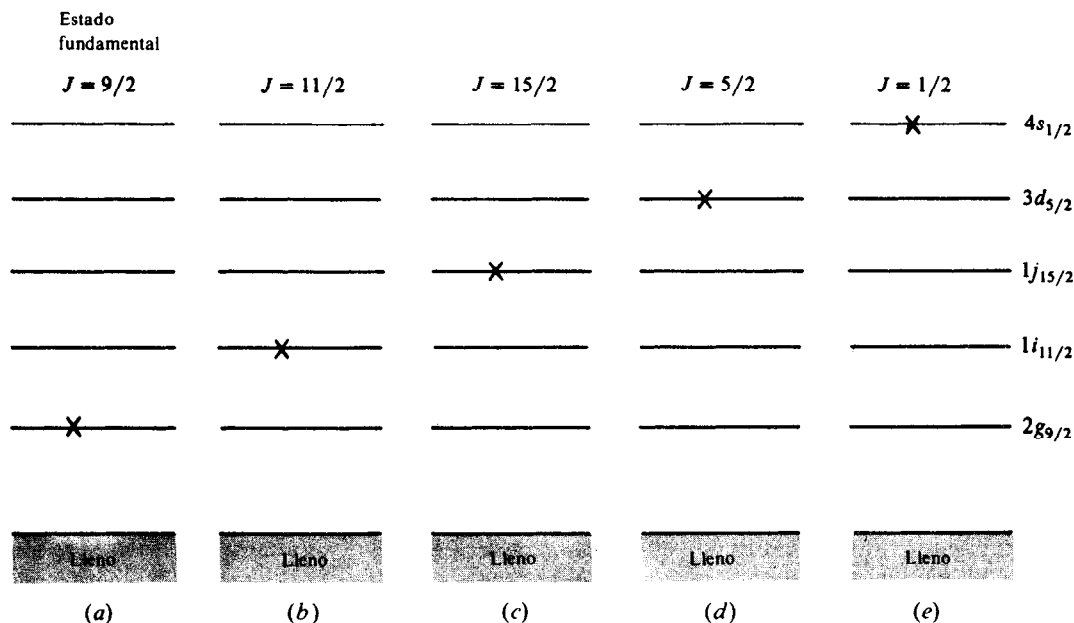


Fig. 28-6

- 28.15.** Las masas del $^{40}_{20}\text{Ca}$, $^{41}_{20}\text{Ca}$, y $^{39}_{20}\text{Ca}$ son 39.962589 u, 40.962275 u y 38.970691 u, respectivamente. Calcular la diferencia de energía entre las capas de neutrones $1d_{3/2}$ y $1f_{7/2}$ (es decir, la separación de energía correspondiente al neutrón con número mágico 20).

Según el modelo de capas, al $^{39}_{20}\text{Ca}$ le hace falta un neutrón en la capa $1d_{3/2}$, el $^{40}_{20}\text{Ca}$ completa esta capa y el $^{41}_{20}\text{Ca}$ adiciona un neutrón a la capa $1f_{7/2}$.

La energía de enlace de un neutrón en $1d_{3/2}$ en el ^{40}Ca es

$$\begin{aligned} EE_1 &= (M_{^{39}\text{Ca}} + m_n - M_{^{40}\text{Ca}})c^2 \\ &= (38.970691 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} - 39.962589 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 15.62 \text{ MeV} \end{aligned}$$

mientras que la energía de enlace de un neutrón en $1f_{7/2}$ en ^{41}Ca es

$$\begin{aligned} EE_2 &= (M_{^{40}\text{Ca}} + m_n - M_{^{41}\text{Ca}})c^2 \\ &= (39.962589 \text{ u} + 1.008665 \text{ u} - 40.962275 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 8.36 \text{ MeV} \end{aligned}$$

La diferencia de energía de enlace debe ser la separación de energía δ , de las capas $1f_{7/2}$ y $1d_{3/2}$.

$$\delta = EE_1 - EE_2 = 15.62 \text{ MeV} - 8.36 \text{ MeV} = 7.26 \text{ MeV}$$

- 28.16.** Consideremos un modelo de capas en el cual los nucleones se encuentran apareados con igual espaciado en los niveles de energía. Si consideramos que hay igual número de neutrones que de protones, calcular la energía necesaria para cambiar n protones apareados a los neutrones y llevarlos a las órbitas de los neutrones.

El problema se ilustra en la figura 28-7. Si el núcleo final debe tener N neutrones y Z protones, se define la diferencia de nucleones como $n \equiv N - Z$, lo cual es el doble del número de nucleones apareados que deben

desplazarse de los niveles de protones a los niveles de neutrones. Si todos los niveles están separados por una energía δ , la energía total necesaria para crear el núcleo final es

$$E = (2\delta)(1) + (2\delta)(3) + (2\delta)(5) + \cdots + (2\delta)(n-1) = 2\delta[1 + 3 + 5 + \cdots + (n-1)]$$

$$= 2\delta\left(\frac{n^2}{4}\right) = \frac{\delta}{2}(N-Z)^2 = \frac{\delta}{2}(A-2Z)^2$$

Este término está directamente relacionado con el término $b_4(A-2Z)^2A^{-1}$ en la fórmula semiempírica de la masa que es una expresión para el exceso de energía de neutrones o protones.

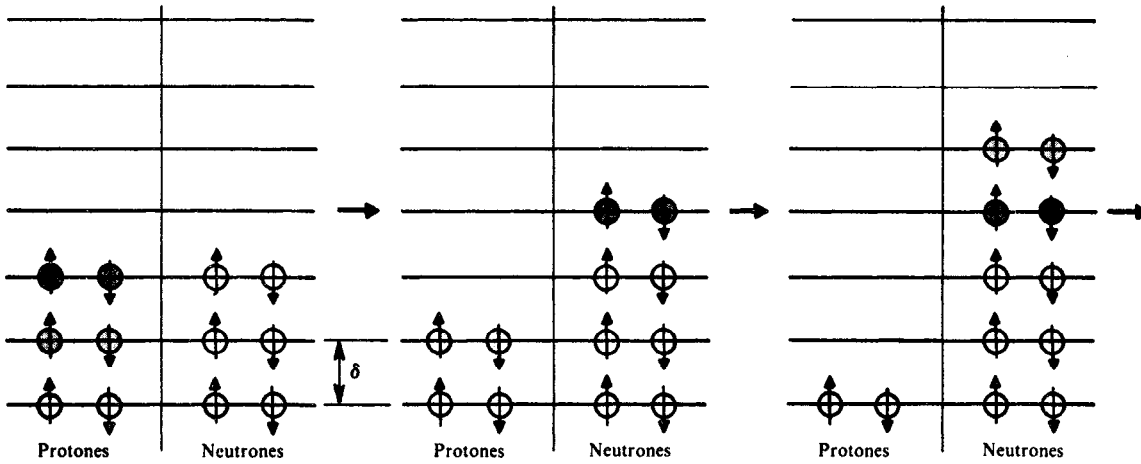


Fig. 28-7

Problemas suplementarios

Las masas atómicas se encuentran tabuladas en el apéndice.

- 28.17. Calcular la energía de enlace por nucleón para (a) ${}^4_2\text{He}$, (b) ${}^{12}_6\text{C}$, (c) ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, (d) ${}^{202}_{80}\text{Hg}$.
Resp. (a) 7.07 MeV; (b) 7.68 MeV; (c) 8.55 MeV; (d) 7.90 MeV
- 28.18. Calcular la energía necesaria para extraer el neutrón más débilmente ligado en el ${}^{17}_8\text{O}$. *Resp.* 4.14 MeV
- 28.19. Calcular el valor de b en la fórmula semiempírica de la masa para las masas de ${}^{22}_{10}\text{Ne}$ (21.991385 u) y ${}^{22}_{11}\text{Na}$ (21.994437 u). Compare estos valores con los obtenidos en el problema 28.6. *Resp.* 0.484 MeV
- 28.20. Encontrar el núcleo más estable para $A = 57$. *Resp.* $Z = 26$ (${}^{57}_{26}\text{Fe}$)
- 28.21. Calcular el momentum angular del estado fundamental de (a) ${}^{41}_{20}\text{Ca}$, (b) ${}^{80}_{36}\text{Kr}$, (c) ${}^{91}_{40}\text{Zr}$.
Resp. (a) 7/2; (b) 0; (c) 5/2
- 28.22. Encontrar el valor del momentum angular total para los siguientes estados en el ${}^{13}_6\text{C}$: (a) el estado fundamental, con todas las órbitas de neutrones y protones llenas en el $1p_{3/2}$ y un neutrón adicional en la órbita $1p_{1/2}$; (b) un estado excitado como en (a) con la diferencia de que el neutrón adicional se encuentra excitado en una órbita $2s_{1/2}$; (c) un estado excitado como en (a) a diferencia de que el neutrón adicional se encuentra en la órbita $1d_{5/2}$; (d) un estado excitado con las órbitas de protones llenas en $1p_{3/2}$, y dos neutrones en la órbita $1s_{1/2}$, tres neutrones en la órbita $1p_{3/2}$ y dos neutrones en la órbita $1p_{1/2}$. *Resp.* (a) 1/2; (b) 1/2; (c) 5/2; (d) 3/2
- 28.23. Los excesos de masa,

$$\delta \equiv [M(\text{en u}) - A(\times 1 \text{ u})] \times (931.5 \text{ MeV/u})$$
 para ${}^{15}_8\text{O}$, ${}^{16}_8\text{O}$ y ${}^{17}_8\text{O}$ son respectivamente 2859.9 keV, -4736.6 keV y -807.7 keV. A partir de estos datos, calcular la diferencia de energía entre las órbitas $1p_{1/2}$ y $1d_{5/2}$ para neutrones (es decir, la separación de energía correspondiente al neutrón de número mágico 8). *Resp.* 11.53 MeV

Capítulo 29

El decaimiento de núcleos inestables

29.1 INTRODUCCION

Como se discutió en el capítulo 28, los núcleos presentan estados excitados. Estos estados excitados pueden decaer mediante la emisión de fotones de alta energía directamente al estado fundamental o a través de estados de energía más baja que la del estado original. Además, tanto en los estados excitados como en el estado fundamental, los núcleos pueden emitir espontáneamente otras partículas para llegar a las configuraciones de energía más baja.

Cuando se investigó por primera vez el decaimiento nuclear, los productos del decaimiento fueron denominados como *rayos γ* , *partículas α* , *partículas β^-* y *partículas β^+* . Mucho más tarde se encontró que los productos del decaimiento no eran entes nuevos sino que los rayos γ son fotones de alta energía, las partículas α son núcleos de helio, las partículas β^- son electrones y las partículas β^+ son positrones.

En las diferentes reacciones, las leyes de conservación de masa-energía, de carga y de momentum angular y lineal son siempre aplicables. En el decaimiento nuclear se ha encontrado que las leyes de conservación de los nucleones también son válidas: el número de nucleones antes y después de un decaimiento debe ser igual.

29.2 LA LEY ESTADISTICA DEL DECAIMIENTO RADIOACTIVO

En un decaimiento radioactivo, un núcleo inicialmente inestable denominado *padre*, emite una partícula y decae en un núcleo denominado *hija*; el nacimiento de la hija se ocasiona por la muerte del padre. La hija puede ser el mismo núcleo en un estado de energía más bajo, como en el caso del decaimiento γ , o un núcleo completamente nuevo, como ocurre en los decaimientos de α y β . Todos los decaimientos nucleares siguen la misma *ley de decaimiento radioactivo* sin importar qué tipo de partículas sean emitidas. Si inicialmente hay N_0 núcleos padres inestables, el número N de padres que quedan después de un tiempo t es (problema 29.1)

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \quad (29.1)$$

La constante λ se denomina *constante de decaimiento* o *constante de desintegración* y depende del proceso particular de decaimiento.

La ecuación (29.1) es una ley estadística y no determinista que da el *número esperado* de padres que sobreviven después de un tiempo t . Sin embargo, si N_0 es muy grande (como ocurre siempre en la práctica), el número presente de supervivientes y el número esperado casi siempre difieren en una fracción muy insignificante de N_0 .

La rapidez de decaimiento de una muestra radiactiva se mide generalmente por la *vida media*, $T_{1/2}$, definida como el intervalo, en el cual el número de núcleos padres se reduce a la mitad. La vida media se obtiene en términos de λ así

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \quad (29.2)$$

Así, con N_0 núcleos inicialmente, al cabo de un tiempo $T_{1/2}$ quedarían $N_0/2$; después de un tiempo $2T_{1/2}$, quedarían $N_0/4$ y así, sucesivamente.

Otra cantidad que mide la rapidez con que una muestra decae es el *promedio* o *tiempo de vida medio* de un núcleo T_m , dado por

$$T_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \quad (29.3)$$

(ver problema 29.7).

La ley que describe el aumento de los núcleos hija, suponiendo que éstos son estables, se obtiene de (29.1) así:

$$N_D = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \quad (29.4)$$

En muchos decaimientos el núcleo hija es también inestable y decae posteriormente en una nieta; esta situación será tratada en los problemas resueltos.

La *actividad* de una muestra se define como el valor de la rapidez de desintegración:

$$\text{actividad} = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N \quad (29.5)$$

La unidad de medida de rapidez de desintegración o actividad es el *curie*, definido como $1 \text{ Ci} = 3.700 \times 10^{10}$ desintegraciones por segundo.

29.3 DECAIMIENTO GAMMA

En un decaimiento gamma un núcleo inicialmente en un estado excitado realiza una transición a un estado de energía más bajo y en este proceso emite un fotón denominado rayo γ . Se ha encontrado que el rayo γ sale con energías discretas, lo que demuestra que el núcleo posee niveles de energía discretos. La energía del fotón de rayos γ se obtiene de la expresión común

$$h\nu = E_u - E_l \quad (29.6)$$

A diferencia de los fotones emitidos en las transiciones atómicas donde las energías son de unos pocos eV, el rango de energías de los rayos γ va de unas decenas de keV hasta MeV.

Puesto que los fotones de rayos γ no son portadores de masa ni de carga, en un decaimiento gamma, la carga y el número atómico del núcleo no varían. Si el núcleo excitado se designa por $(Z^A)^*$, un decaimiento gamma al estado fundamental puede escribirse en símbolos así

$$(Z^A)^* \rightarrow Z^A + \gamma$$

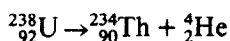
La mayoría de los núcleos excitados que sufren un decaimiento gamma tienen vidas medias demasiado pequeñas, de unos 10^{-14} s, mucho más corta que la vida media de los estados excitados electrónicos. Los estados excitados de algunos núcleos son muy largos y sus vidas medias son medibles. Estos núcleos excitados se denominan *isómeros* y los estados excitados se denominan *estados isoméricos*.

29.4 DECAIMIENTO ALFA

En un decaimiento alfa, una partícula α es expulsada de un núcleo. Puesto que una partícula α es un núcleo de helio, el núcleo padre pierde dos protones y dos neutrones. Por lo tanto, su número atómico Z disminuye en dos unidades y su número de masa A disminuye en cuatro unidades; entonces, la hija D y el padre P son elementos químicamente diferentes. Aplicando la ley de conservación de la carga y de los nucleones, podemos escribir simbólicamente el decaimiento alfa así

$${}_Z^A P \rightarrow {}_Z^{A-4} D + {}_2^4 \text{He}$$

Por ejemplo,



En un sistema en el cual el núcleo padre está en reposo, encontramos a partir de la ley de conservación de la energía que

$$M_P c^2 = M_D c^2 + M_\alpha c^2 + K_D + K_\alpha \quad (29.7)$$

donde K_D y K_α son respectivamente las energías cinéticas de la hija y de la partícula α ; M_P , M_D y M_α son respectivamente las masas del padre, la hija y la partícula α . Puesto que la energía cinética no puede ser negativa, el decaimiento alfa no puede realizarse a menos que

$$M_P > M_D + M_\alpha \quad (29.8)$$

Además de la energía, el momentum debe conservarse. Puesto que solamente resultan dos partículas de un decaimiento alfa, las dos condiciones de conservación fijan unívocamente las energías cinéticas (y los momenta) de la partícula α y del núcleo hija. Si el núcleo padre decae y queda en reposo, la energía cinética de la partícula α está dada por: (ver problema 29.15)

$$K_{\alpha} = \left(\frac{A-4}{A} \right) Q \quad (29.9)$$

donde la *energía de desintegración* Q es la energía total liberada en la reacción:

$$Q = (M_P - M_D - M_{\alpha})c^2 \quad (29.10)$$

La cantidad Q es constante para cualquier decaimiento alfa y tiene el mismo valor para todo observador. En el sistema de referencia en reposo del núcleo,

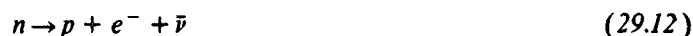
$$Q = K_D + K_{\alpha} \quad (29.11)$$

29.5 EL DECAIMIENTO BETA Y EL NEUTRINO

Es posible que un proceso nuclear se efectúe cuando la carga Ze del núcleo varía, pero el número de nucleones A permanece constante. Esto puede ocurrir con un núcleo que emite un electrón (decaimiento β^-), que emite un positrón (decaimiento β^+), o que captura un electrón atómico interior (*captura de electrón*). En cada uno de estos procesos un protón se convierte en neutrón o viceversa.

Se ha encontrado que en cada uno de estos procesos aparece una partícula adicional llamada *neutrino* (ν), como producto del decaimiento. Las propiedades del neutrino son: carga eléctrica, 0; masa en reposo, 0; spin intrínseco, $1/2$ y, como toda partícula sin masa en reposo, tiene una velocidad c (velocidad de la luz).

La existencia de un neutrino fue postulada inicialmente por W. Pauli en 1930 con el fin de asegurar la conservación de energía y momentum en los decaimientos beta. Por ejemplo, el decaimiento beta del neutrón es:



Si el neutrino no formara parte de los productos del decaimiento se concluiría, de la ley de conservación de energía y momentum, que para el decaimiento de los dos cuerpos los electrones serían expulsados con una única energía, como se describió anteriormente en el decaimiento alfa. No obstante, se ha encontrado experimentalmente que los electrones expulsados tienen una distribución de energía que varía de cero hasta un máximo, como se indica en la figura 29-1. Por otra parte, puesto que inicialmente hay una sola partícula con spin $\frac{1}{2}$, la creación de dos partículas, cada una con spin $\frac{1}{2}$, violaría la conservación del momentum angular. La observación real de un neutrino no se efectuó sino hasta 1956 con los experimentos de C. L. Cowan y F. Reines.

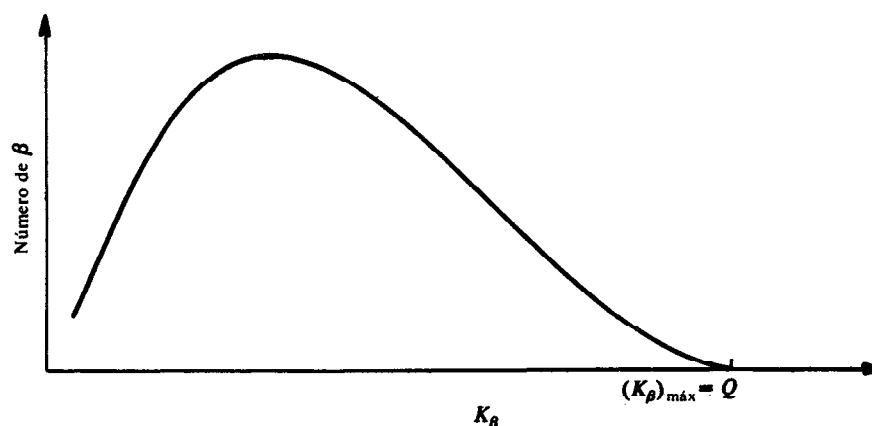
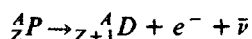


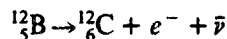
Fig. 29-1

En la ecuación (29.12) el neutrino emitido ha sido designado como $\bar{\nu}$ en vez de ν . Esto se hace debido a que realmente hay dos diferentes tipos de neutrinos, el "neutrino" (ν) y el "antineutrino" ($\bar{\nu}$). El antineutrino se origina en un decaimiento β^- , mientras que el neutrino aparece en los demás procesos de decaimiento beta. Las antipartículas serán discutidas posteriormente en el capítulo 32.

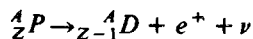
En general, un decaimiento β^- puede expresarse como



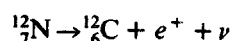
un ejemplo típico lo constituye



Así, en un decaimiento β^- un neutrón se convierte en un protón. Para un decaimiento β^+ , en el cual se emite un positrón,



un neutrón se convierte en protón. Como ejemplo de un decaimiento β^+ se tiene



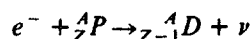
A partir de la ley de conservación de la energía, un sistema en el cual el núcleo padre está en reposo, tenemos para ambos decaimientos β^- y β^+ (las masas del electrón y del positrón son iguales)

$$M_P c^2 = M_D c^2 + m_e c^2 + K_{\text{total}}$$

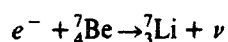
lo que da una energía de desintegración Q de

$$Q = K_{\text{total}} = (M_P - M_D - m_e) c^2$$

En una captura de electrón, un núcleo captura un electrón atómico interior (por lo general un electrón K) y no se emite ninguna partícula cargada. En cambio, la captura de electrón está acompañada de la emisión de un neutrino, seguida de la emisión de fotones característicos de rayos X cuando los electrones exteriores realizan transiciones a los niveles de energía interiores vacíos. En la captura de electrón, un protón se convierte en neutrón. Además, la emisión de rayos X es propia del átomo hija y no del átomo padre, ya que estos rayos son producidos después de que se ha efectuado la captura del electrón. Un proceso de captura de electrón puede describirse como



como ejemplo se tiene



Debe recordarse que en el decaimiento beta o en la captura de electrón, los electrones y positrones no existen dentro del núcleo. El núcleo se compone únicamente de neutrones y protones. La creación o absorción de los electrones o positrones aparece en el reordenamiento del núcleo en un estado de energía más bajo, mediante la transformación de un protón en neutrón o viceversa.

Problemas resueltos

A menos que se indique lo contrario, en los siguientes problemas todos los valores de masa se indican en unidades de masa atómica.

29.1. Deducir la ley de decaimiento $N = N_0 e^{-\lambda t}$.

El número de núcleos dN que decaen en un intervalo dt será proporcional a ese intervalo y al número de núcleos N presentes. Así

$$dN = -\lambda N dt$$

donde λ es la constante de proporcionalidad y el signo menos se introduce, debido a que N decrece. La integración de esta expresión conduce a la ley de decaimiento.

Otro tipo de deducción aclara la naturaleza estadística de la ley de decaimiento. Consideremos el tiempo de vida T (que varía al azar) de un único núcleo padre. Supongamos que la probabilidad del decaimiento del núcleo dentro de los τ segundos siguientes (τ arbitrariamente) sea independiente de cuanto ha vivido el núcleo. Se puede demostrar entonces que T tiene una *distribución exponencial*

$$\text{Prob}\{t < T \leq t + dt\} = \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (1)$$

donde λ es una constante positiva. De la ecuación (1) se concluye que el núcleo tiene una probabilidad de vivir de por lo menos t segundos dada por

$$p = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t} \quad (2)$$

Consideremos que una muestra tiene N_0 núcleos independientes y que observamos la muestra durante un período de t segundos. El proceso de decaimiento puede ejemplarizarse mediante el lanzamiento de una moneda N_0 veces, donde la posibilidad de que caiga de "cara" (de que sobreviva durante el período) es p en cada lanzamiento. El número (en promedio) esperado de veces que caiga de "cara" es N y está dado por

$$N = N_0 p = N_0 e^{-\lambda t}$$

que es la ley de decaimiento radioactivo.

29.2. ¿Cuál es la actividad de un gramo de $^{226}_{88}\text{Ra}$, cuya vida media es de 1622 años?

El número de átomos en un gramo de radio es

$$N = (1 \text{ g}) \left(\frac{1 \text{ g-mol}}{226 \text{ g}} \right) \left(6.025 \times 10^{23} \frac{\text{átomos}}{\text{g-mol}} \right) = 2.666 \times 10^{21}$$

La constante de decaimiento se relaciona con la vida media así

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \left(\frac{0.693}{1622 \text{ y}} \right) \left(\frac{1 \text{ a}}{365 \text{ d}} \right) \left(\frac{1 \text{ d}}{8.64 \times 10^4 \text{ s}} \right) = 1.355 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

La actividad se encuentra a partir de

$$\text{actividad} = \lambda N = (1.355 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1})(2.666 \times 10^{21}) = 3.612 \times 10^{10} \text{ desintegraciones/s}$$

Por definición un curie es $1 \text{ Ci} = 3.700 \times 10^{10}$ desintegraciones/s. Esto es aproximadamente igual al valor dado anteriormente,

29.3. ¿A qué distancia en el espacio libre se reduce a la mitad la intensidad de un haz de neutrones de 5 eV? ($T_{1/2} = 12.8 \text{ min.}$)

La velocidad de los neutrones en el haz se encuentra a partir de $\frac{1}{2}mv^2 = K$:

$$\frac{1}{2} (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) v^2 = (5 \text{ eV}) \left(\frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} \right)$$

$$v = 31.0 \text{ km/s}$$

Durante un tiempo $T_{1/2} = 12.8 \text{ min}$, la mitad de los neutrones del haz habrá decaído. La distancia recorrida por los neutrones que no han decaído durante este tiempo es

$$d = vt = (31.0 \text{ km/s})(12.8 \text{ min})(60 \text{ s/min}) = 23\,800 \text{ km}$$

este valor corresponde aproximadamente a dos diámetros terrestres.

- 29.4. ¿Qué tiempo se requiere para que 5 mg de ^{22}Na ($T_{1/2} = 2.60$ a) se reduzcan a un miligramo?

Puesto que la masa de la muestra será proporcional al número de átomos en la misma, podemos escribir

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = m_0 e^{-(0.693/T_{1/2})t}$$

$$1 \text{ mg} = (5 \text{ mg}) e^{-(0.693/2.60 \text{ a})t}$$

$$e^{(0.693/2.60 \text{ a})t} = 5$$

Tomando logaritmos a ambos lados, obtenemos

$$\frac{0.693t}{2.60 \text{ y}} = \ln 5 = 1.61 \quad \text{ó} \quad t = 6.04 \text{ a}$$

- 29.5. ¿Cuál es la vida media de 3×10^{-9} kg de $^{200}_{79}\text{Au}$ radiactivo que tiene una actividad de 58.9 Ci?

El número de átomos en 3×10^{-9} kg de $^{200}_{79}\text{Au}$ es

$$N = (3 \times 10^{-9} \text{ kg}) \left(\frac{1 \text{ kmol}}{200 \text{ kg}} \right) \left(6.025 \times 10^{26} \frac{\text{átomos}}{\text{kmol}} \right) = 9.04 \times 10^{15} \text{ átomos}$$

La actividad es

$$\text{Actividad} = (58.9 \text{ Ci}) \left(\frac{3.7 \times 10^{10} \text{ desintegración/s}}{1 \text{ Ci}} \right) = 2.18 \times 10^{12} \frac{\text{desintegraciones}}{\text{s}}$$

La constante de decaimiento se consigue a partir de

$$\text{Actividad} = \lambda N$$

$$\lambda = \frac{2.18 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}}{9.04 \times 10^{15}} = 2.41 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Finalmente,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{2.41 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}} = 2.88 \times 10^3 \text{ s} = 48 \text{ min}$$

- 29.6. La actividad de una muestra de $^{55}_{24}\text{Cr}$ medida a intervalos de 5 min es 19.2, 7.13, 2.65, 0.99 y 0.37 milicurios. ¿Cuál es la vida media del $^{55}_{24}\text{Cr}$?

$$\text{Actividad} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Tomando logaritmos naturales a ambos lados tenemos

$$\ln(\text{actividad}) = \ln(\lambda N_0 e^{-\lambda t}) = \ln(\lambda N_0) - \lambda t$$

Así $\ln(\text{actividad})$ varía linealmente con el tiempo t con pendiente $-\lambda$. Graficando los datos se obtiene la curva indicada en la figura 29-2. De esta curva encontramos

Tiempo, min	0	5	10	15	20
Actividad, mCi	19.2	7.13	2.65	0.99	0.37
$\ln(\text{actividad})$	2.95	1.96	0.974	-0.010	-0.994

$$|\text{pendiente}| = \lambda = 0.197 \text{ min}^{-1}$$

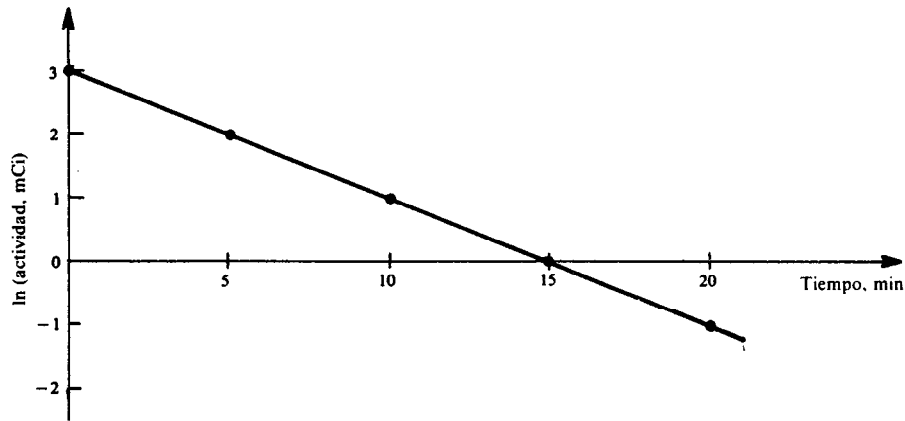


Fig. 29-2

Finalmente,

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{0.197 \text{ min}^{-1}} = 3.52 \text{ min}$$

29.7. Demostrar que el tiempo de vida promedio de un núcleo radiactivo es $T_m = 1/\lambda$.

Si inicialmente la muestra tiene N_0 núcleos, el tiempo de vida promedio para obtener cero núcleos, está dado por

$$T_m = \frac{\int_{N_0}^0 t dN}{\int_{N_0}^0 dN} = \frac{1}{-N_0} \int_{N_0}^0 t dN$$

A partir de $N = N_0 e^{-\lambda t}$ obtenemos $dN = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt$, y los límites N_0 y 0 varían con t entre 0 e ∞ . Así

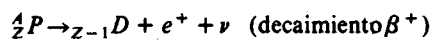
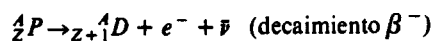
$$T_m = \frac{1}{-N_0} \int_0^\infty t (-\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt) = \lambda \int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt = \lambda \left(\frac{1}{\lambda^2} \right) = \frac{1}{\lambda}$$

De otra manera, a partir de la distribución exponencial, ecuación (1) del problema 29.1,

$$T_m = \int_0^\infty t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

29.8. En función de las masas en reposo de los núcleos padre e hija, calcular los valores de Q para los decaimientos β^- , β^+ y captura de electrón.

Las tres reacciones (P =padre, D =hija) son:



Las correspondientes relaciones masa-energía, después de restar las masas del electrón de las masas atómicas para obtener las masas nucleares, son

$$\left. \begin{aligned} (M_P - Zm_e)c^2 &= [M_D - (Z+1)m_e]c^2 + m_e c^2 + Q \\ Q &= (M_P - M_D)c^2 \end{aligned} \right\} (\text{decaimiento } \beta^-)$$

$$\left. \begin{aligned} (M_P - Zm_e)c^2 &= [M_D - (Z-1)m_e]c^2 + m_e c^2 + Q \\ Q &= (M_P - M_D - 2m_e)c^2 \end{aligned} \right\} (\text{decaimiento } \beta^+)$$

$$\left. \begin{aligned} (M_P - Zm_e)c^2 + m_e c^2 &= [M_D - (Z-1)m_e]c^2 + Q \\ Q &= (M_P - M_D)c^2 \end{aligned} \right\} (\text{captura de electrón})$$

29.9. ¿Cuál es la energía máxima del electrón emitido en el decaimiento β^- de un ${}^3_1\text{H}$?

La reacción es



Del problema 29.8,

$$\begin{aligned} Q &= (M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2 \\ &= (3.016050 \text{ u} - 3.016030 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) \\ &= 0.0186 \text{ MeV} = K_{\text{He}} + K_e + K_{\bar{\nu}} \end{aligned}$$

Puesto que la masa del neutrino es cero y $M_{\text{He}} \gg m_e$, la energía cinética del núcleo de He puede despreciarse, por lo que la fracción de energía 0.0186 MeV está repartida entre el electrón y el neutrino. Cuando la energía del neutrino es cero, la energía cinética del electrón tendrá su valor máximo de 0.0186 MeV.

29.10. Calcular la energía mínima de un antineutrino que produce la reacción $\bar{\nu} + p \rightarrow n + e^+$.

De la conservación de masa-energía,

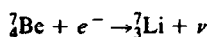
$$E_{\bar{\nu}} + m_p c^2 = m_n c^2 + m_e c^2 + K_n + K_e$$

La energía requerida por el neutrino será mínima cuando el neutrón y el positrón sean emitidos ambos con energía cinética cero

$$E_{\bar{\nu}, \text{min}} + 938.2 \text{ MeV} = 939.5 \text{ MeV} + 0.5 \text{ MeV} \quad \text{ó} \quad E_{\bar{\nu}, \text{min}} = 1.8 \text{ MeV}$$

29.11. Calcular la energía y el momentum de un núcleo hija y del neutrino producidos cuando ${}^7_4\text{Be}$ sufre una captura de electrón en reposo.

La reacción de captura de electrón es



Del problema 29.8,

$$\begin{aligned} Q &= (M_{\text{Be}} - M_{\text{Li}})c^2 \\ &= (7.016929 \text{ u} - 7.016004 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 0.862 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Esta energía se encuentra entre el neutrino y el núcleo de ${}^7_3\text{Li}$. Sin embargo, debido a la gran masa del núcleo de ${}^7_3\text{Li}$ y a que la masa del neutrino es cero, casi toda la energía es transportada por el neutrino, por lo tanto

$$E_{\nu} \approx 0.862 \text{ MeV}$$

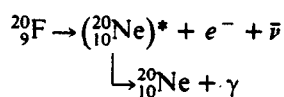
Suponiendo que el núcleo del ${}^7_4\text{Be}$ estaba inicialmente en reposo, las magnitudes de los momenta del neutrino y del núcleo de ${}^7_3\text{Li}$ deben ser iguales. A partir de $p_{\nu} = E_{\nu}/c$, obtenemos

$$p_{\nu} = p_{\text{Li}} = 0.862 \text{ MeV}/c$$

La energía cinética del núcleo ${}^7_3\text{Li}$ puede encontrarse a partir de

$$K_{\text{Li}} = \frac{p_{\text{Li}}^2}{2M_{\text{Li}}} = \frac{(p_{\text{Li}}c)^2}{2M_{\text{Li}}c^2} = \frac{(0.862 \text{ MeV})^2}{2(7.02 \text{ u} \times 931.5 \text{ MeV/u})} = 5.68 \times 10^{-5} \text{ MeV} = 56.8 \text{ eV}$$

29.12. El ${}^{20}_{10}\text{F}$ decae al estado fundamental del ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ como sigue:



donde $(^{20}_{10}\text{Ne})^*$ es un estado excitado del $^{20}_{10}\text{Ne}$. Si la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 5.4 MeV y la energía de los rayos γ es de 1.6 MeV, determinar la masa de $^{20}_9\text{F}$ ($M_{\text{Ne}} = 19.99244$ u).

La conservación de la masa-energía aplicada a cada una de las reacciones conduce a (en el caso límite la energía del neutrino es cero y las energías de retroceso del $(^{20}_{10}\text{Ne})^*$ y del $^{20}_{10}\text{Ne}$ son despreciables)

$$(M_{\text{F}} - 9m_e)c^2 = (M_{\text{Ne}} - 10m_e)c^2 + m_e c^2 + K_e \quad \text{o} \quad M_{\text{F}}c^2 = M_{\text{Ne}}c^2 + K_e$$

$$M_{\text{Ne}}c^2 = M_{\text{Ne}}c^2 + E_\gamma$$

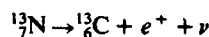
Reagrupando estas expresiones se obtiene

$$M_{\text{F}}c^2 = M_{\text{Ne}}c^2 + E_\gamma + K_e$$

$$M_{\text{F}} = 19.99244 \text{ u} + (1.6 \text{ MeV} + 5.4 \text{ MeV}) \left(\frac{1 \text{ u}}{931.5 \text{ MeV}} \right) = 20.000 \text{ u}$$

- 29.13. A partir del decaimiento β^+ del $^{13}_7\text{N}$ hallar el valor de r_0 en la expresión $R = r_0 A^{1/3}$ (sección 27.3). La energía máxima de un β^+ es 1.19 MeV.

De la conservación de energía para el decaimiento β^+ del $^{13}_7\text{N}$,



se obtiene

$$M_{^{13}\text{N}}c^2 = M_{^{13}\text{C}}c^2 + m_e c^2 + K_e + K_\nu$$

Reemplazando en esta expresión las masas de los núcleos con A impar, obtenemos del modelo de gota de líquido, con el término de Coulomb indicado explícitamente (problema 27.7)

$$7m_p c^2 + 6m_n c^2 - \cancel{b_1 A} + \cancel{b_2 A^{2/3}} + \frac{3}{5} k e^2 \frac{(7)(6)}{R} + \frac{b_4}{A}$$

$$= 6m_p c^2 + 7m_n c^2 - \cancel{b_1 A} + \cancel{b_2 A^{2/3}} + \frac{3}{5} k e^2 \frac{(6)(5)}{R} + \frac{b_4}{A} + m_e c^2$$

$$+ K_e + K_\nu$$

$$\frac{3}{5} k e^2 \frac{(42 - 30)}{R} = (m_n - m_p + m_e)c^2 + K_e + K_\nu$$

Si la energía cinética del β^+ debe ser máxima, la energía cinética del neutrino debe ser cero. Por lo tanto,

$$\frac{3}{5} k e^2 \frac{12}{R} = (m_n - m_p + m_e)c^2 + K_e$$

$$\frac{3}{5} (1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}) \frac{12}{R} = 1.80 \text{ MeV} + 1.19 \text{ MeV}$$

$$R = 3.47 \text{ fm}$$

Si tomamos $R = r_0 A^{1/3} = r_0 (13)^{1/3} = 2.35 r_0$, entonces

$$r_0 = \frac{3.47 \text{ fm}}{2.35} = 1.48 \text{ fm}$$

Este valor se encuentra en una aceptable concordancia con el valor $r_0 = 1.4$ fm obtenido en la sección 27.3.

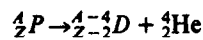
- 29.14. Demostrar que la gráfica de masa contra número atómico Z para $A = 104$ predice que el $^{104}_{44}\text{Ru}$ y el $^{104}_{46}\text{Pd}$ son los isóbaros más estables.

Como se ve en la figura 29-3, el $^{104}_{42}\text{Mo}$ y el $^{104}_{43}\text{Tc}$ sufren un decaimiento β^- que termina en el $^{104}_{44}\text{Ru}$. Esto es posible desde el punto de vista energético, debido a que el $^{104}_{42}\text{Mo}$ es más pesado que el $^{104}_{43}\text{Tc}$, que a su vez es más pesado que el $^{104}_{44}\text{Ru}$. (Si el $^{104}_{44}\text{Ru}$ sufriera un decaimiento β^- , se convertiría en un $^{104}_{45}\text{Rh}$, que es más pesado que

el $^{104}_{44}\text{Ru}$; por lo tanto, este decaimiento no es permitido.) También se muestra que el $^{104}_{45}\text{Rh}$ decae en $^{104}_{44}\text{Ru}$ y $^{104}_{46}\text{Pd}$, mientras que el $^{104}_{48}\text{Cd}$ decae en $^{104}_{47}\text{Ag}$ que decae entonces en $^{104}_{46}\text{Pd}$. Todos estos procesos son energéticamente posibles y demuestran que el $^{104}_{46}\text{Pd}$ es estable. Obsérvese que la masa del $^{104}_{44}\text{Ru}$ es mayor que la del $^{104}_{46}\text{Pd}$, pero este proceso de decaimiento no es permitido, puesto que formaría un $^{104}_{45}\text{Rh}$ con un núcleo intermedio y, como se ha dicho antes, esto es prohibido. Se ve que los datos se asemejan mucho a la forma de la parábola predicha en el modelo de gota de líquido para $A = \text{constante}$.

- 29.15. Calcular la energía cinética de las partículas alfa emitidas en un decaimiento alfa en función de la cantidad Q de la reacción.

Una reacción de decaimiento alfa tiene la forma



Suponiendo que el núcleo padre esté inicialmente en reposo, a partir del principio de conservación de momentum se obtiene $p_D = p_\alpha$. Debido a que las energías cinéticas son demasiado pequeñas comparadas con las energías de reposo del núcleo padre, podemos utilizar la relación no relativista $K = p^2/2M$ para obtener

$$\frac{K_D}{K_\alpha} = \frac{M_\alpha}{M_D} \approx \frac{4}{A-4}$$

donde A es el número másico del núcleo padre. La cantidad Q de la reacción es

$$Q = K_D + K_\alpha = \frac{4}{A-4} K_\alpha + K_\alpha = \frac{AK_\alpha}{A-4}$$

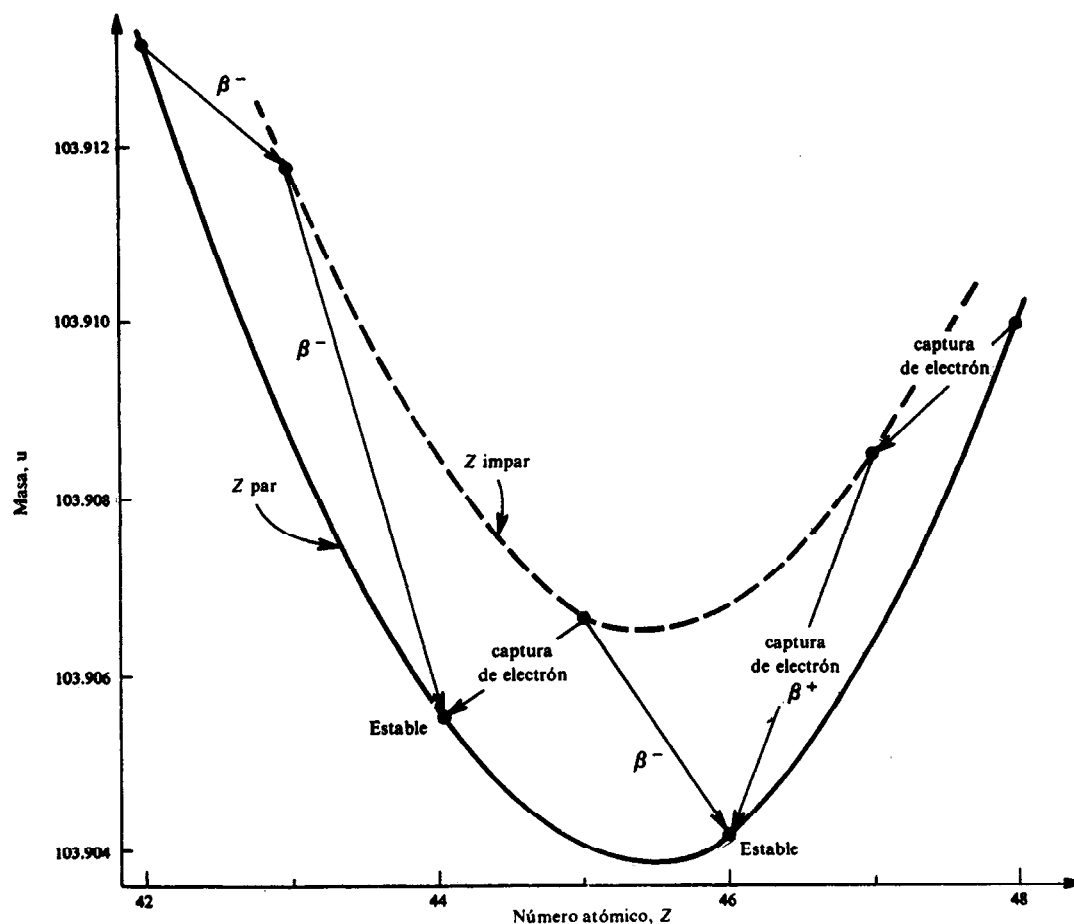


Fig. 29-3

entonces,

$$K_{\alpha} = \left(\frac{A-4}{A} \right) Q$$

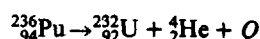
Puesto que Q tiene un valor bien definido, también lo tendrá K_{α} ; por lo tanto, en este decaimiento de dos cuerpos las partículas α son monoenergéticas. La energía cinética del núcleo hija es

$$K_D = \frac{4}{A-4} \left(\frac{A-4}{A} Q \right) = \frac{4Q}{A}$$

Obsérvese que cuanto mayor sea A , más próximo se encuentra K_{α} del valor de la energía total disponible Q y menor es K_D .

29.16. Demuestre que el $^{236}_{94}\text{Pu}$ es inestable y sufre un decaimiento α .

Para que el $^{236}_{94}\text{Pu}$ sufra espontáneamente un decaimiento α ,



el valor de Q debe ser positivo. Resolviendo para Q se obtiene

$$\begin{aligned} Q &= (M_{\text{Pu}} - M_{\text{U}} - M_{\text{He}})c^2 \\ &= (236.046071 \text{ u} - 232.037168 \text{ u} - 4.002603 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) \\ &= 5.87 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Por lo tanto $^{236}_{94}\text{Pu}$ puede sufrir un decaimiento α espontáneamente.

29.17. Teóricamente se demuestra que la energía cinética y la vida media en un decaimiento alfa para los isótopos par-par está relacionada por

$$T_{1/2} = B e^{b/K_{\alpha}^{1/2}}$$

donde B y b son constantes. Demuestre que los datos que aparecen en la tabla 29-1 satisfacen esta expresión.

Tabla 29-1

Isótopo	$T_{1/2}$	K_{α} , MeV
$^{210}_{84}\text{Po}$	138.4 d	5.30
$^{212}_{84}\text{Po}$	3×10^{-7} s	8.78
$^{214}_{84}\text{Po}$	1.64×10^{-4} s	7.68
$^{216}_{84}\text{Po}$	0.15 s	6.78
$^{218}_{84}\text{Po}$	3.05 min	6.00

Tomando logaritmos a ambos lados de la expresión tenemos

$$\ln T_{1/2} = \ln B + bK_{\alpha}^{-1/2}$$

expresión que indica la dependencia lineal entre $\ln T_{1/2}$ y $K_{\alpha}^{-1/2}$. Los datos dan los valores indicados en la tabla 29-2 y graficados en la figura 29-4. La aproximación es buena si $b \approx 3 \times 10^2 \text{ MeV}^{1/2}$, $B \approx 1 \times 10^{-36} \text{ s}$.

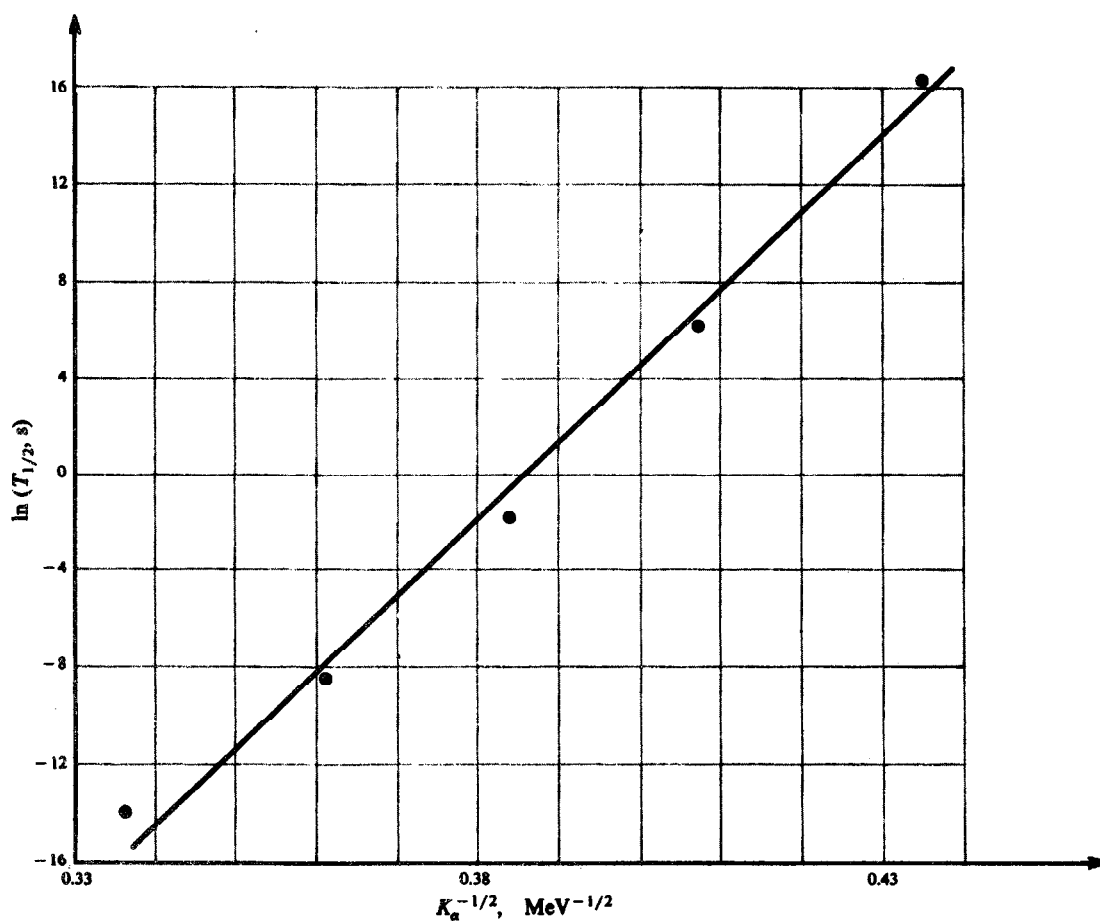


Fig. 29-4

Tabla 29-2

Isótopo	$T_{1/2}, \text{s}$	$\ln T_{1/2}$	$K_{\alpha}^{-1/2}, \text{MeV}^{-1/2}$
$^{210}_{84}\text{Po}$	1.20×10^7	16.30	0.434
$^{212}_{84}\text{Po}$	3×10^{-7}	-15.02	0.337
$^{214}_{84}\text{Po}$	1.64×10^{-4}	-8.72	0.361
$^{216}_{84}\text{Po}$	0.15	-1.90	0.384
$^{218}_{84}\text{Po}$	1.83×10^2	5.21	0.408

- 29.18. En una reacción nuclear se produce un elemento inestable a rapidez constante R . Si su vida media para un decaimiento β^- es $T_{1/2}$, ¿cuánto tiempo en términos de $T_{1/2}$, se necesita para producir el 50% de la cantidad de equilibrio?

Tenemos:

rapidez de crecimiento del elemento =

$$\frac{\text{número de núcleos producidos por el reactor}}{\text{s}} - \frac{\text{número de núcleos que decaen}}{\text{s}}$$

ó

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = R$$

La solución de esta ecuación es la suma de la solución de la ecuación homogénea $N_h = ce^{-\lambda t}$, donde c es la constante y la solución de la ecuación particular $N_p = R/\lambda$.

$$N = N_h + N_p = ce^{-\lambda t} + \frac{R}{\lambda}$$

La constante c se obtiene teniendo en cuenta que el número inicial del núcleo es cero

$$N(0) = 0 = c + \frac{R}{\lambda} \quad \text{ó} \quad c = -\frac{R}{\lambda}$$

por lo tanto

$$N = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

El valor de equilibrio es $N(\infty) = R/\lambda$. Haciendo N igual a $1/2$ de este valor, se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\lambda} \right) = \frac{R}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} = T_{1/2}$$

El resultado es independiente de R .

- 29.19.** Un material radiactivo a (decaimiento de λ_a constante) decae en un material b (decaimiento de λ_b constante) que es también radiactivo. Calcular la cantidad de material b que se encuentra después de un tiempo t .

rapidez de crecimiento de los núcleos $b =$

$$\frac{\text{número de núcleos } b \text{ producidos por } a}{s} - \frac{\text{número de núcleos } b \text{ que decaen}}{s}$$

Por cada núcleo a que decae se forma un núcleo b , por lo tanto, los núcleos b se forman a una rapidez de

$$-\frac{dN_a}{dt} = \lambda_a N_a$$

con lo cual se obtiene

$$\frac{dN_b}{dt} = \lambda_a N_a - \lambda_b N_b = \lambda_a N_{a0} e^{-\lambda_a t} - \lambda_b N_b$$

ó

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_{a0} e^{-\lambda_a t} \quad (1)$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden que se resuelve mediante técnicas convencionales. La ecuación homogénea tiene como solución

$$(N_b)_h = ce^{-\lambda_b t}$$

donde c es una constante arbitraria. Una solución particular se obtiene reemplazando $(N_b)_p = De^{-\lambda_a t}$ en (1):

$$(-\lambda_a + \lambda_b)De^{-\lambda_a t} = \lambda_a N_{a0} e^{-\lambda_a t}$$

$$D = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

La solución completa es

$$N_b = (N_b)_h + (N_b)_p = ce^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} \quad (2)$$

La constante c se calcula teniendo en cuenta que $N_b = N_{b0}$ en $t = 0$,

$$N_{b0} = c + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a}$$

finalmente se obtiene

$$N_b = N_{b0}e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) \quad (3)$$

- 29.20.** Si en el problema 29.19 se supone que $N_{b0} = 0$, calcular el tiempo en el cual N_b (el número máximo de núcleos hija) es máximo.

Con $N_{b0} = 0$, tenemos

$$N_b = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$$

con lo cual, para un máximo

$$\frac{dN_b}{dt} = \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} (-\lambda_a e^{-\lambda_a t} + \lambda_b e^{-\lambda_b t}) = 0$$

Resolviendo para t se obtiene

$$t = \frac{1}{\lambda_a - \lambda_b} \ln \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_b} \right)$$

- 29.21.** Si el material b del problema 29.19 decae en una sustancia estable c , calcular cómo varía la sustancia c con el tiempo, suponiendo que $N_{b0} = 0$.

Para cualquier tiempo, el número total de núcleos presente es N_{a0} ,

$$\begin{aligned} N_c &= N_{a0} - N_a - N_b \\ &= N_{a0} - N_{a0}e^{-\lambda_a t} - \frac{\lambda_a N_{a0}}{\lambda_b - \lambda_a} (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) \\ &= N_{a0} \left(1 - \frac{\lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_a t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} e^{-\lambda_b t} \right) \end{aligned}$$

Problemas suplementarios

Las masas atómicas se encuentran tabuladas en el apéndice.

- 29.22.** Calcular los valores de Q para decaimientos alfa, protón, neutrón y deuterón del $^{232}_{92}\text{U}$.
Resp. 5.42 MeV; -6.09 MeV; -7.23 MeV; -10.59 MeV
- 29.23.** ¿Cuál es la energía cinética de las partículas α emitidas en el decaimiento alfa del $^{232}_{92}\text{U}$? Suponga que el núcleo del $^{232}_{92}\text{U}$ decae estando en reposo. *Resp.* 5.33 MeV
- 29.24.** ¿Cuáles de los siguientes modos de decaimiento son posibles para el $^{40}_{19}\text{K}$: β^- , β^+ , alfa, captura de electrón y emisión del neutrón? *Resp.* Decaimiento β^- ; decaimiento β^+ ; captura de electrón
- 29.25.** La energía cinética máxima de la partícula β^- emitida en el decaimiento de un tritio (^3_1H) es 19 keV. Si la masa del tritio es 3.0160504 u, ¿cuál es la masa del producto del decaimiento? *Resp.* 3.016030 u

- 29.26. Calcular la energía del neutrino emitido en un proceso de captura de electrón para el $^{41}_{20}\text{Ca}$.
Resp. 0.41 MeV
- 29.27. Un elemento a ($T_{1/2} = 2.1$ h) decae en un elemento b ($T_{1/2} = 4.6$ h), el cual decae en otro elemento c . Si la cantidad inicial del elemento b es cero, ¿cuál es el valor de la relación N_b/N_{a0} al cabo de 2 h?
Resp. 0.41
- 29.28. Calcular la constante de desintegración del $^{90}_{38}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 28$ a). *Resp.* 0.0247 a^{-1}
- 29.29. ¿Cuál es la energía de la partícula α emitida en un decaimiento alfa del $^{226}_{88}\text{Ra}$, si se desprecia la energía de retroceso del núcleo del radio? *Resp.* 4.87 MeV
- 29.30. Resuelva el problema 29.29 considerando la energía de retroceso del núcleo del radio.
Resp. 4.78 MeV
- 29.31. Calcular la máxima velocidad posible del núcleo hija en un decaimiento β^- de un núcleo ^5_2He que se encuentra inicialmente en reposo. *Resp.* $1.0 \times 10^5 \text{ m/s}$
- 29.32. ¿Cuál es la masa de una muestra de $^{14}_6\text{C}$ ($T_{1/2} = 5570$ a), cuya actividad es de 5 Ci? *Resp.* 1.09 g
- 29.33. ¿Cuál es la actividad de $5 \times 10^{-7} \text{ kg}$ de $^{230}_{92}\text{U}$, cuya vida media es de $0.180 \times 10^7 \text{ s}$? *Resp.* 14.9 Ci
- 29.34. ¿Qué tiempo transcurre hasta cuando una cierta cantidad de $^{90}_{38}\text{Sr}$ ($T_{1/2} = 28$ a) se reduzca en un 75%?
Resp. 56 a
- 29.35. Calcular las energías de la partícula α y del núcleo hija en el decaimiento $^{144}_{60}\text{Nd} \rightarrow ^{140}_{58}\text{Ce} + \alpha$.
Resp. 1.85 MeV; 0.53 MeV
- 29.36. Las partículas α emitidas en el decaimiento alfa del $^{243}_{95}\text{Am}$ tienen una energía de 5.3 MeV. Suponiendo que dentro del núcleo las partículas α tengan la misma energía cinética, calcular el número de choques por segundo que las partículas α realizan con las paredes del núcleo. *Resp.* 9.2×10^{20}
- 29.37. Una sustancia cuyo número atómico es A sufre un decaimiento alfa al emitir dos grupos de partículas α con energías cinéticas $K_{\alpha 1}$ y $K_{\alpha 2}$. Demostrar que la energía de los rayos γ que lo acompañan es
- $$E_{\gamma} = \frac{A}{A-4} (K_{\alpha 1} - K_{\alpha 2})$$
- 29.38. La máxima distancia recorrida o *rango* R (en cm), de una partícula α en una cámara de burbujas se relaciona con su energía cinética K (en MeV) mediante la ecuación empírica $R = 0.318 K^{3/2}$. ¿Cuáles son las energías de las partículas α emitidas en el decaimiento del $^{219}_{86}\text{Ru}$ si los rangos medidos en la cámara de burbujas son de 5.66 cm, 5.33 cm y 5.18 cm? *Resp.* 6.82 MeV; 6.55 MeV; 6.43 MeV
- 29.39. Si el núcleo hija en el problema 29.38 se produce en el estado fundamental y en dos estados excitados, calcular la energía de los rayos γ emitidos. *Resp.* 0.28 MeV; 0.40 MeV; 0.12 MeV

Capítulo 30

Reacciones nucleares

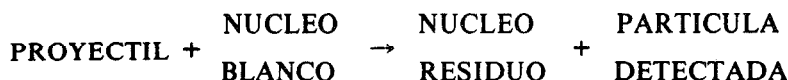
30.1 INTRODUCCION

Una gran cantidad de datos nucleares disponibles en la actualidad provienen del análisis de experimentos de reacciones nucleares. En ellos los núcleos son bombardeados con proyectiles conocidos, para observar luego los productos finales. Se utilizan como proyectiles algunos isótopos de núcleos con número atómico alto, tal como $Z = 18$; sin embargo, en lo que viene en el presente capítulo, solamente se considerarán las siguientes partículas:

Partícula	Notación
neutrón	n
protón	$p, {}^1_1\text{H}$
deuterón	$d, {}^2_1\text{H}$
tritio	$t, {}^3_1\text{H}$
helio-3	$h, {}^3_2\text{He}$
helio-4 (partícula alfa)	$\alpha, {}^4_2\text{He}$

Como resultado de la reacción se obtiene generalmente al final un *núcleo residual* (por lo regular no observable) más otra partícula que se detecta experimentalmente. (En algunas ocasiones ambas partículas finales son observadas.)

En forma de ecuación, las reacciones nucleares se indican así :

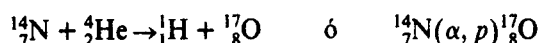


o en forma condensada,



Para cualquier reacción nuclear, en la ecuación se cumple que la carga total (Z total) y el número total de nucleones (A total) debe ser el mismo en ambos miembros de ella.

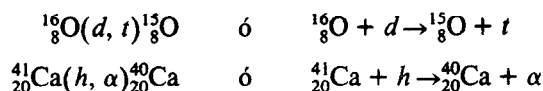
Por ejemplo, la primera reacción nuclear observada (por Rutherford en 1919) fue



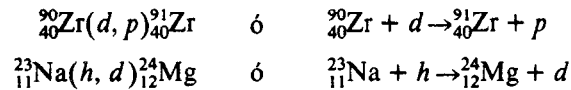
30.2 CLASIFICACION DE LAS REACCIONES NUCLEARES

Las reacciones se clasifican de acuerdo con el proyectil, la partícula detectada y el núcleo residual. Si el proyectil y la partícula detectada son una misma, se tiene una *reacción de dispersión*. Si el núcleo residual queda en el estado más bajo o estado fundamental, la dispersión es *elástica*; cuando el núcleo residual queda en un estado excitado la dispersión se denomina *inelástica*.

Los procesos en los cuales el proyectil gana o pierde nucleones del blanco se denominan, respectivamente reacciones de *recuperación* y de *pérdida*. Dos ejemplos de reacciones de recuperación son:



y dos ejemplos de reacción de pérdida son:



Las reacciones de recuperación y de pérdida se observan a menudo con energía lo suficientemente alta, como para suponer que la reacción es *directa*. En una reacción directa de pérdida o de recuperación se supone que el nucleón que toma parte en el proceso entra o sale de acuerdo con el modelo de capas, en una órbita definida del blanco sin perturbar los nucleones restantes del blanco.

Un tipo de reacción completamente diferente es aquel en el cual el proyectil incidente y el blanco forman un nuevo núcleo, con lo cual aparece un *núcleo compuesto*, que permanece por poco tiempo en un estado excitado y luego decae. El tiempo de vida de un núcleo compuesto es de aproximadamente 10^{-16} s. Aunque 10^{-16} s es un período tan corto que el núcleo compuesto no puede observarse directamente, es mucho mayor que el tiempo que gasta la partícula proyectil para atravesar una distancia nuclear, éste es de unos 10^{-21} s. Se supone que el decaimiento de un núcleo compuesto no depende de cómo fue formado; el núcleo compuesto no "recuerda" como fue formado.

Existen por lo regular diferentes reacciones que dan lugar al mismo núcleo compuesto y también diferentes métodos o canales a través de los cuales este núcleo compuesto puede decaer. Como ejemplo, para el núcleo compuesto ${}^{20}_{10}\text{Ne}$ formado en estado excitado $[{}^{20}_{10}\text{Ne}]^*$, podemos tener las reacciones indicadas en la figura 30-1.

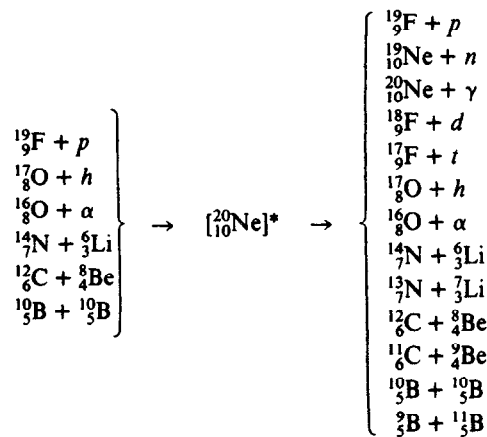


Fig. 30-1

30.3 SISTEMAS DE LABORATORIO Y DE CENTRO DE MASA

Las reacciones nucleares experimentales son a menudo realizadas en lo que se llama *sistema de centro de masa*. Este sistema se mueve a velocidad constante con respecto al sistema de laboratorio de tal manera que en el choque de partículas (y las partículas finales) tenemos *momentum total cero*.

Si el núcleo blanco está en reposo en el sistema de laboratorio, la velocidad V_{cm} del sistema de centro de masa irá en la dirección de la partícula incidente. Por lo tanto, con relación al centro de masa, las magnitudes de la velocidad del núcleo blanco (V') y la de la partícula incidente (v') son respectivamente (en términos no relativistas)

$$V' = V_{\text{cm}} \quad v' = v - V_{\text{cm}} \quad (30.1)$$

con las direcciones indicadas en la figura 30-2(a). Aquí v es la velocidad de la partícula incidente medida en el laboratorio. Imponiendo la condición de que la suma de los momenta del núcleo blanco (de masa M_i) y la partícula incidente (de masa m_i) sea cero en el sistema de centro de masa, obtenemos la velocidad del centro de masa de

$$\begin{aligned} -M_i V' + m_i v' &= 0 \\ -M_i V_{\text{cm}} + m_i (v - V_{\text{cm}}) &= 0 \\ (M_i + m_i) V_{\text{cm}} &= m_i v \end{aligned} \quad (30.2)$$

donde $(M_i + m_i)V_{cm}$ es el momentum del centro de masa en el sistema de laboratorio. De las ecuaciones (30.1) y (30.2) las velocidades del núcleo blanco y la partícula incidente, en el sistema de centro de masa, antes de que se produzca la reacción, son

$$V' = \frac{m_i}{m_i + M_i} v \quad v' = \frac{M_i}{m_i + M_i} v \quad (30.3)$$

Después de la reacción las partículas finales (si hay solamente dos) deben moverse en sentidos opuestos con iguales momenta en el sistema de centro de masa, puesto que en este sistema el momentum total inicial era cero [ver figura 30-2(b)].

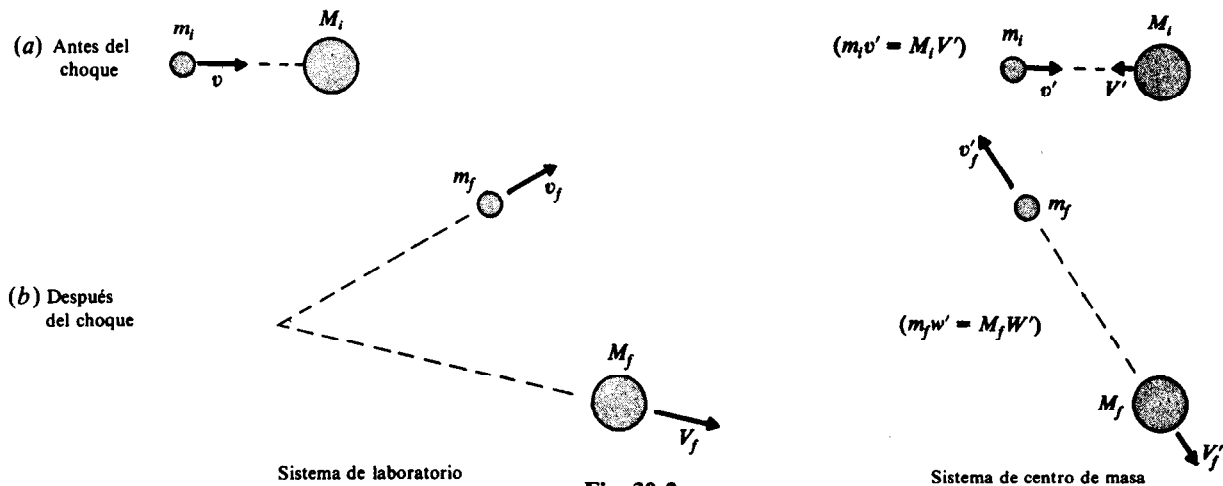


Fig. 30-2

30.4 ASPECTOS ENERGETICOS DE LAS REACCIONES NUCLEARES

En una reacción nuclear la energía es a veces liberada o absorbida. Decir que una reacción “libera energía” significa que la energía cinética de las partículas después de la reacción es mayor que la energía cinética de las partículas antes de la reacción. El aumento resulta de la transformación de la masa en reposo en energía cinética. La cantidad de energía liberada se mide mediante el valor Q de la reacción nuclear, definido como la diferencia entre la energía cinética final e inicial.

$$Q \equiv K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}}$$

Puesto que la energía total $E = E_0 + K$, se conserva

$$Q = E_{0 \text{ final}} - E_{0 \text{ inicial}}$$

En otras palabras, Q/c^2 es la diferencia entre las masas en reposo totales inicial y final; esta es exactamente la definición dada en el capítulo 29 para la clase especial de reacciones de decaimiento.

Si en una reacción se libera energía $Q > 0$, la reacción se denomina *exotérmica* o *exoenergética*; la reacción puede efectuarse aunque ambas partes estén inicialmente en reposo. Si $Q < 0$, la energía es absorbida o consumida y la reacción se denomina *endotérmica* o *endoenergética*; la reacción no puede efectuarse a menos que la partícula bombardeante tenga una cierta energía cinética umbral (ver problema 30.8). Si Q es 0 y si las partículas son las mismas antes y después de la reacción, tenemos un *choque elástico*.

30.5 SECCION TRANSVERSAL NUCLEAR

Cuando se bombardea un material con partículas incidentes para producir una reacción nuclear, no se puede garantizar que un determinado proyectil interactúe con el núcleo del material blanco para producir la reacción. Una *sección transversal*, σ , es una cantidad que mide la probabilidad de que la reacción nuclear se efectúe en una determinada región del material blanco. Se define así:

$$\sigma \equiv \frac{\text{número de reacciones por segundo por núcleo}}{\text{número de proyectiles incidentes por segundo por área}}$$

Mientras mayor sea el valor de σ , mayor será la probabilidad de realización de una reacción. Una sección transversal tiene dimensiones de área y generalmente se mide en unidades llamadas *barn*, donde

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$$

de tal manera que un barn es aproximadamente un cuadrado, cuyo lado es un radio nuclear.

Si el número de núcleos blanco por unidad de volumen en un material es n , el número de partículas dispersadas N_d cuando un haz de N_0 proyectiles incide sobre un material de espesor T , es (ver problema 30.12)

$$N_d = N_0(1 - e^{-n\sigma T})$$

Las secciones transversales son diferentes para diferentes reacciones y varían para una misma reacción con la energía de las partículas incidentes. Si la reacción es endotérmica, la sección transversal será cero si la energía está por debajo del valor umbral.

Problemas resueltos

- 30.1. Cuando el ${}^6_3\text{Li}$ se bombardea con deuterones de 4 MeV, se observa una reacción que consiste en la formación de dos partículas alfa, cada una con energía de 13.2 MeV. Hallar el valor de Q para esta reacción.

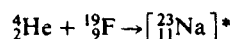
$$Q = (K_{\alpha 1} + K_{\alpha 2}) - K_d = (13.2 \text{ MeV} + 13.2 \text{ MeV}) - 4 \text{ MeV} = 22.4 \text{ MeV}$$

- 30.2. Determinar la partícula desconocida en las siguientes reacciones nucleares: (a) ${}^{18}_8\text{O}(d, p)X$, (b) $X(p, \alpha){}^{87}_{39}\text{Y}$, (c) ${}^{122}_{52}\text{Te}(X, d){}^{124}_{53}\text{I}$.

- (a) En el proceso ${}^{18}_8\text{O}(d, p)X$ se agrega un neutrón al ${}^{18}_8\text{O}$ para formar X , el cual es ${}^{19}_8\text{O}$.
 (b) En el proceso $X(p, \alpha){}^{87}_{39}\text{Y}$ se ha extraído un protón y dos neutrones de X para formar ${}^{87}_{39}\text{Y}$, por lo tanto, X es ${}^{90}_{40}\text{Zr}$.
 (c) En el proceso ${}^{122}_{52}\text{Te}(X, d){}^{124}_{53}\text{I}$ se ha formado un deuterón (${}^2_1\text{H}$) y ${}^{124}_{53}\text{I}$ a partir de ${}^{122}_{52}\text{Te}$ y de X . Por lo tanto, X debe tener dos protones y un total de cuatro nucleones, esto correspondiente al ${}^4_2\text{He}$.

- 30.3. Encontrar el núcleo compuesto y algunos de los posibles productos de la reacción cuando partículas α inciden sobre el ${}^{19}_9\text{F}$.

El núcleo compuesto tiene $Z = Z_1 + Z_2 = 2 + 9 = 11$ y $A = A_1 + A_2 = 4 + 19 = 23$. Por lo tanto



Este núcleo puede decaer en muchos productos, tales como

$$[{}^{23}_{11}\text{Na}]^* \rightarrow \begin{cases} {}^{23}_{11}\text{Na} + \gamma \\ {}^{22}_{10}\text{Ne} + p \\ {}^{21}_{10}\text{Ne} + d \\ \vdots \end{cases}$$

- 30.4. Calcular los valores de Q para las reacciones (a) ${}^{16}_8\text{O}(\gamma, p){}^{15}_7\text{N}$, (b) ${}^{150}_{62}\text{Sm}(p, \alpha){}^{147}_{61}\text{Pm}$.

Para la reacción $M_i(m_i, m_f)M_f$, el valor de Q es

$$Q = [M_i + m_i - (M_f + m_f)]c^2$$

- (a) $Q = [15.994915 \text{ u} + 0 \text{ u} - (15.000108 \text{ u} + 1.007825 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) = -12.13 \text{ MeV}$
 (b) $Q = [149.917276 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - (146.915108 \text{ u} + 4.002603 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) = 6.88 \text{ MeV}$

30.5. Calcular el exceso de masa (problema 28.23) para (a) $^{42}_{20}\text{Ca}$, (b) $^{130}_{52}\text{Te}$.

$$(a) \quad \delta = 41.958625 \text{ u} - 42 \text{ u} = -0.041375 \text{ u} = -38.540 \text{ MeV}$$

$$(b) \quad \delta = 129.906238 \text{ u} - 130 \text{ u} = -0.093762 \text{ u} = -87.337 \text{ MeV}$$

Los datos nucleares se dan a menudo en términos de exceso de masa más bien que del peso atómico.

30.6. Utilizando los datos

Núcleo	Exceso de masa
$^{192}_{76}\text{Os}$	- 0.038550 u
$^{191}_{76}\text{Os}$	- 0.039030
d	+ 0.014102
t	+ 0.016050

hallar el valor de Q para las reacciones $^{192}_{76}\text{Os}(d, t)^{191}_{76}\text{Os}$.

Puesto que en cualquier reacción se conserva el valor total de A , podemos reemplazar las masas de reposo por los excesos de masa en el cálculo de Q . Así

$$\begin{aligned} Q &= [M_i + m_i - (M_f + m_f)]c^2 \\ &= [-0.038550 \text{ u} + 0.014102 \text{ u} - (-0.039030 \text{ u} + 0.016050 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) = -1.37 \text{ MeV} \end{aligned}$$

30.7. En el sistema de laboratorio se observa que un protón de 6 MeV incide sobre un blanco estacionario de ^{12}C . Hallar la velocidad del sistema de centro de masa. Considere la masa del protón como 1 u.

Utilizando una expresión no relativista, la velocidad del protón se obtiene a partir de $K_i = \frac{1}{2}m_i v^2$:

$$v = \sqrt{\frac{2K_i}{m_i}} = c \sqrt{\frac{2K_i}{m_i c^2}} = (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \sqrt{\frac{2(6 \text{ MeV})}{(1 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u})}} = 3.41 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Por (30.2),

$$V_{\text{cm}} = \frac{m_i}{M_i + m_i} v = \frac{1 \text{ u}}{12 \text{ u} + 1 \text{ u}} (3.41 \times 10^7 \text{ m/s}) = 2.62 \times 10^6 \text{ m/s}$$

en la dirección del protón.

30.8. Para la reacción endotérmica $M_i(m_i, m_f)M_f$, encuentre cómo se relaciona el valor de Q con la energía umbral de la partícula que incide. Utilice relaciones no relativistas.

La respuesta requerida se obtiene más fácilmente efectuando primero los cálculos en el sistema de centro de masa, donde el momentum total es cero y transformando luego los resultados al sistema de laboratorio. Utilizando la notación de la figura 30-2, tenemos para la energía cinética total inicial en el sistema de centro de masa

$$K_{i \text{ cm}} = \frac{1}{2} m_i v'^2 + \frac{1}{2} M_i V'^2$$

Transformando el sistema de laboratorio mediante la ecuación (30.3) y teniendo en cuenta que la partícula blanco se encuentra en reposo en el sistema de laboratorio

$$\begin{aligned} K_{i \text{ cm}} &= \frac{1}{2} m_i \left(\frac{M_i}{m_i + M_i} v \right)^2 + \frac{1}{2} M_i \left(\frac{m_i}{m_i + M_i} v \right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} m_i v^2 \right) \left[\frac{M_i(M_i + m_i)}{(m_i + M_i)^2} \right] \\ &= K_{i \text{ lab}} \left(\frac{M_i}{m_i + M_i} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

La ecuación (1) es la relación general entre las energías cinéticas iniciales medidas en el laboratorio y en el sistema de centro de masa.

El valor Q de la reacción, que depende solamente de las masas de reposo, es el mismo en ambos sistemas:

$$K_{f \text{ lab}} - K_{i \text{ lab}} = K_{f \text{ cm}} - K_{i \text{ cm}} = Q \quad (2)$$

La energía umbral $K_{u \text{ cm}}$, en el sistema de centro de masa, es la energía cinética inicial que producen las dos partículas finales en reposo ($K_{f \text{ cm}} = 0$), por lo tanto

$$K_{u \text{ cm}} = -Q \quad (3)$$

La correspondiente energía en el sistema de laboratorio se obtiene entonces de (1) así:

$$K_{u \text{ lab}} = -Q \left(\frac{M_i + m_i}{M_i} \right) \quad (4)$$

Una expresión más conocida para $K_{u \text{ lab}}$ puede obtenerse considerando la energía cinética K^* del *centro de masa* (en el sistema de laboratorio) cuando la partícula incidente tiene la energía umbral. Utilizando (30.2) y (4) tenemos

$$\begin{aligned} K^* &= \frac{1}{2} (M_i + m_i) V_{\text{cm}}^2 = \frac{m_i}{M_i + m_i} \left(\frac{1}{2} m_i v_u^2 \right) = \frac{m_i}{M_i + m_i} K_{u \text{ lab}} \\ &= \left(1 - \frac{M_i}{M_i + m_i} \right) K_{u \text{ lab}} = K_{u \text{ lab}} + Q \end{aligned}$$

6

$$K_{u \text{ lab}} = -Q + K^* \quad (5)$$

La ecuación (5) establece que la partícula incidente debe tener energía suficiente para iniciar la reacción endotérmica ($-Q$) y responder por la mayor parte del movimiento del sistema (K^* , que permanece invariante durante la reacción).

30.9. Calcular las barreras de Coulomb del $^{16}_8\text{O}$, $^{93}_{41}\text{Nb}$ y $^{209}_{83}\text{Bi}$ desde el punto de vista del protón.

La barrera de Coulomb es la energía necesaria para llevar el protón al borde del núcleo (figura 30-3). Si definimos $\Delta \equiv R + r = r_0(A^{1/3} + 1)$, entonces

$$E_C = k \frac{(Ze)e}{\Delta} = k \frac{Ze^2}{r_0(A^{1/3} + 1)} = \left(\frac{1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1.4 \text{ fm}} \right) \left(\frac{Z}{A^{1/3} + 1} \right) = (1.03 \text{ MeV}) \left(\frac{Z}{A^{1/3} + 1} \right)$$

Para $^{16}_8\text{O}$,

$$E_C = (1.03 \text{ MeV}) \left(\frac{8}{16^{1/3} + 1} \right) = 2.34 \text{ MeV}$$

Para $^{93}_{41}\text{Nb}$,

$$E_C = (1.03 \text{ MeV}) \left(\frac{41}{93^{1/3} + 1} \right) = 7.64 \text{ MeV}$$

Para $^{209}_{83}\text{Bi}$,

$$E_C = (1.03 \text{ MeV}) \left(\frac{83}{209^{1/3} + 1} \right) = 12.33 \text{ MeV}$$

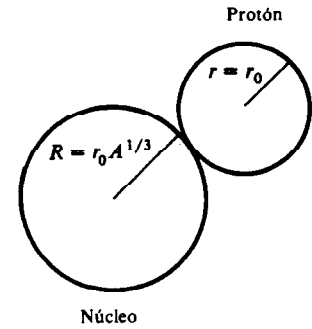
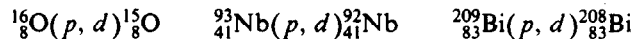


Fig. 30-3

30.10. En el problema 30.9, compare la barrera de Coulomb, E_C , con la energía umbral para la reacción



El valor de Q para una reacción es

$$Q = (M_i + m_i - M_f - m_f)c^2$$

y, de la ecuación (4) del problema 30.8,

$$K_u = -Q \left(\frac{M_i + m_i}{M_i} \right)$$

Para $^{16}_8\text{O}(p, d)^{15}_8\text{O}$:

$$Q = (15.994915 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - 15.003070 \text{ u} - 2.014102 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = -13.44 \text{ MeV}$$

$$K_u = (13.44 \text{ MeV}) \left(\frac{16 \text{ u} + 1 \text{ u}}{16 \text{ u}} \right) = 14.28 \text{ MeV}$$

Para $^{93}_{41}\text{Nb}(p, d)^{92}_{41}\text{Nb}$:

$$Q = (92.906382 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - 91.907211 \text{ u} - 2.014102 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = -6.62 \text{ MeV}$$

$$K_u = (6.62 \text{ MeV}) \left(\frac{93 \text{ u} + 1 \text{ u}}{93 \text{ u}} \right) = 6.69 \text{ MeV}$$

Para $^{209}_{83}\text{Bi}(p, d)^{208}_{83}\text{Bi}$:

$$Q = (208.980394 \text{ u} + 1.007825 \text{ u} - 207.979731 \text{ u} - 2.014102 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = -5.23 \text{ MeV}$$

$$K_u = (5.23 \text{ MeV}) \left(\frac{209 \text{ u} + 1 \text{ u}}{209 \text{ u}} \right) = 5.26 \text{ MeV}$$

Para $^{16}_8\text{O}(p, d)^{15}_8\text{O}$, $K_u \gg E_C$ existirá una alta probabilidad de que la reacción se produzca a la energía umbral. Para $^{209}_{83}\text{Bi}(p, d)^{208}_{83}\text{Bi}$, $K_u \ll E_C$ la reacción difícilmente se producirá a la energía umbral, puesto que el protón nunca se aproximará al núcleo del $^{209}_{83}\text{Bi}$. En la reacción del $^{93}_{41}\text{Nb}(p, d)^{92}_{41}\text{Nb}$ es ligeramente menor que en la barrera de Coulomb (7.61 MeV), por lo tanto no se espera reacción, ya que el protón no llega al núcleo del $^{93}_{41}\text{Nb}$. Pero la reacción $^{93}_{41}\text{Nb}(p, d)^{92}_{41}\text{Nb}$ en efecto se observa a la energía umbral. Este es un ejemplo del efecto *túnel* en la barrera de Coulomb, donde el protón, aún por debajo de la barrera de Coulomb, logra llegar al núcleo del $^{93}_{41}\text{Nb}$.

- 30.11.** Si en un blanco delgado de espesor dT , hay n centros de dispersión (núcleos) por unidad de volumen, cada uno de área σ , calcular la relación R del área compuesta por los centros de dispersión al área total del blanco.

En un blanco delgado no existen núcleos detrás de otros. Por lo tanto,

$$R = \frac{\text{área total de los centros de dispersión}}{\text{área del blanco}} = \frac{\text{volumen del blanco} \times n \times \sigma}{\text{área del blanco}} = \frac{(A dT) \times n \times \sigma}{A} = n\sigma dT$$

- 30.12.** Obtener una expresión para el número de partículas de un haz de área A que tiene N_0 partículas, después de atravesar un blanco de espesor T , cuyo material contiene n centros de dispersión por unidad de volumen, cada uno de los cuales tiene una sección transversal de área σ .

Consideremos una porción delgada de material del blanco de espesor dT . Cada vez que una partícula incidente encuentra uno de los centros de dispersión en esta porción delgada, la partícula incidente será dispersada. Por lo tanto, la relación del número de partículas dispersadas al número de partículas incidentes N sobre la porción delgada será la misma relación entre el área total de los centros de dispersión al área del haz; por lo tanto, del problema 30.11 tenemos

$$\frac{\text{número de partículas dispersadas}}{\text{número de partículas incidentes}} = \frac{\text{área total de los centros de dispersión}}{\text{área total del blanco}}$$

ó

$$\frac{dN_d}{N} = -\frac{dN}{N} = n\sigma dT$$

(El signo menos se debe a que al incremento de partículas dispersadas dN_d , corresponde una disminución de partículas incidentes, $-dN$.) Integrando esta expresión, se obtiene

$$-\int_{N_0}^{N_f} \frac{dN}{N} = \int_0^T n\sigma dT \quad \text{ó} \quad -\ln \frac{N_f}{N_0} = n\sigma T \quad \text{ó} \quad N_f = N_0 e^{-n\sigma T}$$

donde N_0 y N_f son los números inicial y final de partículas en el haz. El número total de partículas dispersadas está dado por

$$N_d = N_0 - N_f = N_0(1 - e^{-n\sigma T})$$

- 30.13.** En un blanco de dispersión hipotético el $10^{-3}\%$ de los neutrones de un haz incidente es dispersado. Si la densidad del material del blanco es de $1.06 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, $A = 200$ y la sección transversal de los núcleos en total por núcleo, σ , es 1.1 barns, hallar el espesor del blanco.

El número de centros de dispersión por unidad de volumen es

$$n = \left(\frac{6.02 \times 10^{26} \text{ núcleos/kmol}}{200 \text{ kg/kmol}} \right) (1.06 \times 10^4 \text{ kg/m}^3) = 3.19 \times 10^{28} \text{ núcleos/m}^3$$

y

$$n\sigma = (3.19 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(1.1 \times 10^{-28} \text{ m}^2) = 3.51 \text{ m}^{-1}$$

Del problema 30.12, el número de partículas dispersadas está dado por

$$N_d = N_0(1 - e^{-n\sigma T})$$

y para $N_d/N_0 = 10^{-5}$ tenemos

$$10^{-5} = 1 - e^{-(3.51 \text{ m}^{-1})T} \quad \text{ó} \quad e^{-(3.51 \text{ m}^{-1})T} = 1 - 10^{-5}$$

Para valores pequeños de x , $e^{-x} \approx 1 - x$, y por lo tanto

$$(3.51 \text{ m}^{-1})T = 10^{-5} \quad \text{ó} \quad T = \frac{10^{-5}}{3.51 \text{ m}^{-1}} = 2.85 \times 10^{-6} \text{ m}$$

- 30.14.** Cuando un haz de partículas α de 5.30 MeV procedentes de una fuente de $^{210}_{84}\text{Po}$ incide sobre un blanco de ^9_4Be , aparece una radiación de la cual sólo se sabe que no posee carga. Suponiendo que esta radiación sea un rayo γ , calcular la energía de estos rayos cuando salen del blanco de ^9_4Be en la misma dirección del haz incidente. (Este problema, junto con los problemas 30.15 y 30.16 indican el razonamiento que condujo a Chadwick en 1932 al descubrimiento del neutrón.)

La reacción supuesta es $^9_4\text{Be}(\alpha, \gamma)^{13}_6\text{C}$. Considerando que el núcleo de ^9_4Be se encuentra en reposo y que la energía cinética de la partícula α sea de 5.30 MeV, del principio de conservación de masa-energía,

$$\begin{aligned} (M_{\text{Be}} + M_{\alpha})c^2 + K_{\alpha} &= M_{\text{C}}c^2 + K_{\text{C}} + K_{\gamma} \\ (9.012186 \text{ u} + 4.002603 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) + 5.30 \text{ MeV} &= (13.003354 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) + K_{\text{C}} + K_{\gamma} \\ K_{\gamma} + K_{\text{C}} &= 16.0 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (1)$$

Cuando el rayo γ y el núcleo del $^{13}_6\text{C}$ se mueven en la misma dirección que la partícula α incidente, del principio de conservación del momentum, tenemos

$$p_{\alpha} = p_{\gamma} + p_{\text{C}} \quad \text{ó} \quad p_{\alpha}c = p_{\gamma}c + p_{\text{C}}c \quad (2)$$

Para partículas materiales, sin considerar efectos relativistas

$$K = \frac{p^2}{2M} = \frac{(pc)^2}{2Mc^2} \quad \text{ó} \quad pc = \sqrt{2(Mc^2)K}$$

Así,

$$p_{\alpha}c = \sqrt{2(4 \text{ u} \times 931.5 \text{ MeV/u})(5.30 \text{ MeV})} = 199 \text{ MeV}$$

$$p_{\text{C}}c = \sqrt{2(13 \text{ u} \times 931.5 \text{ MeV/u})K_{\text{C}}} = 156 K_{\text{C}}^{1/2}$$

y para el fotón de rayos γ , $E_\gamma = K_\gamma = p_\gamma c$. Reemplazando en la ecuación (2):

$$199 \text{ MeV} = K_\gamma + 156 K_C^{1/2} \quad (3)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (1) y (3), se obtiene

$$K_\gamma = 14.6 \text{ MeV} \quad K_C = 1.4 \text{ MeV}$$

- 30.15.** En experimentos diferentes la radiación desconocida del problema 30.14 incide sobre un blanco de parafina rico en protones y sobre uno de $^{14}_7\text{N}$. Suponiendo de nuevo que esta radiación está formada por fotones, calcular las energías mínimas del fotón que producen el retroceso de protones observado de 5.7 MeV y el retroceso del núcleo de $^{14}_7\text{N}$ de 1.4 MeV. Compare estas energías con el resultado del problema 30.14.

Los fotones interactúan con el núcleo blanco de acuerdo con la dispersión de Compton. La energía mínima E_γ corresponde a un choque frontal. En el análisis de este choque utilizamos expresiones no relativistas para las partículas, puesto que las energías cinéticas observadas son mucho menores que las energías en reposo de las partículas blanco. Así (los términos primados se refieren a las condiciones después del choque):

$$h\nu_{\min} = h\nu' + K' \quad (\text{conservación de energía})$$

puesto que todos los momenta se encuentran a lo largo del eje de x ,

$$\frac{h\nu}{c} = -\frac{h\nu'}{c} + m_0 v' \quad (\text{conservación de momentum})$$

Multiplicando la segunda ecuación por c sumándosela a la primera ecuación y utilizando $m_0 v' = \sqrt{2m_0 K'}$, obtenemos

$$2h\nu_{\min} = \sqrt{2m_0 c^2 K'} + K' = \sqrt{K'} (\sqrt{2m_0 c^2} + \sqrt{K'})$$

Puesto que $2m_0 c^2 \gg K'$, es posible despreciar $\sqrt{K'}$ en el proceso para obtener

$$h\nu_{\min} = \sqrt{\frac{K'(m_0 c^2)}{2}}$$

Para el protón blanco,

$$h\nu_{\min} \approx \sqrt{(5.7 \text{ MeV})(938 \text{ MeV})/2} = 52 \text{ MeV}$$

Para el blanco de $^{14}_7\text{N}$

$$h\nu_{\min} \approx \sqrt{(1.4 \text{ MeV})(14 \text{ u} \times 931.5 \text{ MeV/u})/2} = 96 \text{ MeV}$$

Estos valores de energía se encuentran muy por encima del valor de $K_\gamma = 14.6 \text{ MeV}$ encontrado en el problema 30.14, lo cual demuestra que la suposición hecha acerca de la relación desconocida como rayos γ no es consecuente con los datos observados.

- 30.16.** Suponiendo que el retroceso de los protones y de los núcleos de $^{14}_7\text{N}$ del problema 30.15 sean el resultado de choque frontal con una partícula incidente de masa considerable, calcular su masa y su energía cinética inicial.

Utilizando los subíndices 1 y 2 para las partículas proyectil y blanco respectivamente, tenemos

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \quad (\text{conservación de energía no relativista})$$

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (\text{conservación del momentum})$$

La velocidad v_1' no se mide mediante experimentos. Despejando v_1' de la segunda ecuación y reemplazándola en la primera, obtenemos la relación

$$v_2' = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

La energía cinética final de la partícula 2 es entonces

$$K_2' = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \left[\frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} K_1$$

Reemplazando las masas del blanco y las energías observadas, obtenemos dos ecuaciones para las cantidades m_1 y K_1 :

$$\text{protón blanco: } 5.7 \text{ MeV} = \frac{4m_1(1 \text{ u})}{(m_1 + 1 \text{ u})^2} K_1$$

$$^{14}_7\text{N blanco } 1.4 \text{ MeV} = \frac{4m_1(14 \text{ u})}{(m_1 + 14 \text{ u})^2} K_1$$

Resolviendo:

$$m_1 = 0.98 \text{ u} \quad K_1 = 5.7 \text{ MeV}$$

El valor $m_1 \approx 1 \text{ u}$ concuerda dentro de límites muy aceptables con la masa que ahora conocemos del neutrón. Del mismo modo, si en el problema 30.14, la reacción considerada es $^9_4\text{Be}(\alpha, \gamma)^{13}_6\text{C}$, en vez de $^9_4\text{Be}(\alpha, n)^{12}_6\text{C}$ se encuentra que la energía cinética del neutrón es aproximadamente igual al valor anterior de 5.7 MeV. (Ver problema 30.22.)

Problemas suplementarios

Las masas atómicas se encuentran tabuladas en el apéndice.

- 30.17. Encontrar la partícula desconocida en las reacciones nucleares (a) $^{182}_{74}\text{W}(^3_2\text{He}, n)X$, (b) $^{42}_{20}\text{Ca}(^6_3\text{Li}, X)^{45}_{21}\text{Sc}$.
 Resp. (a) $^{184}_{76}\text{Os}$; (b) ^3_2He
- 30.18. Calcular la velocidad de $[^{42}_{21}\text{Sc}]^*$ en la reacción

$$^{41}_{20}\text{Ca} + p \rightarrow [^{42}_{21}\text{Sc}]^* \rightarrow ^{40}_{20}\text{Ca} + d$$

 si la energía del protón en el laboratorio es de 7.2 MeV. Resp. $8.9 \times 10^5 \text{ m/s}$
- 30.19. Calcular el valor de Q para la reacción $^{42}_{20}\text{Ca}(p, d)^{41}_{20}\text{Ca}$. Resp. -9.25 MeV
- 30.20. Hallar el exceso de masa en unidades u para (a) ^4_2He y (b) $^{88}_{38}\text{Sr}$. Resp. (a) 0.002603 u; (b) -0.094359 u
- 30.21. En cierto blanco de dispersión, un $10^{-6}\%$ del haz de neutrones incidente se dispersa. Si la densidad del material blanco es de $4.1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, $A = 30$, y el espesor del blanco es 10^{-8} m , hallar la sección transversal total del núcleo. Resp. 0.122 barn
- 30.22. Suponiendo que en el problema 30.14 la reacción sea $^9_4\text{Be}(\alpha, n)^{12}_6\text{C}$, calcular la energía cinética del neutrón y compararla con el valor calculado en el problema 30.16. Resp. 5.7 MeV
- 30.23. Demostrar que en el choque elástico de dos cuerpos, la velocidad de cada partícula permanece invariante en el choque cuando se mide en el sistema de centro de masa.

Capítulo 31

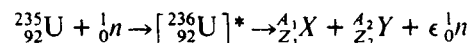
Fisión y fusión

31.1 FISION NUCLEAR

Una de las reacciones nucleares que encuentra mayor campo de aplicación práctica es la formación de un núcleo compuesto cuando un núcleo con $A > 230$ absorbe un neutrón incidente. Muchos de estos núcleos compuestos se desdoblán en dos fragmentos nucleares de masa intermedia y neutrones adicionales. Este tipo de reacción se conoce como *fisión nuclear*.

En un reactor nuclear el número de fisiones por unidad de tiempo se controla mediante la absorción del exceso de neutrones, de tal manera que, en promedio, un neutrón de cada fisión produce una nueva fisión. El calor liberado se utiliza para producir vapor con el cual se accionan turbinas y generadores de energía eléctrica. Si la reacción no se controla de tal manera que cada fisión produce más de un neutrón capaz de producir posteriores fisiones, el número de fisiones crecerá en progresión geométrica, dando como resultado el que toda la energía de la fuente sea liberada en un intervalo de tiempo muy corto, produciendo una bomba nuclear.

Una reacción de fisión típica es la siguiente:



como $Z_1 + Z_2 = 92$, $A_1 + A_2 + \epsilon = 236$, donde ϵ es un número entero. La relación entre las masas de los productos de la fisión M_1/M_2 , según resultados experimentales es aproximadamente 3/2. El número ϵ de neutrones liberados en la fisión de un elemento particular depende de los productos finales que aparezcan. Para la reacción descrita anteriormente, el número promedio de neutrones liberados en la fisión, según resultados experimentales es de unos 2.44, la fracción decimal que aparece como el resultado de un promedio establecido sobre todos los productos de la reacción.

Los dos productos del decaimiento tienen por lo regular una relación neutrón-protón aproximadamente igual a las del núcleo original. En la figura 31-1 se encuentran por encima de la curva de estabilidad, en una

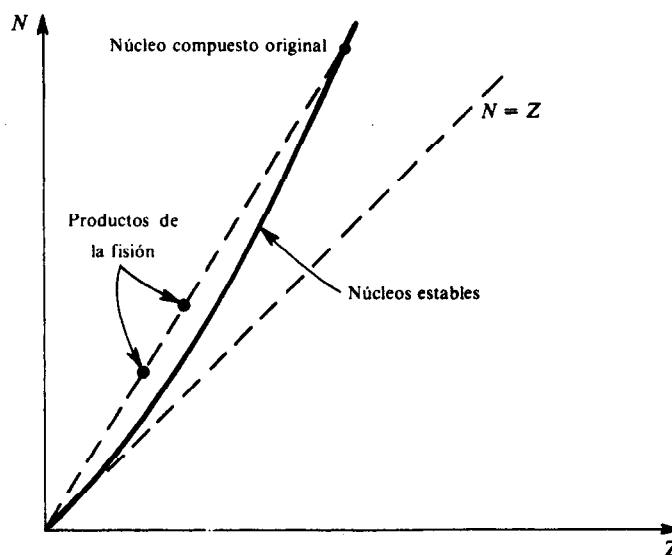


Fig. 31-1

región donde los núcleos son ricos en neutrones y sufren decaimientos beta. Por lo regular, antes de obtener un núcleo estable (problema 31.7), se requiere una cadena de varios decaimientos beta, cada uno de los cuales reduce la relación N/Z .

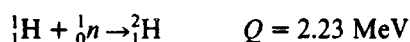
En cada fisión una reacción libera aproximadamente 200 MeV (problema 31.8). Esta energía es mucho mayor que los pocos MeV liberados en una reacción típica exotérmica, donde los productos finales incluyen solamente una partícula de masa comparable al núcleo blanco original. Esta energía de 200 MeV se distribuye como sigue:

- (a) 170 MeV, energía cinética de los productos de la fisión
- (b) 5 MeV, energía cinética de los neutrones de la fisión
- (c) 15 MeV, energía de los β^- y los rayos γ
- (d) 10 MeV, energía del neutrino liberada en los decaimientos β^- de los productos de la fisión

En muchas reacciones de fisión, la formación de los núcleos compuestos se efectúa más fácilmente con neutrones térmicos de energía $E \approx 0.04$ eV. De lo anterior se ve que los neutrones liberados en una reacción típica de fisión tienen energías cinéticas de unos 2 MeV. La forma como estos neutrones liberados son frenados para facilitar posteriores fisiones se demostrará en los problemas 31.2 y 31.17.

31.2 FUSION NUCLEAR

Como su nombre lo indica, la reacción de *fusión* es aquella en la cual dos nucleones o bien dos núcleos relativamente livianos ($A < 20$) se combinan para formar un núcleo pesado y la correspondiente energía liberada. Un ejemplo de fusión consiste en la formación de un deuterón a partir de un neutrón y un protón:



Otra reacción de fusión se encuentra en la formación de una partícula α mediante la fusión de dos deuterones:



Aunque estas energías son mucho menores que la energía liberada en una reacción de fisión (≈ 200 MeV), la energía por unidad de masa es mayor, debido a lo pequeño de las masas de las partículas que intervienen.

La liberación de energía en la fusión puede entenderse con ayuda de la figura 28-1, en donde se muestra que para núcleos livianos la energía de enlace por nucleón finalmente aumenta con el crecimiento del número de masa A . Por lo tanto, los núcleos más pesados formados por la fusión de dos núcleos livianos tendrán una energía de enlace mayor por nucleón que la de cualquiera de los dos núcleos originales. Pero a mayor energía de enlace corresponde menor masa de reposo (sección 28.1), y la masa de reposo perdida aparece como energía liberada.

Las reacciones que aparecen más promisorias para fines prácticos en el primer reactor de fusión son las reacciones D-D



y la reacción D-T



La serie de reacciones conocidas como *carbón* o *ciclo de Bethe* y la *protón-protón* o *ciclo de Critchfield* se cree que tienen lugar en las estrellas. Estos ciclos se ilustran en los problemas 31.11 al 31.13 y en el problema 31.18.

Problemas resueltos

31.1. ¿Cuál es la energía cinética de un neutrón térmico de 300 K?

La energía térmica de una partícula es aproximadamente kT , donde k es la constante de Boltzmann. Por lo tanto,

$$K_n \approx (8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 0.026 \text{ eV}$$

- 31.2. En los choques con protones semilibres, los neutrones pierden en promedio la mitad de su energía por choque (ver problema 31.17 para el caso de un choque *frontal*). ¿Cuántos choques en promedio, son necesarios para reducir la energía de un neutrón de 2 MeV a una energía térmica de 0.04 eV?

Si N es el número de choques, la relación entre las energías final e inicial es

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{0.04 \text{ eV}}{2 \times 10^6 \text{ eV}} = (0.5)^N \quad \text{ó} \quad (0.5)^N = 2 \times 10^{-8}$$

Tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación, se obtiene

$$(-0.301)N = -7.70 \quad \text{ó} \quad N \approx 26$$

La energía de los neutrones producidos en una fisión nuclear es aproximadamente de 2 MeV y se requiere en promedio unos 26 choques de protones para reducir la energía a niveles de energía térmica. Los neutrones térmicos tienen una gran probabilidad de producir fisiones posteriores.

- 31.3. Calcular la energía cinética final total en la fotofisión del $^{235}_{92}\text{U}$ por un rayo γ de 6 MeV en $^{90}_{36}\text{Kr}$, $^{142}_{56}\text{Ba}$, y tres neutrones.

La reacción de fisión es



De la conservación de masa-energía,

$$M_{\text{U}}c^2 + K_{\gamma} = (M_{\text{Kr}} + M_{\text{Ba}} + 3m_n)c^2 + K_f$$

ó

$$K_f = [235.043915 \text{ u} - (89.91972 \text{ u} + 141.91635 \text{ u} + 3 \times 1.008665 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) + 6 \text{ MeV} = 175.4 \text{ MeV}$$

- 31.4. En la fisión de un núcleo de $^{235}_{92}\text{U}$ inducida por neutrón es aproximadamente 185 MeV de la energía disponible liberada. Si en un reactor el $^{235}_{92}\text{U}$ genera continuamente 100 MW de potencia, ¿cuánto tiempo transcurrirá hasta la extinción total de un kg de uranio?

La rapidez de fisión correspondiente a la potencia de salida dada es

$$\left(10^8 \frac{\text{J}}{\text{s}}\right) \left(\frac{10^{-6} \text{ MeV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) \left(\frac{1 \text{ fisión}}{185 \text{ MeV}}\right) = 3.38 \times 10^{18} \frac{\text{fisiones}}{\text{s}}$$

Un kilogramo de ^{235}U contiene

$$\left(\frac{1 \text{ kg}}{235 \text{ kg/kmol}}\right) \left(6.023 \times 10^{26} \frac{\text{núcleos}}{\text{kmol}}\right) = 2.56 \times 10^{24} \text{ núcleos}$$

para obtener finalmente

$$t = \frac{2.56 \times 10^{24}}{3.38 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}} = 7.58 \times 10^5 \text{ s} = 8.78 \text{ d}$$

- 31.5. Calcular la temperatura necesaria para producir la fusión en un plasma de deuterio (una mezcla neutra de electrones cargados negativamente y núcleos de deuterio cargados positivamente).

Para una separación de 2 fm, la energía de repulsión de Coulomb entre dos deuterones es

$$E_C = \frac{ke^2}{R} = \frac{1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{2 \text{ fm}} = 0.72 \text{ MeV}$$

La energía cinética promedio en un sistema de partículas a la temperatura T es de aproximadamente kT , dando

$$E_C = kT$$

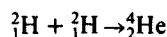
$$0.72 \text{ MeV} = (8.617 \times 10^{-11} \text{ MeV/K}) T$$

$$T = 8.35 \times 10^9 \text{ K}$$

Un análisis más detallado en el cual se tenga en cuenta la penetración de barreras muestra que la fusión empieza en unos 10^7 K .

31.6. ¿Cuál será la energía liberada si dos núcleos de deuterio se fusionan en una partícula α ?

La reacción es



La conservación de masa-energía da

$$2M_{\text{H}}c^2 = M_{\text{He}}c^2 + Q$$

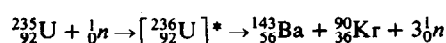
$$Q = (2M_{\text{H}} - M_{\text{He}})c^2$$

$$= (2 \times 2.014102 \text{ u} - 4.002603 \text{ u})(931.5 \text{ MeV/u}) = 23.80 \text{ MeV}$$

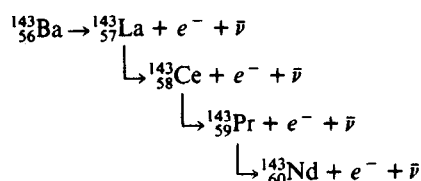
En el problema 31.5 se encontró que para iniciar el proceso de fusión se requieren unos 0.7 MeV, mientras que la energía liberada después de la fusión es de 23.8 MeV.

31.7. En un proceso secuencial el ${}^{235}_{92}\text{U}$ y un neutrón forman el núcleo compuesto $[{}^{236}_{92}\text{U}]^*$, el cual se fisiona; la fisión produce posteriores decaimientos. Si los productos de la fisión inicial son ${}^{143}_{56}\text{Ba}$ y ${}^{90}_{36}\text{Kr}$, indique el proceso que conduce al núcleo final estable.

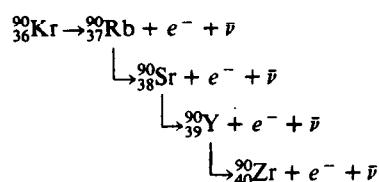
El proceso inicial es



El ${}^{143}_{56}\text{Ba}$ inicia la serie de decaimientos beta

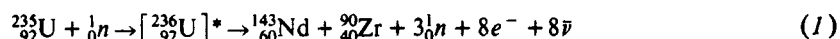


el núcleo ${}^{143}_{60}\text{Nd}$ es estable. El ${}^{90}_{36}\text{Kr}$ inicia los decaimientos beta



el núcleo ${}^{90}_{40}\text{Zr}$ es estable.

La reacción total se presenta como



31.8. Calcular la energía liberada en la reacción de fisión del problema 31.7.

Si en la ecuación (I) del problema 31.7 se utilizan las masas en reposo para calcular el valor de Q , el término $8e^-$ se cancela. Así,

$$Q = [M_U - M_{Nd} - M_{Zr} - (3 - 1)m_n]c^2 \\ = [235.043915 \text{ u} - 142.909779 \text{ u} - 89.904700 \text{ u} - 2(1.008665 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) = 197.6 \text{ MeV}$$

- 31.9. Calcular la energía de repulsión de Coulomb para los núcleos de $^{143}_{56}\text{Ba}$ y $^{90}_{36}\text{Kr}$ del problema 31.7 en el instante en que han sido formados.

En el momento de la formación se supone que los núcleos son esféricos y se encuentran en contacto. La energía de Coulomb es

$$E_c = k \frac{(Z_1 e)(Z_2 e)}{R_1 + R_2} = \frac{(ke^2)Z_1 Z_2}{r_0(A_1^{1/3} + A_2^{1/3})} = \frac{(1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm})(56)(36)}{(1.4 \text{ fm})(143^{1/3} + 90^{1/3})} = 214 \text{ MeV}$$

Esta es aproximadamente la energía liberada en la reacción, tal como se encontró en el problema 31.8.

- 31.10. Para una reacción de fusión D-T, calcular la rapidez con la cual se consumen el deuterio y el tritio para producir 1 MW. (Suponga que toda la energía producida en la reacción de fusión es disponible.)

En la reacción D-T, $^3_1\text{H}(d, n)^4_2\text{He}$, la energía liberada en cada fusión es $Q = 17.6 \text{ MeV}$ (problema 31.14). La rapidez con la cual se efectúan las reacciones es

$$R = \left(1 \times 10^6 \frac{\text{J}}{\text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}}\right) \left(\frac{1 \text{ reacción}}{17.6 \times 10^6 \text{ eV}}\right) = 3.55 \times 10^{17} \frac{\text{reacciones}}{\text{s}}$$

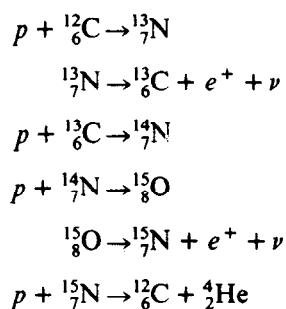
En cada reacción se ha gastado un átomo de deuterio y uno de tritio. Por lo tanto, para un deuterio ($A = 2$):

$$-\frac{dm}{dt} = \left(3.55 \times 10^{17} \frac{\text{átomos}}{\text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ kmol}}{6.023 \times 10^{26} \text{ átomos}}\right) \left(\frac{2 \text{ kg}}{1 \text{ kmol}}\right) = 1.18 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

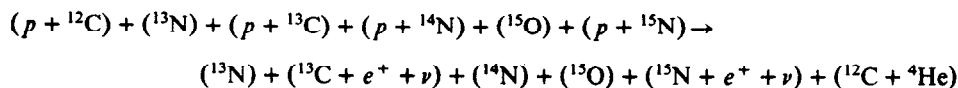
y para el tritio ($A = 3$):

$$-\frac{dm}{dt} = \frac{3}{2} \left(1.18 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{s}}\right) = 1.77 \times 10^{-9} \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

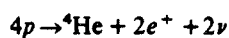
- 31.11. Calcular la energía total liberada en el siguiente ciclo de carbón (Bethe):



En vez de encontrar la energía liberada en cada reacción, podemos sumar todas las reacciones juntas para obtener



Después de cancelar los términos comunes en ambos lados, se obtiene



Así, todas las reacciones son equivalentes a la fusión de cuatro protones en un núcleo de helio. Aplicando la conservación de masa-energía, obtenemos

$$\begin{aligned} 4(M_{\text{H}} - m_e)c^2 &= (M_{\text{He}} - 2m_e)c^2 + 2m_e c^2 + Q \\ Q &= (4M_{\text{H}} - M_{\text{He}} - 4m_e)c^2 \\ &= [4(1.007825 \text{ u}) - 4.002603 \text{ u} - 4(0.000549 \text{ u})](931.5 \text{ MeV/u}) = 24.69 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Se ve que los átomos de carbón actúan como una especie de catalizador, ya que es regenerado al final de cada ciclo de carbón.

- 31.12.** Calcular la energía liberada por cada kilogramo de hidrógeno que se consume en el ciclo del problema 31.11.

Del ciclo equivalente $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu$ se ve que 24.69 MeV de energía es liberada por cada cuatro protones que se consumen; por lo tanto,

$$\frac{24.69 \text{ MeV}}{4 \text{ protones}} \times \frac{1 \text{ protón}}{1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.69 \times 10^{27} \frac{\text{MeV}}{\text{kg}}$$

ó $5.90 \times 10^{14} \text{ J/kg}$.

- 31.13.** Se calcula que el ciclo de carbón del problema 31.12 libera una potencia aproximada de $4 \times 10^{26} \text{ W}$. Calcular la rapidez a la cual se consume el hidrógeno.

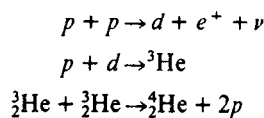
$$\left(4 \times 10^{26} \frac{\text{J}}{\text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ kg hidrógeno}}{5.90 \times 10^{14} \text{ J}}\right) = 6.8 \times 10^{11} \frac{\text{kg hidrógeno}}{\text{s}}$$

Como dato comparativo, obsérvese que la masa del Sol es de aproximadamente $2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

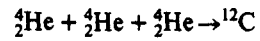
Problemas suplementarios

Las masas atómicas se encuentran tabuladas en el apéndice.

- 31.14.** Calcular el valor de Q para la reacción de fusión D-T, ${}^2_1\text{H}(d, n){}^3_2\text{He}$. *Resp.* 17.6 MeV
- 31.15.** Calcular los valores de Q para las reacciones D-D (a) ${}^2_1\text{H}(d, n){}^3_2\text{He}$, (b) ${}^2_1\text{H}(d, p){}^3_1\text{H}$.
Resp. (a) 3.27 MeV; (b) 4.03 MeV
- 31.16.** Con relación al problema 31.14, ¿cuál es la potencia de salida de un reactor de ${}^{235}_{92}\text{U}$ si gasta 30 días para consumir 2 kg de combustible? *Resp.* 62.5 MW.
- 31.17.** Utilizando los resultados del problema 30.16, hallar la energía cinética que tendría un neutrón de 2 MeV después de sufrir un choque frontal con un protón semilibre en reposo. *Resp.* 0.347 eV
- 31.18.** Demostrar la equivalencia del siguiente ciclo protón-protón (Critchfield) al ciclo de carbón del problema 31.11:



- 31.19. Calcular la energía liberada en el proceso de fusión



Resp. 7.27 MeV.

- 31.20. Considere la serie de reacciones semejantes a la del problema 31.11, pero con p y ${}^{14}_7\text{N}$ como elementos iniciales. Si los núcleos intermedios formados son ${}^{13}_8\text{O}$, ${}^{13}_7\text{N}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{17}_9\text{F}$, y ${}^{17}_8\text{O}$, encuentre las reacciones que resultan de la regeneración del ${}^{14}_7\text{N}$ y dé la reacción total. *Resp.* $4p \rightarrow {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu$ (total).

Capítulo 32

Partículas elementales

32.1 GENEALOGIA DE LAS PARTICULAS ELEMENTALES

En la actualidad se han detectado experimentalmente más de 30 *partículas elementales y antipartículas* de larga vida. Una antipartícula tiene la misma masa y el mismo spin que su partícula asociada, pero las propiedades electromagnéticas, tales como la carga y el momento magnético de la partícula son opuestas a las de la antipartícula. La lista de partículas se encuentra en la tabla 32-1, en la cual aparecen algunas de sus propiedades. Además de estas partículas, se han observado a partir de 1963, unas 50 *resonancias*. A diferencia de la relativa estabilidad de las partículas elementales (tiempo de vida medio $T_m \gg 10^{-21}$ s), una resonancia tendrá un tiempo extremadamente corto con $T_m < 10^{-21}$ s. Como se muestra en la tabla 32-1, las partículas

Tabla 32-1*

	Partícula (Antipartícula)	Masa en repo- so, MeV	Tiempo de vida medio de la partícula, s	Número de carga \mathcal{Q}	Spin	Número Leptónico \mathcal{L}_e \mathcal{L}_μ		Número Bariónico \mathcal{B}	Extrañeza \mathcal{S}
Bosones sin masa	γ (γ)	0	estable	0	1				
Leptones	ν_e ($\bar{\nu}_e$)	0	estable	0 (0)	1/2	+ 1 (-1)			
	ν_μ ($\bar{\nu}_\mu$)	0	estable	0 (0)	1/2		+ 1 (-1)		
	e^- (e^+)	0.511	estable	-1 (+1)	1/2	+ 1 (-1)			
	μ^- (μ^+)	105.7	2.2×10^{-6}	-1 (+1)	1/2		+ 1 (-1)		
Mesones	π^+ (π^-)	139.6	2.6×10^{-8}	+1 (-1)	0				0 (0)
	π^0 (π^0)	135.0	0.8×10^{-16}	0	0				0 (0)
	π^- (π^+)	139.6	2.6×10^{-8}	-1 (+1)	0				0 (0)
	K^+ (K^-)	493.7	1.2×10^{-8}	+1 (-1)	0				+1 (-1)
	K^0 (\bar{K}^0)	497.7	8.8×10^{-11}	0 (0)	0				+1 (-1)
	\bar{K}^0 (K^0)	497.7	5.2×10^{-8}	0 (0)	0				-1 (+1)
	K^- (K^+)	493.7	1.2×10^{-8}	-1 (+1)	0				-1 (+1)
	η^0 (η^0)	549	2.5×10^{-19}	0	0				0 (0)
Bariones	p (\bar{p})	938.3	estable	+1 (-1)	1/2			+1 (-1)	0 (0)
	n (\bar{n})	939.6	932	0 (0)	1/2			+1 (-1)	0 (0)
	Λ^0 ($\bar{\Lambda}^0$)	1116	2.5×10^{-10}	0 (0)	1/2			+1 (-1)	-1 (+1)
	Σ^+ ($\bar{\Sigma}^-$)	1189	8.0×10^{-11}	+1 (-1)	1/2			+1 (-1)	-1 (+1)
	Σ^0 ($\bar{\Sigma}^0$)	1192	10^{-14}	0 (0)	1/2			+1 (-1)	-1 (+1)
	Σ^- ($\bar{\Sigma}^+$)	1197	1.5×10^{-10}	-1 (+1)	1/2			+1 (-1)	-1 (+1)
	Ξ^0 ($\bar{\Xi}^0$)	1315	3.0×10^{-10}	0 (0)	1/2			+1 (-1)	-2 (+2)
	Ξ^- ($\bar{\Xi}^+$)	1321	1.7×10^{-10}	-1 (+1)	1/2			+1 (-1)	-2 (+2)
	Ω^- ($\bar{\Omega}^+$)	1672	1.3×10^{-10}	-1 (+1)	3/2			+1 (-1)	-3 (+3)

* Adaptado de Thomas G. Trippe, et al., *Rev. Mod. Phys.*, **48**:2, Part II (1976).

elementales se agrupan en cuatro familias. La clasificación se origina principalmente del spin, la masa y el tipo de interacción de la partícula, de acuerdo con el esquema de la tabla 32-2.

Tabla 32-2

Familia	Spin	Masa (m_e = masa de electrón)	Tipo de interacción
Bosones sin masa	Entero	0	Electromagnética, Gravitacional
Leptones	Semientero	$0 \leq M < 207m_e$	Débil, Electromagnética
Mesones	Entero	$273m_e < M < 1075m_e$	Fuerte, Débil, Electromagnética, Gravitacional
Bariones	Semientero	$1836m_e < M$	Fuerte, Débil, Electromagnética, Gravitacional

32.2 INTERACCION DE PARTICULAS

La tabla 32-2 muestra que, además, de las conocidas interacciones gravitacionales y magnéticas, existen otros dos tipos de fuerzas denominadas *interacción fuerte* y *débil*, por medio de las cuales las partículas pueden interactuar unas con otras.

La fuerza que mantiene unidos los nucleones en el núcleo constituye un ejemplo de interacción fuerte. Puesto que los protones están ligados dentro de un núcleo, la interacción fuerte debe ser mucho mayor que la interacción electromagnética que tiende a separar los protones. Además, se ha encontrado que la interacción fuerte no depende de la carga del cuerpo. Como ejemplo de interacción fuerte se tiene

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n$$

Las interacciones débiles se requieren para explicar cómo un neutrino interactúa con la materia nuclear. Puesto que un neutrino carece de masa y no es portador de carga, no puede sufrir interacciones de tipo gravitacional o electromagnética. Y como el neutrino no es un nucleón, no participará en interacciones fuertes. Como ejemplo de la interacción débil se tiene

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$$

Tanto las intensidades de las interacciones como los tiempos de decaimiento (tiempos de vida después del decaimiento) de las partículas elementales se caracterizan por *constantes de acoplamiento* adimensionales. A energías bajas, mientras mayor sea la constante de acoplamiento, más fuerte será la interacción y menor el tiempo de vida. Para la interacción electromagnética la constante de acoplamiento es

$$\frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$$

y los tiempos de vida media para los decaimientos electromagnéticos son de aproximadamente 10^{-16} s. Para interacciones fuertes, la constante de acoplamiento es $g^2/\hbar c \approx 13$ (g es la constante que aparece en la teoría de Yukawa) y los decaimientos fuertes tienen tiempos de vida de unos 10^{-23} s. La constante de acoplamiento para interacciones débiles es 3×10^{-12} y los decaimientos débiles tienen tiempos de vida medio de unos 10^{-8} s. La constante de acoplamiento gravitacional, $Gm^2/\hbar c$, donde m la masa nuclear, es aproximadamente 10^{-40} . Todas las partículas anotadas en la tabla 32-1 tienen tiempos de vida largos, comparados con el tiempo de vida medio para los decaimientos fuertes que es de unos 10^{-23} s.

32.3 LEYES DE CONSERVACION

Todas las reacciones de las partículas elementales y los decaimientos obedecen a ciertas leyes de conservación y reglas de selección. Entre ellas se incluyen las conocidas leyes de conservación de:

- (a) Masa-energía

- (b) Momentum lineal
- (c) Momentum angular (spin)
- (d) Carga

leyes que se cumplen si el proceso se efectúa a través de una interacción fuerte, débil o electromagnética.

La última de estas leyes de conservación difiere de las otras en que no solamente la carga se conserva sino que también está cuantizada en unidades de e , que es la magnitud de la carga del electrón. La conservación de la cuantización de la carga puede expresarse mediante el *número cuántico de carga* $\mathcal{Q} = \text{carga}/e$, para cada partícula. En una reacción, los valores inicial y final de \mathcal{Q} total deben ser iguales. Por ejemplo, en la producción de antiprotones.

$$\begin{array}{l} p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p} \\ \mathcal{Q}: \quad +1 + 1 = +1 + 1 + 1 - 1 \end{array}$$

32.4 CONSERVACION DE LEPTONES

Se ha encontrado que las leyes de conservación o reglas de selección se cumplen para otros números cuánticos. Un *número leptónico* se define como $\mathcal{L} = +1$ para partículas leptónicas, $\mathcal{L} = -1$ para antipartículas leptónicas y $\mathcal{L} = 0$ para todas las demás partículas. Los números leptónicos para los electrones y sus neutrones asociados (ν_e), y también los números leptónicos para mesones μ y sus neutrinos asociados (ν_μ) se conservan por separado en todos los procesos. Ejemplos de conservación de leptones son:

$$\begin{array}{l} \mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \\ \mathcal{L}_\mu: \quad +1 = 0 + 0 + 1 \\ \mathcal{L}_e: \quad 0 = +1 - 1 + 0 \\ K^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ \mathcal{L}_e: \quad 0 = 0 + 1 - 1 \end{array}$$

32.5 CONSERVACION DE BARIONES

En forma análoga, un *número bariónico*, \mathcal{B} , puede definirse como $+1$ para partículas bariónicas, -1 para antipartículas bariónicas y 0 para todas las demás partículas. El número bariónico total se conserva en toda reacción o decaimiento. Ejemplos de esta ley de conservación son

$$\begin{array}{l} n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \\ \mathcal{B}: \quad +1 = +1 + 0 + 0 \\ K^- + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+ + \pi^- \\ \mathcal{B}: \quad 0 + 1 = +1 + 0 + 0 \end{array}$$

32.6 CONSERVACION DEL SPIN ISOTOPICO

La tabla 32-1 muestra que los mesones y bariones aparecen en *grupos* o *multiplete*, de masa igual; las partículas en un grupo determinado difieren respecto de su carga. Por ejemplo, los tres piones (π^+ , π^0 , π^-) tienen todos una masa de aproximadamente 140 MeV y los dos nucleones (n , p) tienen una masa de aproximadamente 940 MeV.

Los mesones y bariones interactúan unos con otros por medio de interacciones fuertes. Debido a la independencia de carga de la interacción formada, todas las partículas de un grupo deberían tener una interacción fuerte con otra partícula de igual manera; sin embargo, la interacción electromagnética (muy débil) produce pequeñas diferencias. Esta independencia de carga ha conducido a la introducción de otro número cuántico denominado el *spin isotópico*, I , definido de tal manera que $2I + 1$ tiene el número de partículas en un determinado multiplete. Así, para los piones $I = 1$ y para los nucleones $I = \frac{1}{2}$.

Del mismo modo que para el momentum angular, el spin isotópico se trata como vector, cuya magnitud es $\sqrt{I(I+1)}$. Sin embargo, a diferencia del momentum angular, el spin isotópico es una cantidad adimensional. La componente en z del spin isotópico, m_I , está cuantizada de acuerdo con

$$m_I = I, I-1, \dots, -I \quad (32.1)$$

Cada partícula del multiplete corresponde a un valor de m_I , cuyos valores están organizados en orden descendente de carga. Así, para los piones $m_I = +1, 0, -1$ que corresponden respectivamente a π^+ , π^0 , π^- , y para los nucleones $m_I = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ valores correspondientes al protón y al neutrón, respectivamente. Los multipletes de antipartículas tienen el mismo spin isotópico que los correspondientes de partículas, pero el valor de m_I para una antipartícula tiene el correspondiente al m_I de la partícula con signo negativo. En la tabla 32-3 se encuentran los valores de I y de m_I para los mesones y bariones.

Tabla 32-3

Bariones	$I \backslash m_I$					
		1	1/2	0	-1/2	-1
940 MeV	1/2		p		n	
1110 MeV	0			Λ^0		
1190 MeV	1	Σ^+		Σ^0		Σ^-
1320 MeV	1/2		Ξ^0		Ξ^-	
1670 MeV	0			Ω^-		
Mesones						
138 MeV	1	π^+		π^0		π^-
496 MeV	1/2		K^+		K^0	
549 MeV	0			η^0		

En toda interacción fuerte el spin isotópico (sumado como vector) se conserva. Para el caso de dos partículas $I = I_1 + I_2$, la componente en las direcciones del eje z de la resultante de I está dada por

$$m_I = m_{I_1} + m_{I_2} \quad (32.2)$$

y los valores permitidos de I están dados por

$$I = I_1 + I_2, I_1 + I_2 - 1, I_1 + I_2 - 2, \dots \quad (32.3)$$

la secuencia que termina en $|I_1 - I_2|$ ó $|m_I|$, por ejemplo, en la reacción fuerte

$$\pi_0 + p \rightarrow \pi^+ + n$$

tenemos para los elementos que reaccionan

$$m_I = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad I = 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

y para los productos

$$m_I = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad I = 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

Se ha encontrado posteriormente que en toda interacción fuerte y proceso electromagnético la componente z del spin isotópico se conserva. El ejemplo anterior ilustra esta ley de conservación.

Debe notarse que las leyes de conservación para el spin isotópico no son aplicables a las interacciones débiles. Por ejemplo, en un decaimiento débil

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 \\ m_I: & -\frac{1}{2} \neq 0 + 0 \\ I: & \frac{1}{2} \neq 2, 1, 0 \end{aligned}$$

por lo tanto, ninguno de los dos m_I ó I se conserva.

32.7 CONSERVACION DE LA EXTRAÑEZA

Experimentalmente se ha encontrado que los mesones K —y los bariones Λ , Σ , Ξ , y Ω (nos referimos a este grupo como los hiperones)— se producen siempre en pares en las interacciones fuertes, fenómeno denominado *producción asociada*. Los tiempos de vida de estas partículas son mucho mayores que 10^{-23} s, indicando que no decaen mediante interacciones fuertes (lo cual era de esperarse). Para explicar este “extraño” fenómeno, se ha introducido un nuevo número cuántico, la *extrañeza*, S . En la tabla 32-1 aparecen con $S \neq 0$ las partículas denominadas *extrañas*. Se ha encontrado que la *extrañeza total* (sumada como escalar) *se conserva en las reacciones fuertes y en las electromagnéticas* (o decaimiento). Para las interacciones débiles se encuentra que $\Delta S = 0, \pm 1$. Aunque esta segunda condición no es una ley de conservación, prohíbe ciertas reacciones y, por lo tanto, constituye una *regla de selección*.

Como ejemplo de la conservación de la extrañeza en una interacción fuerte se tiene

$$\pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+$$

$$S: \quad 0 + 0 = -1 + 1$$

mientras que en un decaimiento débil

$$\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p$$

$$S: \quad -1 \neq 0 + 0$$

la extrañeza no se conserva, pero sí satisface la regla de selección de las partículas extrañas ($\Delta S = +1$).

La extrañeza de una partícula puede expresarse en función de su carga, de su número bariónico y de su componente z del spin isotópico.

$$S = m_I + \frac{1}{2}(B + S) \quad (32.4)$$

Con esta definición la extrañeza de una partícula será un número entero y la extrañeza de una antipartícula tendrá signo opuesto al de su partícula asociada.

32.8 CONSERVACION DE PARIDAD

Como complemento debemos mencionar otra cantidad denominada *paridad*, que se conserva en una reacción siempre y cuando la imagen especular de la reacción (incluyendo las antipartículas) también se cumpla. *La paridad se conserva en las interacciones fuertes y en las electromagnéticas, pero no en las interacciones débiles.*

32.9 PARTICULAS DE VIDA CORTA Y RESONANCIAS

Debido a que su tiempo de vida es extremadamente corto, las partículas, tales como los π^0 y los η^0 ($T_m < 10^{-16}$ s) y la resonancia ($T_m < 10^{-21}$ s) no dejan huellas observables en instrumentos, tales como la cámara de burbujas. Su existencia se infiere por medio de mediciones de energías y momenta de los productos finales del decaimiento y reestudiando hacia atrás las leyes de conservación para ver si los resultados obtenidos en mediciones concuerdan con la suposición de la existencia de las partículas intermedias no observables. Por ejemplo, en el decaimiento K^+ , lo que se observa es una partícula π^+ y dos rayos γ , por lo tanto, debemos convenir en que el esquema del decaimiento es

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + 2\gamma$$

Sin embargo, se encuentra experimentalmente que en el sistema de centro de masa la partícula π^+ es monoenergética (ver problema 32.22). Este hecho descarta el decaimiento de una partícula triple (que estaría asociada con una *distribución* de energía de π^+ , ver sección 29.5). El decaimiento correcto es

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad 2\gamma$$

Problemas resueltos

- 32.1. Una partícula K^+ de 150 MeV decae en $2\pi^+ + \pi^-$. Las mediciones graficadas en una emulsión fotográfica dan las energías cinéticas del π^+ con 68.6 MeV y 80.8 MeV y la de los π^- con 75.5 MeV. Hallar el valor de Q para la reacción y la masa del K^+ .

La reacción es $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$, por lo tanto

$$Q = K_{\pi^+} + K_{\pi^+} + K_{\pi^-} - K_{K^+} = 68.6 \text{ MeV} + 80.8 \text{ MeV} + 75.5 \text{ MeV} - 150 \text{ MeV} = 74.9 \text{ MeV}$$

De $Q = (m_{K^+} - 2m_{\pi^+} - m_{\pi^-})c^2$ obtenemos

$$m_{K^+}c^2 = Q + (2m_{\pi^+} + m_{\pi^-})c^2 = 74.9 \text{ MeV} + 3(139.6 \text{ MeV}) = 493.7 \text{ MeV}$$

- 32.2. Dar los valores posibles del spin isotópico y de su componente en z para los siguientes sistemas de partículas: (a) $\pi^+ + p$, (b) $\pi^- + p$.

(a) Para π^+ , $I = 1$, $m_I = 1$, y para p , $I = \frac{1}{2}$, $m_I = \frac{1}{2}$; por lo tanto, el valor total de m_I es $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. De la ecuación (32.3) el único valor posible del spin isotópico es

$$I = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(b) Para π^- , $I = 1$, $m_I = -1$, y para p , $I = \frac{1}{2}$, $m_I = \frac{1}{2}$; con lo cual el valor total de m_I es $-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. De la ecuación (32.3) surgen dos valores posibles del spin isotópico total:

$$I = 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

- 32.3. En las siguientes reacciones, ¿cuáles son las posibles partículas que satisfacen las condiciones de la reacción para X ? (Todas las reacciones son fuertes.)

$$(a) \quad \bar{K}^- + p \rightarrow K^+ + X$$

$$(b) \quad \pi^- + p \rightarrow K^0 + X$$

$$(c) \quad p + p \rightarrow \pi^+ + n + \Lambda^0 + X$$

Las leyes de conservación para cada una de las reacciones dan:

(a)	número de carga:	$-1 + 1 = +1 + \mathcal{Q}$	ó	$\mathcal{Q} = -1$
	número leptónico:	$0 + 0 = 0 + \mathcal{L}$		$\mathcal{L} = 0$
	número bariónico:	$0 + 1 = 0 + \mathcal{B}$		$\mathcal{B} = 1$
	extrañeza:	$-1 + 0 = +1 + \mathcal{S}$		$\mathcal{S} = -2$
	componente en z del spin isotópico:	$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = +\frac{1}{2} + m_I$		$m_I = -\frac{1}{2}$

Estas propiedades se cumplen cuando X es una partícula Ξ^- .

(b)	número de carga:	$-1 + 1 = 0 + \mathcal{Q}$	ó	$\mathcal{Q} = 0$
	número leptónico:	$0 + 0 = 0 + \mathcal{L}$		$\mathcal{L} = 0$
	número bariónico:	$0 + 1 = 0 + \mathcal{B}$		$\mathcal{B} = +1$
	extrañeza:	$0 + 0 = 1 + \mathcal{S}$		$\mathcal{S} = -1$
	componente en z del spin isotópico:	$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + m_I$		$m_I = 0$

Estas propiedades se cumplen cuando X es una partícula Σ^0 ó una partícula Λ^0 .

(c) número de carga: $+1 + 1 = +1 + 0 + 0 + \mathcal{Q}$ $\mathcal{Q} = +1$
 número leptónico: $0 + 0 = 0 + 0 + 0 + \mathcal{L}$ $\mathcal{L} = 0$
 número bariónico: $+1 + 1 = 0 + 1 + 1 + \mathcal{B}$ $\mathcal{B} = 0$
 extrañeza: $0 + 0 = 0 + 0 - 1 + \mathcal{S}$ $\mathcal{S} = +1$
 componente en z del
 spin isotópico: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} + 0 + m_I$ $m_I = +\frac{1}{2}$

Estas propiedades se cumplen cuando X es un mesón K^+ .

32.4. En las siguientes parejas de reacciones, determine en cada caso cual de ellas es posible.

(a) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \eta^0$
 $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$ (interacción fuerte)

(b) $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + \eta$
 $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + p$ (decaimiento débil)

(c) $p + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$
 $p + p \rightarrow K^+ + p + \Lambda^0$ (interacción fuerte)

(d) $\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$
 $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0$ (interacción fuerte)

(e) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$
 $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (decaimiento débil)

Las reacciones marcadas con "no" en la última columna de la tabla 32-4 no violan leyes de conservación aplicables y, por lo tanto, son posibles.

Tabla 32-4

Parejas de reacción	Número de carga (\mathcal{Q})	Número leptónico (\mathcal{L}_e)	Número bariónico (\mathcal{B})	Extrañeza (\mathcal{S})	Componente en z del spin isotópico (m_I)	Leyes de conservación violadas
(a) $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \eta^0$ $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$	$-1 + 1 = 0 + 0$ $-1 + 1 = 0 + 0$	$0 + 0 = 0 + 0$ $0 + 0 = 0 + 0$	$0 + 1 = 1 + 0$ $0 + 1 = 1 + 0$	$0 + 0 \neq -1 + 0$ $0 + 0 = -1 + 1$	$-1 + \frac{1}{2} \neq 0 + 0$ $-1 + \frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2}$	\mathcal{S}, m_I no
(b) $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + n$ $\Sigma^- \rightarrow \pi^- + p$	$-1 = -1 + 0$ $-1 \neq -1 + 1$	$0 + 0 = 0 + 0$ $0 + 0 = 0 + 0$	$1 = 0 + 1$ $1 = 0 + 1$	(no aplicable)	(no aplicable)	no \mathcal{Q}
(c) $p + p \rightarrow K^+ + \Sigma^+$ $p + p \rightarrow K^+ + p + \Lambda^0$	$1 + 1 = 1 + 1$ $1 + 1 = 1 + 1 + 0$	$0 + 0 = 0 + 0$ $0 + 0 = 0 + 0$	$1 + 1 \neq 0 + 1$ $1 + 1 = 0 + 1 + 1$	$0 + 0 = 1 - 1$ $0 + 0 = 1 + 0 - 1$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} + 1$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0$	\mathcal{B}, m_I no
(d) $\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$ $\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + \Lambda^0$	$-1 + 1 = 0 + 0$ $-1 + 1 = 0 + 0$	$0 + 0 = 0 + 0$ $0 + 0 = 0 + 0$	$0 + 1 = 1 + 0$ $0 + 1 = 0 + 1$	$0 + 0 = 0 + 0$ $0 + 0 \neq 0 - 1$	$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 0$ $-1 + \frac{1}{2} \neq 0 + 0$	no \mathcal{S}, m_I
(e) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$ $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$	$0 = +1 - 1 + 0$ $0 = +1 - 1 + 0$	$0 \neq 0 + 1 + 1$ $0 = 0 + 1 - 1$	$0 = 0 + 0 + 0$ $0 = 0 + 0 + 0$	(no aplicable)	(no aplicable)	\mathcal{L} no

32.5. Explique por qué el decaimiento $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ es observado, mientras que en $\Sigma^0 \rightarrow p + \pi^-$ ó $\Sigma^0 \rightarrow n + \pi^0$ no lo son.

En el decaimiento

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

$$\mathcal{S}: -1 = -1 + 0$$

se conserva la extrañeza y el tiempo de vida del Σ^0 ($\approx 10^{-14}$ s) indica que decae mediante un proceso electromagnético rápido y no mediante una interacción lenta débil (tiempo de vida $\approx 10^{-10}$ s). Los decaimientos

$$\Sigma^0 \rightarrow p + \pi^-$$

$$\mathcal{S}: -1 \neq 0 + 0 \quad (\Delta\mathcal{S} = +1)$$

$$\Sigma^0 \rightarrow n + \pi^0$$

$$\mathcal{S}: -1 \neq 0 + 0 \quad (\Delta\mathcal{S} = +1)$$

serían débiles, debido a que la extrañeza varía.

- 32.6. La figura 32-1 muestra dos trayectorias obtenidas mediante una cámara de burbujas (un campo magnético apunta perpendicularmente al plano del papel alejándose del lector). Identifique las partículas neutras desconocidas (línea de puntos).

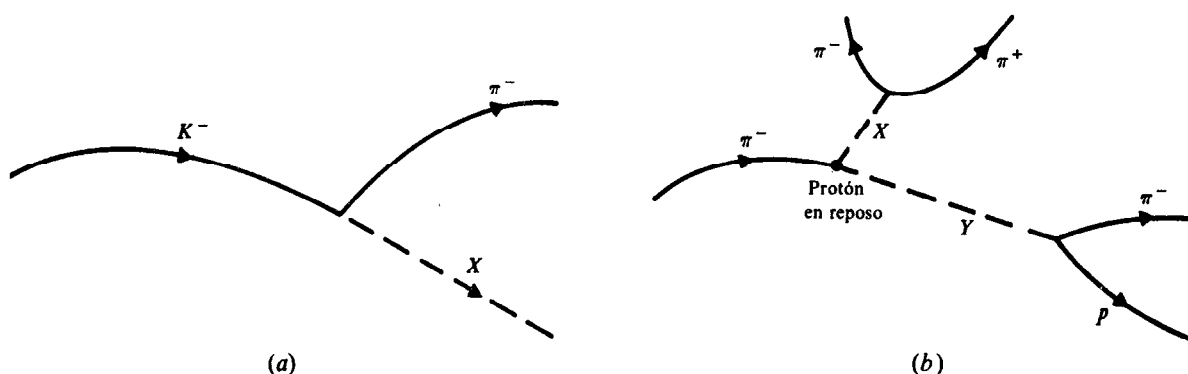


Fig. 32-1

- (a) La reacción es $K^- \rightarrow \pi^- + X$. Las leyes de conservación que deben cumplirse son

$$\begin{aligned} \text{spin:} & \quad 0 = 0 + \mathcal{S} \\ \text{número leptónico:} & \quad 0 = 0 + \mathcal{L} \\ \text{número bariónico:} & \quad 0 = 0 + \mathcal{B} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathcal{S} = \mathcal{L} = \mathcal{B} = 0$. De la tabla 32-1 se ve que la partícula desconocida es un mesón sin carga, que bien puede ser π^0 , K^0 , \bar{K}^0 , ó η^0 . Puesto que la masa en reposo del núcleo padre K^- debe ser mayor que la suma de las masas de las hijas ($Q > 0$ para un decaimiento espontáneo) no queda más posibilidad para X que la de ser un mesón π^0 .

- (b) El decaimiento de la partícula X es $X \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Las leyes de conservación aplicadas a este decaimiento establecen que

$$\begin{aligned} \text{spin:} & \quad \mathcal{S} = +1 - 1 = 0 \\ \text{número leptónico:} & \quad \mathcal{L} = 0 + 0 = 0 \\ \text{número bariónico:} & \quad \mathcal{B} = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Como en la parte (a), la partícula desconocida es un π^0 , K^0 , \bar{K}^0 ó un η^0 . En esta ocasión, con $Q > 0$ se descarta la posibilidad de un mesón π^0 . El tiempo de vida del mesón η^0 es demasiado corto ($T_m < 10^{-18}$ s), por lo tanto su trayectoria no es observable en el diagrama. Por lo tanto, la partícula X puede ser solamente un mesón K^0 ó un mesón \bar{K}^0 . La escogencia correcta se hará una vez determinada la partícula Y .

El decaimiento de la partícula Y es $Y \rightarrow \pi^- + p$. Aplicando las leyes de conservación a este decaimiento se tiene

$$\begin{aligned} \text{spin:} & \quad \mathcal{S} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \text{número leptónico:} & \quad \mathcal{L} = 0 + 0 = 0 \\ \text{número bariónico:} & \quad \mathcal{B} = 0 + 1 = +1 \end{aligned}$$

Para estas propiedades, en la tabla 32-1 se encuentra que la partícula Y es un barión sin carga, que bien puede ser un n , Λ^0 , Σ^0 , ó Ξ^0 . De estas posibilidades excluimos el neutrón, puesto que la masa del núcleo padre debe ser mayor que la suma de las masas de las hijas. Sabemos que $\Delta S = 0, \pm 1$, puesto que Y decae débilmente; como $\pi^- + p$ tiene $S = 0$, sabemos que la partícula Y tiene $S = 0, \pm 1$, con lo cual se descarta el Ξ^0 . Del problema 32.5 vemos que el decaimiento de Σ^0 es

$$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$$

por lo tanto, la partícula Y debe ser Λ^0 , que tiene $S = -1$ e $I = m_I = 0$.

Para encontrar X volvemos a la reacción de interacción fuerte inicial, que puede ser

$$\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$$

$$S: 0 + 0 = 1 - 1$$

ó

$$\pi^- + p \rightarrow \bar{K}^0 + \Lambda^0$$

$$S: 0 + 0 \neq -1 - 1$$

La segunda reacción no conserva la extrañeza, por lo tanto, \bar{K}^0 debe descartarse, quedando finalmente para X la posibilidad de ser un mesón K^0 .

32.7. Una partícula Σ^0 decae en reposo en una partícula Λ^0 . Calcular la energía del fotón liberado.

La reacción es $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$. De la conservación de momentum y utilizando la relación relativista $E^2 = (pc)^2 + (m_0c^2)^2$,

$$p_\Lambda = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}$$

$$p_\Lambda^2 c^2 = E_\Lambda^2 - (M_\Lambda c^2)^2 = E_\gamma^2 \quad (1)$$

De la conservación de energía tenemos

$$M_\Sigma c^2 = E_\Lambda + E_\gamma \quad \text{ó} \quad E_\Lambda^2 = (M_\Sigma c^2)^2 + E_\gamma^2 - 2M_\Sigma c^2 E_\gamma \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) combinadas se obtiene

$$E_\gamma = \frac{(M_\Sigma c^2)^2 - (M_\Lambda c^2)^2}{2M_\Sigma c^2} = \frac{(1192 \text{ MeV})^2 - (1116 \text{ MeV})^2}{2(1192 \text{ MeV})} = 73.6 \text{ MeV}$$

32.8. Calcular las energías de los productos de la reacción

$$\pi^- + p \rightarrow n + \pi^0$$

si el π^- y el p están inicialmente en reposo.

De la conservación del momentum,

$$p_n = p_{\pi^0} \quad \text{ó} \quad (p_n c)^2 = (p_{\pi^0} c)^2 \quad (1)$$

Utilizando la relación relativista entre energía y momentum para cada uno de los productos finales, obtenemos

$$E_n^2 = E_{0n}^2 + (p_n c)^2 \quad E_{\pi^0}^2 = E_{0\pi^0}^2 + (p_{\pi^0} c)^2$$

Restando estas ecuaciones y reemplazando en (1), se llega a

$$E_n^2 - E_{\pi^0}^2 = E_{0n}^2 - E_{0\pi^0}^2 = (939.6 \text{ MeV})^2 - (135.0 \text{ MeV})^2 = 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2$$

ó

$$(E_n + E_{\pi^0})(E_n - E_{\pi^0}) = 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2 \quad (2)$$

De la conservación de energía

$$E_n + E_{\pi^0} = E_{0n} + E_{0p} = 139.6 \text{ MeV} + 938.3 \text{ MeV} = 1007.9 \text{ MeV} \quad (3)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (2), encontramos

$$\begin{aligned}(1077.9 \text{ MeV})(E_n - E_{\pi^0}) &= 8.646 \times 10^5 (\text{MeV})^2 \\ E_n - E_{\pi^0} &= 802.1 \text{ MeV}\end{aligned}\quad (4)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3) y (4), tenemos

$$E_n = 940.0 \text{ MeV} \quad E_{\pi^0} = 137.9 \text{ MeV}$$

de donde

$$\begin{aligned}K_n &= E_n - E_{0n} = 940.0 \text{ MeV} - 939.6 \text{ MeV} = 0.4 \text{ MeV} \\ K_{\pi^0} &= E_{\pi^0} - E_{0\pi^0} = 137.9 \text{ MeV} - 135 \text{ MeV} = 2.9 \text{ MeV}\end{aligned}$$

32.9. Calcular la energía umbral para la reacción de alta energía

$$m_1 + m_2 \rightarrow M_1 + M_2 + \dots + M_n$$

si el blanco, m_2 , está fijo.

Los cálculos deben efectuarse teniendo en cuenta efectos relativistas. En el sistema de laboratorio, donde m_2 está en reposo,

$$E_{\text{lab}} = (m_1 c^2 + K_1) + m_2 c^2 \quad (1)$$

En el sistema de centro de masa el momentum total es cero y a la energía umbral todas las partículas finales son producidas en reposo. Por lo tanto,

$$E_{\text{cm}} = (M_1 + M_2 + \dots + M_n) c^2 \quad (2)$$

La cantidad $E^2 - (pc)^2$ es invariante para un sistema de partículas, donde E es la suma de las energías de las partículas y p es la magnitud del vector suma de los momenta de la partícula. Puesto que el momentum total en el sistema de laboratorio es el momentum del proyectil m_1 ,

$$\begin{aligned}E_{\text{lab}}^2 - (p_1 c)^2 &= E_{\text{cm}}^2 \\ [(m_1 c^2 + K_1) + m_2 c^2]^2 - (p_1 c)^2 &= [(M_1 + M_2 + \dots + M_n) c^2]^2\end{aligned}\quad (3)$$

Para la partícula m_1 , se cumple también que,

$$(p_1 c)^2 = E_1^2 - (m_1 c^2)^2 = (K_1 + m_1 c^2)^2 - (m_1 c^2)^2 \quad (4)$$

Eliminando el término $(p_1 c)^2$ de las ecuaciones (3) y (4), se obtiene una ecuación lineal para K_1 , cuya solución es

$$\begin{aligned}K_u = K_1 &= -\frac{1}{2m_2} [(m_1 + m_2 - M_1 - M_2 - \dots - M_n) c^2] (m_1 + m_2 + M_1 + M_2 + \dots + M_n) \\ &= -\frac{1}{2m_2} Q (m_1 + m_2 + M_1 + M_2 + \dots + M_n)\end{aligned}\quad (5)$$

en función del valor Q (negativo) de la reacción.

Obsérvese que en una aproximación para energía baja podemos utilizar la relación clásica para la masa

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = m_1 + m_2$$

Con lo cual, se obtiene de la ecuación (5)

$$K_u = \frac{-Q}{m_2} (m_1 + m_2)$$

en concordancia con el resultado no relativista del problema 30.8.

32.10. Hallar la energía umbral para la reacción $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$.

Para la reacción,

$$Q = [m_p + m_p - (m_p + m_p + m_{\pi^0})] c^2 = -m_{\pi^0} c^2 = -135 \text{ MeV}$$

por lo tanto, del problema 32.9,

$$K_u = -\frac{Q}{2m_p} (m_p + m_p + m_p + m_p + m_n) = -\frac{Q}{2m_p c^2} (4m_p + m_n)c^2$$

$$= \frac{135 \text{ MeV}}{2(938 \text{ MeV})} [4(938 \text{ MeV}) + 135 \text{ MeV}] = 280 \text{ MeV}$$

Esta es la energía mínima que debe comunicar un acelerador a un protón para producir un mesón π^0 mediante la reacción anterior.

- 32.11. Determinar los posibles valores del spin de un mesón π^- para la reacción $\pi^- + p \rightarrow n + \gamma$.

De la conservación de momentum angular intrínseco, tenemos

$$s_\pi + s_p = s_n + s_\gamma$$

donde $|s| = \sqrt{s(s+1)} \hbar$. Al lado derecho se tiene $s_n = \frac{1}{2}$ y $s_\gamma = 1$, por lo tanto, el momentum angular total es $\frac{3}{2}$ ó $\frac{1}{2}$. Para el protón $s_p = \frac{1}{2}$, con lo cual s_π es 0 ó 1.

- 32.12. Calcular la cantidad $\tau_0 \equiv \hbar/m_\pi c^2$.

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{6.58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}}{140 \times 10^6 \text{ eV}} = 4.7 \times 10^{-24} \text{ s}$$

Si uno examina la interacción fuerte como el intercambio de un mesón π , entonces en el interior de un núcleo puede efectuarse un proceso tal como

$$n \rightarrow p + \pi^-$$

aunque la conservación de masa-energía prohíba el proceso para nucleones libres. De acuerdo con la mecánica cuántica, la conservación de energía puede violarse en una cantidad $m_\pi c^2$ si el tiempo que dura el proceso, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg, es:

$$\Delta t \Delta E \approx \hbar \quad \text{ó} \quad \tau_0(m_\pi c^2) \approx \hbar \quad \text{ó} \quad \tau_0 \approx \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$$

Entonces, los procesos de interacción fuerte tienen lugar en un intervalo de tiempo de aproximadamente 10^{-24} s.

- 32.13. Calcular la masa de un mesón π .

Si el rango a del campo de un mesón π es aproximadamente del tamaño de un núcleo y suponiendo que el mesón π viaja a una velocidad cercana a la de la luz, entonces $a = c\tau_0$ donde τ_0 es el tiempo que gasta el mesón π en atravesar un diámetro nuclear. Haciendo $a = 1.4 \text{ fm}$ (valor aproximado del tamaño nuclear) y $\tau_0 = \hbar/m_\pi c^2$, también está acorde con el principio de incertidumbre de Heisenberg (problema 32.12), se obtiene

$$1.4 \text{ fm} = \frac{c\hbar}{m_\pi c^2} = \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_\pi c^2} \quad \text{ó} \quad m_\pi c^2 = 141 \text{ MeV}$$

Este valor concuerda con la masa observada para los mesones (tabla 32-1).

Capítulo 33

Enlace molecular

33.1 ENLACE IONICO

El *enlace iónico* es el tipo de enlace que se encuentra en la mayoría de las sales, en las cuales un *material alcalino* (de la primera columna en la tabla periódica: Li, Na, K, ...) se liga a un *halógeno* (de la séptima columna de la tabla periódica: F, Cl, Br, ...). Para explicar el enlace iónico analizamos la sal típica KCl. El potasio ($_{19}\text{K}$) tiene un electrón $4s$ más allá de la estructura cerrada del gas inerte argón ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1 = {}_{18}\text{Ar} + 4s^1$). Debido a que el último electrón está muy débilmente ligado, con una energía de ionización de solamente 4.34 eV, es fácil formar un ion de potasio K^+ . El cloro ($_{17}\text{Cl}$) necesita un electrón para completar la capa $3p$ ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5 = \text{Ar} - 3p^1$), por lo tanto, es más bien fácil ligar un electrón adicional a un átomo de cloro para formar el ion de cloro negativo Cl^- . De los átomos neutros que como el Cl tienen la posibilidad de aceptar un electrón adicional se dice que tienen *afinidad electrónica*. La energía denominada *energía de afinidad electrónica* necesaria para extraer el electrón adicional de un ion Cl^- para formar un átomo neutro de Cl es de 3.62 eV. Si es necesario agregar energía, es porque la energía total del ion de cloro es inferior en 3.62 eV a la energía total del átomo neutro de cloro.

La formación de una molécula de KCl puede realizarse en dos etapas. Primero, se extrae un electrón de un átomo neutro de potasio para formar ion K^+ y transferirlo a un átomo neutro de cloro para formar un ion Cl^- . En este proceso deben agregarse 4.34 eV al átomo de potasio, pero 3.62 eV son suministrados por el átomo de Cl; por lo tanto, la energía neta necesaria para formar el par $\text{K}^+ \text{Cl}^-$ es $4.34 \text{ eV} - 3.62 \text{ eV} = 0.72 \text{ eV}$. En la siguiente etapa, podemos imaginar que los iones K^+ y Cl^- se reúnen para formar el "átomo" neutro de KCl. En este proceso la energía del sistema aumentará negativamente, debido a la interacción de Coulomb entre los dos iones cargados con signo opuesto. La energía total final del sistema será la suma de la energía positiva 0.72 eV necesaria para formar el par original $\text{K}^+ \text{Cl}^-$ y la energía negativa de Coulomb de los iones combinados. Si esta energía total es negativa, la molécula de KCl será estable, puesto que es necesario suministrar energía para disociar la molécula en los átomos originales de K y de Cl. Experimentalmente se ha encontrado que los iones en el KCl se encuentran separados una distancia $r_0 = 2.79 \text{ \AA}$ y que KCl tiene una energía de disociación de 4.42 eV.

Puesto que la fuerza de Coulomb entre los dos iones es atractiva, podría esperarse que no existiera una configuración estable. Sin embargo, a distancias suficientemente pequeñas los electrones en los iones producen efectos repulsivos, debido a la fuerza de Coulomb entre ellos y también a causa del principio de exclusión de Pauli. Entonces, puesto que hay una fuerza atractiva a separaciones grandes y una fuerza repulsiva a separaciones pequeñas, existen separaciones intermedias a las cuales los iones K^+ y Cl^- permanecen en equilibrio.

33.2 ENLACE COVALENTE

Las moléculas, tales como H_2 , Cl_2 , NO, se encuentran ligadas mediante mecanismos conocidos como *enlace covalente*. Para explicar en detalle este enlace covalente se requiere la solución mecánico-cuántica para un sistema polielectrónico bajo la influencia de dos núcleos. Las soluciones de tipo mecánico-cuántico se encuentran fuera del alcance de este libro en donde solamente daremos los resultados para explicar el enlace covalente.

Como ejemplo de enlace covalente consideremos la molécula covalente más sencilla, H_2 . La molécula de H_2 puede considerarse como compuesta por dos cargas positivas con dos electrones que se mueven en sus respectivos campos electromagnéticos. Los dos electrones pueden tener spin total $S = 0$ (estado singular, con spines antialineados) ó $S = 1$ (estado triple, con spines alineados). La solución mecánico-cuántica

demuestra que el estado singular tiene la energía más baja. Además, los electrones se encuentran con mayor probabilidad *en medio* de los núcleos de hidrógeno. Los protones a cada lado de los electrones se encuentran así atraídos por la carga negativa de éstos, dando como resultado una fuerza de enlace para los dos protones.

La molécula de H_2^+ se encuentra ligada esencialmente del mismo modo que la molécula neutra de H_2 , pero debido a que en esta solamente hay un electrón que atrae los protones, la energía de enlace resulta ser más débil. Para el H_2 la energía de enlace es de 4.48 eV y la separación atómica es de 0.74 Å, mientras que la energía de enlace para el H_2^+ es de 2.65 eV y la separación atómica de 1.06 Å.

La diferencia entre el enlace covalente y el iónico consiste en que en el enlace covalente los electrones son *compartidos* por los átomos, mientras que en el enlace iónico un electrón es *transferido* de un átomo a otro. En la mayoría de los enlaces químicos existe alguna distribución de cada uno de estos tipos de enlace.

Las diferencias entre los dos tipos de enlace también se manifiestan en el tamaño relativo de los momentos de dipolo eléctrico de los enlaces moleculares iónico y covalente. Un dipolo eléctrico puede considerarse aproximadamente como dos partículas con cargas opuestas separadas por una pequeña distancia d ; la magnitud del vector momento de dipolo eléctrico \mathbf{p} está dada por $p = Qd$, donde Q es la magnitud de la carga de cada partícula y el sentido del vector momento de dipolo sea de la carga negativa hacia la positiva. El momento de dipolo de un enlace molecular iónico es relativamente grande, debido a que la separación entre los dos iones cargados es grande, por otra parte, para un enlace molecular covalente donde los electrones se encuentran *en medio* de los dos núcleos hay efectivamente dos momentos dipolares formados por las dos cargas positivas de los núcleos y las cargas negativas de los electrones. Como estos momentos actúan en sentidos opuestos tienden a cancelarse mutuamente, dando como resultado la no presencia de momento dipolar para un enlace molecular covalente.

33.3 OTROS TIPOS DE ENLACES

Es posible que en dos o más átomos se induzcan mutuamente momentos dipolares, aunque en cada uno de ellos su momento dipolar sea cero. El dipolo inducido surge de la separación de las cargas positivas y negativas del átomo, debido a la estrecha proximidad de un átomo con otro. La fuerza débil de atracción entre los dipolos inducidos se denomina enlace de *van der Waals*. Es la única fuerza que liga los elementos inertes en los estados líquido y sólido.

En los metales, los átomos no comparten ni intercambian electrones para permanecer ligados. En cambio, varios electrones (aproximadamente uno de cada átomo) se encuentran más o menos libres para moverse a lo largo del metal; por lo tanto, cada electrón puede interactuar con varios átomos fijos. Los efectos de esta interacción, que puede explicarse solamente con la ayuda de un análisis mecánico-cuántico, son los responsables del *enlace metálico* que mantiene unido al metal.

Problemas resueltos

- 33.1. Encuentre la expresión para la energía de disociación en un enlace iónico de una molécula diatómica de sal en función de la separación interatómica, de la energía de ionización del alkali y de la energía de afinidad eléctrica del halógeno. Comparar los resultados predichos por la ecuación con los valores experimentales de D que se encuentran en la tabla 33-1.

La disociación de un enlace iónico en una molécula diatómica puede considerarse en tres etapas: (1) aumentando la separación de los dos iones desde una distancia r_0 hasta el infinito, lo cual requiere una energía $-E_C = +ke^2/r_0$ (el signo negativo se debe a la energía de Coulomb); (2) la extracción de un electrón del ion negativo del halógeno para neutralizarlo, lo cual requiere una energía igual a la energía de afinidad electrónica del halógeno F ; (3) la ubicación de este electrón en el ion positivo del alkali para neutralizarlo, lo cual requiere una energía de $-I$, donde I es la energía de ionización del alkali.

La energía D necesaria para disociar la molécula es entonces

$$D = \frac{ke^2}{r_0} + F - I = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{r_0} + F - I$$

Tabla 33-1

Alkali	Energía de Ionización, I	Halógeno	Energía de afinidad electrónica, F
Li	5.39 eV	F	3.45 eV
Na	5.14 eV	Cl	3.62 eV
K	4.34 eV	Br	3.36 eV
Sal	Longitud de enlace, r_0	Energía de disociación, D	
LiF	1.56 Å	5.95 eV	
NaCl	2.51 Å	3.58 eV	
KCl	2.79 Å	4.42 eV	
KBr	2.94 Å	3.96 eV	

Reemplazando los datos de la tabla 33-1, obtenemos

$$\text{LiF: } D = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{1.56 \text{ Å}} + 3.45 \text{ eV} - 5.39 \text{ eV} = 7.29 \text{ eV}$$

$$\text{NaCl: } D = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2.51 \text{ Å}} + 3.62 \text{ eV} - 5.14 \text{ eV} = 4.22 \text{ eV}$$

$$\text{KCl: } D = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2.79 \text{ Å}} + 3.62 \text{ eV} - 4.34 \text{ eV} = 4.44 \text{ eV}$$

$$\text{KBr: } D = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{2.94 \text{ Å}} + 3.36 \text{ eV} - 4.34 \text{ eV} = 3.92 \text{ eV}$$

Se encuentra que los valores predichos concuerdan muy bien con las energías de disociación observadas.

33.2. Calcular el momento dipolar para KCl ($r_0 = 2.79 \text{ Å}$).

Si consideramos la separación entre las cargas como la separación atómica, el momento dipolar está dado por

$$p = Qr_0 = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.79 \times 10^{-10} \text{ m}) = 4.46 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$$

(Los momentos dipolares se dan a menudo en *debies*; $1 \text{ D} = 3.335641 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$.) El momento dipolar real encontrado es $2.64 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$, lo cual demuestra que los centros de carga se encuentran más cercanos uno del otro que la separación atómica considerada en este problema.

33.3. Los dos protones en una molécula de H_2 se encuentran separadas una distancia de 0.74 Å . ¿Qué carga eléctrica negativa debe colocarse en el punto medio entre los dos protones para comunicar al sistema la energía de enlace observada de 4.5 eV ?

La energía de enlace, es decir, la energía necesaria para llevar todas las partículas hasta el infinito será igual en magnitud a la energía total de Coulomb de las cargas que conforman la molécula de H_2 . La energía de Coulomb está formada por la contribución positiva de los dos protones.

$$E_+ = \frac{ke^2}{r_0} = \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{0.74 \text{ Å}} = 19.5 \text{ eV}$$

y una combinación negativa de una carga negativa $\delta(-e)$ localizada en el punto medio entre los dos protones,

$$\begin{aligned} E_- &= \delta(-e)V_{\text{med}} = -\delta e \left(\frac{ke}{r_0/2} + \frac{ke}{r_0/2} \right) = -2\delta \frac{ke^2}{r_0/2} \\ &= -2\delta \frac{14.40 \text{ eV} \cdot \text{Å}}{(0.74 \text{ Å})/2} = -(77.8 \text{ eV})\delta \end{aligned}$$

Con lo cual obtenemos

$$\begin{aligned} -BE &= E_+ + E_- \\ -4.5 \text{ eV} &= 19.5 \text{ eV} - (77.8 \text{ eV})\delta \\ \delta &= 0.308 \end{aligned}$$

Este número es mucho menor que el valor de $\delta = 2$, que representa el número de electrones que existen en una molécula de H_2 . Estos dos electrones no se encuentran localizados exactamente en el punto medio entre los dos protones, sino que se les puede encontrar en cualquier lugar alrededor de ellos. Sin embargo, desde el punto de vista mecánico-cuántico, los dos electrones se encuentran con mayor probabilidad en el punto medio entre los dos protones. Por lo tanto, los electrones pasan la mayor parte de su tiempo en el punto medio y, en consecuencia, surge una fuerza atractiva que se traduce en el enlace covalente de una molécula de H_2 .

33.4. Una expresión aproximada para la energía potencial de dos iones en función de su separación es

$$EP = -\frac{ke^2}{r} + \frac{b}{r^9}$$

El primer término es la conocida interacción de Coulomb y el segundo término se ha introducido con el fin de tener en cuenta los efectos repulsivos de los dos iones a pequeñas distancias. Calcular b en función de la separación de equilibrio r_0 .

El valor mínimo de la energía potencial se encuentra cuando el valor de la separación es igual a la separación de equilibrio r_0 . Este valor mínimo se obtiene así:

$$\left. \frac{d(EP)}{dr} \right|_{r=r_0} = \frac{ke^2}{r_0^2} - \frac{9b}{r_0^{10}} = 0 \quad \text{ó} \quad b = \frac{ke^2 r_0^8}{9}$$

La forma general de la gráfica de EP como una función de r aparece en la figura 33-1.

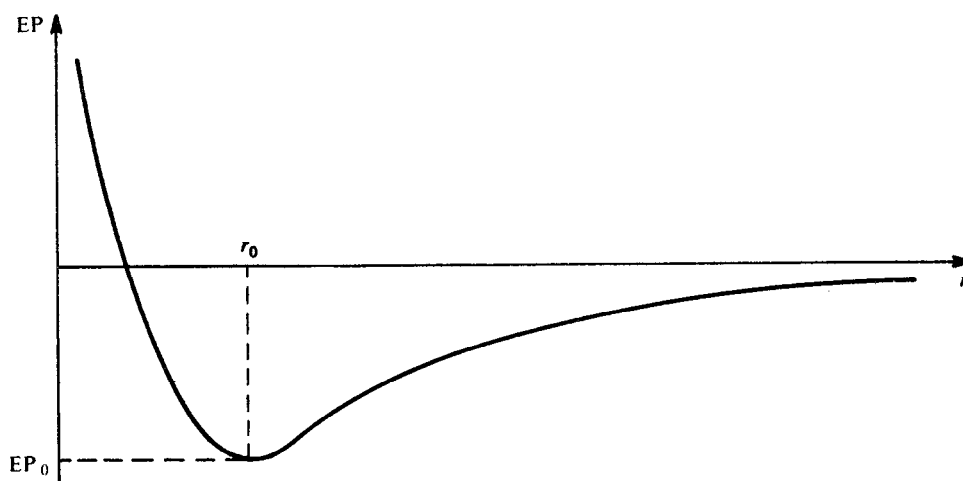


Fig. 33-1

33.5. Calcular la energía potencial de la molécula de KCl para su separación de equilibrio ($r_0 = 2.79 \text{ \AA}$).

Del problema 33.4 la energía potencial mínima es

$$\begin{aligned} EP_0 &= -\frac{ke^2}{r_0} + \frac{b}{r_0^9} = -\frac{ke^2}{r_0} + \frac{ke^2}{9r_0} = -\frac{8ke^2}{9r_0} \\ &= \frac{-8(14.40 \text{ eV} \cdot \text{\AA})}{9(2.79 \text{ \AA})} = -4.59 \text{ eV} \end{aligned}$$

33.6. Una expresión para la energía potencial de dos átomos neutros en función de su separación r se obtiene mediante el *potencial de Morse*,

$$EP = P_0[1 - e^{-a(r-r_0)}]^2$$

Demostrar que r_0 es la separación atómica y P_0 es la energía de disociación.

El valor mínimo para la función de energía potencial se obtiene de

$$\frac{d(EP)}{dr} = 2P_0ae^{-a(r-r_0)}[1 - e^{-a(r-r_0)}] = 0$$

lo cual da $r = r_0$ para la expresión de equilibrio. En $r = r_0$, $EP = 0$; cuando $r \rightarrow \infty$, $EP \rightarrow P_0$. Por lo tanto, es necesario realizar un trabajo de

$$P_0 - 0 = P_0$$

para lograr una separación infinita entre los átomos y ésta, es precisamente la energía de disociación.

Problemas suplementarios

- 33.7. Calcular la separación mínima entre el Na^+ y el Cl^- si estos iones deben estar ligados. Considere los iones como cargas puntuales. (La energía de ionización del Na es 5.14 eV, la energía de afinidad electrónica para el Cl es 3.62 eV y la energía de disociación del NaCl es 3.58 eV.) *Resp.* 2.82 Å
- 33.8. Si la energía de disociación del KI es 3.33 eV, calcular la longitud de enlace (distancia entre iones) para el KI donde la energía de afinidad electrónica del I es 3.06 eV y la energía de ionización del K es 4.34 eV. (La longitud de enlace medida para el KI es 3.23 Å.) *Resp.* 3.12 Å
- 33.9. Si el momento dipolar del KI es $3.05 \times 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$, calcular la longitud de enlace del KI. (Experimentalmente se ha encontrado el valor de $r_0 = 3.23 \text{ Å}$.) *Resp.* 1.91 Å
- 33.10. Suponiendo que los dos electrones en la molécula de H_2 se encuentran en el punto medio entre los dos protones, ¿cuál debe ser la separación entre los protones para justificar la energía de enlace observada de 4.5 eV? *Resp.* 9.6 Å
- 33.11. Los dos protones en una molécula de H_2^+ se encuentran separados una distancia de 1.06 Å y la energía de enlace es 2.6 eV. ¿Qué carga eléctrica debe calcularse en el punto medio entre los dos protones para conservar estos valores? *Resp.* 0.298e
- 33.12. Calcular la energía potencial de la molécula de KI en su separación de equilibrio a partir de los datos del problema 33.8. *Resp.* -4.10 eV

Capítulo 34

Excitaciones de moléculas diatómicas

En las moléculas complejas se encuentra que además de las excitaciones electrónicas normales hay en ellas movimientos rotacionales y vibracionales. Restringiremos nuestro estudio a moléculas diatómicas (con dos átomos) que presentan algunos aspectos importantes relacionados con excitaciones moleculares sin una excesiva complejidad matemática.

34.1 ROTACIONES MOLECULARES

El movimiento rotacional de una molécula diatómica puede considerarse como la rotación en un plano de dos esferas unidas por un eje, alrededor de su centro de masa (ver figura 34-1). Si el momento de inercia del sistema alrededor del centro de masa es I , la energía cinética E_r debida al movimiento rotacional será

$$E_r = \frac{1}{2} I \omega_r^2 = \frac{1}{2} \frac{(I \omega_r)^2}{I} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \quad (34.1)$$

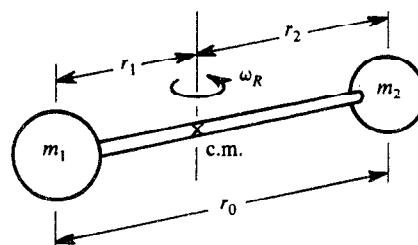


Fig. 34-1

donde ω_r es la velocidad angular rotacional y $L = I \omega_r$ es el momentum angular del sistema.

El momentum angular de las moléculas, al igual que el de los átomos polielectrónicos, se encuentra cuantizado y puede suponerse que solamente tiene valores discretos, según

$$|L| = \sqrt{l(l+1)} \hbar \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (34.2)$$

Por lo tanto, la energía cinética rotacional dada por la ecuación (34.1) estará cuantizada y toma solamente los valores

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I} \quad (34.3)$$

Un diagrama típico de niveles de energía rotacional aparece en la figura 34-2(a).

34.2 VIBRACIONES MOLECULARES

Los enlaces químicos que mantienen unidas a las moléculas diatómicas permiten la presencia de movimientos vibracionales en forma análoga a las vibraciones de dos masas que se encuentran en los extremos de un resorte. Debido a que las energías son muy pequeñas, los movimientos de vibración en las moléculas pueden considerarse aproximadamente como oscilaciones armónicas simples. Un estudio mecánico-cuántico muestra que un oscilador armónico puede tener energía cinética solamente con valores discretos E_v , cuyos valores están dados por

$$E_v = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_v \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34.4)$$

donde ω_0 es la frecuencia angular vibracional que depende de la constante de recuperación y de la masa reducida del sistema.

En la ecuación (34.4) se observa que la energía vibracional más baja es $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0$. Así, con su energía mínima la molécula no está en reposo sino que realiza alguna vibración mínima alrededor de su punto de equilibrio. La ecuación (34.4) predice que los niveles de energía de un oscilador armónico están igualmente separados a intervalos de $\hbar \omega_0$. Para energías altas, la aproximación hecha en el oscilador simple ya no es válida y se encuentra que para esos niveles de energía, los intervalos se van estrechando más de lo que predice la ecuación (34.4). Un diagrama para los niveles de energía del oscilador armónico aparece en la figura 34-2(b).

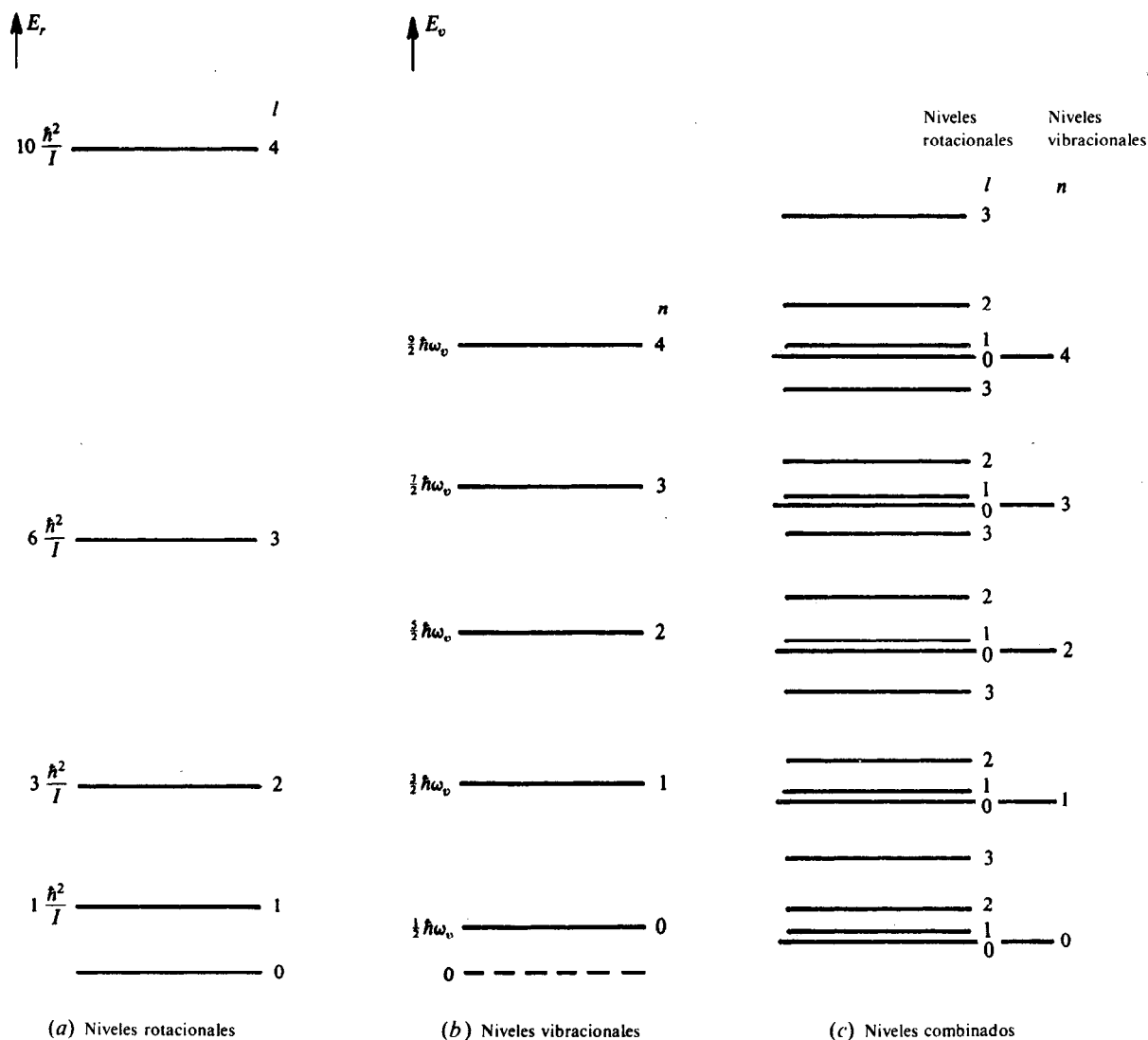


Fig. 34-2

34.3 EXCITACIONES COMBINADAS

Se ha encontrado que las separaciones en los niveles de energía vibracional son 10 ó 100 veces mayores que las separaciones entre los niveles de energía rotacional (ver problema 34.7). Clásicamente esto significa que existen varios ciclos de vibración durante cada rotación, por lo tanto, los dos movimientos pueden considerarse separadamente. La figura 34-2(c) muestra los niveles pequeños de energía rotacional superpuestos sobre los niveles mayores de energía vibracional.

Las transiciones entre los niveles pueden presentarse ya sea por emisión de fotones en la desexcitación molecular o mediante la absorción de fotones. En la mayoría de los casos, para bajas energías, las transiciones están sometidas a las siguientes reglas de selección.

$$\Delta l = \pm 1 \quad \Delta n = \pm 1$$

Los espectros vibracional y rotacional son utilizados para obtener distancias de enlace molecular o rigidez de enlace de las moléculas (ver problemas 34.4 y 34.8).

Problemas resueltos

- 34.1.** Supóngase que una molécula diatómica está formada por dos masas m_1 y m_2 que se encuentran en los extremos de una barra sin masa de longitud r_0 . Demuestre que el momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la barra y que pasa por el centro de masa es

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2 \equiv \mu r_0^2$$

donde μ es la masa reducida (sección 19.3).

El momento de inercia de dos masas puntuales, m_1 y m_2 alrededor de un eje que pasa por el centro de masa es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (1)$$

(ver figura 34-1). De la definición de centro de masa obtenemos

$$r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r_0 \quad r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r_0$$

reemplazando en (1) se tiene

$$I = m_1 \left(\frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1 r_0}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r_0^2$$

- 34.2.** Calcular la separación interatómica del O_2 , en el cual $\hbar^2/2I = 1.78 \times 10^{-4} \text{ eV}$.

La masa reducida para una molécula de O_2 es $m/2$, donde $m = 16 \text{ u}$ es la masa de cada átomo de O. Utilizando el resultado del problema 34.1,

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{\frac{I}{m/2}} = \sqrt{\frac{2Ic^2}{mc^2}} = \sqrt{\frac{\hbar^2 c^2}{(1.78 \times 10^{-4} \text{ eV}) mc^2}} \\ &= \frac{\hbar c}{\sqrt{(1.78 \times 10^{-4} \text{ eV}) mc^2}} = \frac{1973 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{\sqrt{(1.78 \times 10^{-4} \text{ eV})(16 \text{ u})(931.5 \times 10^6 \text{ eV/u})}} = 1.21 \text{ \AA} \end{aligned}$$

- 34.3.** Demuestre que el espectro de la frecuencia rotacional de una molécula diatómica está formada por líneas equidistantes separadas por una cantidad $\Delta\nu = h/4\pi^2 I$, donde I es el momento de inercia de la molécula.

Los valores posibles de la energía rotacional de acuerdo con la ecuación (34.3) son

$$E_r = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$$

Una transición entre dos niveles es el resultado de la emisión (o absorción) de un fotón, cuya frecuencia ν se obtiene de

$$E_\gamma = h\nu = E_2 - E_1 = \frac{(h/2\pi)^2}{2I} [l_2(l_2 + 1) - l_1(l_1 + 1)]$$

$$\nu = \frac{h}{8\pi^2 I} [l_2(l_2 + 1) - l_1(l_1 + 1)]$$

En virtud de la regla de selección $\Delta l = \pm 1$, el valor de l_2 será $l_2 = l_1 + 1$, por lo tanto

$$\nu = \frac{h}{8\pi^2 I} [(l_1 + 1)(l_1 + 1 + 1) - l_1(l_1 + 1)] = \frac{h}{4\pi^2 I} (l_1 + 1)$$

Las frecuencias de los fotones emitidos se consiguen haciendo $l_1 = 0, 1, \dots$, por lo tanto, para líneas adyacentes las frecuencias estarán igualmente separadas por una cantidad

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

- 34.4.** En el espectro rotacional del $^{35}\text{Cl } ^{19}\text{F}$ se ha encontrado que la separación de frecuencia entre líneas adyacentes es de 11.2 GHz. Calcular la separación entre los átomos.

Del problema 34.3,

$$I = \frac{h}{4\pi^2 \Delta\nu} = \frac{6.625 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi^2 (11.2 \times 10^9 \text{ s}^{-1})} = 1.50 \times 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Y del problema 34.1,

$$r_0 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)I}{m_1 m_2}} = \sqrt{\frac{(35 \text{ u} + 19 \text{ u})(1.50 \times 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)}{(35 \text{ u})(19 \text{ u})}} \times \frac{1 \text{ u}}{1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 2.71 \times 10^{-10} \text{ m}$$

ó 2.71 Å

- 34.5.** La distancia interatómica de una molécula de $^{12}\text{C } ^{16}\text{O}$ es 1.13 Å. Calcular la separación en longitud de onda aproximada entre líneas adyacentes del espectro rotacional ocasionado por las transiciones electrónicas en la región visible (5000 Å).

De los problemas 34.1 y 34.3,

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I} = \frac{h}{4\pi\mu r_0^2}$$

y para pequeñas variaciones,

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c}{\lambda^2} \Delta\lambda$$

Por lo tanto,

$$|\Delta\lambda| = \frac{\lambda^2}{c} \frac{h}{4\pi^2 \mu r_0^2} = \frac{\lambda^2 (hc)}{4\pi^2 \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} c^2\right) r_0^2}$$

$$= \frac{(5000 \text{ Å})^2 (12.4 \text{ MeV} \cdot \text{Å})}{4\pi^2 \left[\left(\frac{12 \cdot 16}{12 + 16} \text{ u}\right) (931.5 \text{ MeV/u})\right] (1.13 \text{ Å})^2} = 0.962 \text{ Å}$$

- 34.6.** Calcular los niveles de energía rotacional para la molécula de H_2 , cuya separación de equilibrio es 0.74 Å.

Los niveles de energía rotacional y el momento de inercia de la molécula de H_2 están dados por

$$E_r = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1) \quad I = \mu r_0^2 = \frac{m_H}{2} r_0^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\hbar^2}{m_H r_0^2} l(l+1) = \frac{(\hbar c)^2}{(m_H c^2) r_0^2} l(l+1) \\ &= \frac{(1973 \text{ eV} \cdot \text{\AA})^2}{(1.008 \text{ u})(931.5 \times 10^6 \text{ eV/u})(0.74 \text{ \AA})^2} l(l+1) = (7.57 \times 10^{-3} \text{ eV}) l(l+1) \end{aligned}$$

En la siguiente tabla se encuentran los primeros cuatro niveles de energía rotacional para el H_2 .

l	0	1	2	3	4
$E_r, \text{ eV} \times 10^{-2}$	0	1.51	4.54	9.08	15.1

34.7. Calcular la separación de niveles de energía vibracional para la molécula de H_2 ($r_0 = 0.74 \text{ \AA}$).

Consideremos los núcleos del hidrógeno sometidos a repulsión electrostática y sostenidos mediante un resorte. Si el resorte se estira una distancia igual a la separación nuclear, la constante K del resorte se obtiene a partir de

$$F = \frac{ke^2}{r_0^2} = Kr_0 \quad \text{ó} \quad K = \frac{ke^2}{r_0^3} = \frac{14.4 \text{ eV} \cdot \text{\AA}}{(0.74 \text{ \AA})^3} = 35.5 \frac{\text{eV}}{\text{\AA}^2}$$

Relacionando a K con la frecuencia angular del oscilador armónico, se obtiene

$$\hbar\omega_v = \hbar\sqrt{\frac{K}{\mu}} = \hbar c\sqrt{\frac{K}{\mu c^2}}$$

donde μ , la masa reducida, es $m_H/2$. Por lo tanto,

$$\hbar\omega_v = \hbar c\sqrt{\frac{2K}{m_H c^2}} = (1973 \text{ eV} \cdot \text{\AA})\sqrt{\frac{2 \times 35.5 \text{ eV}/\text{\AA}^2}{938 \times 10^6 \text{ eV}}} = 0.543 \text{ eV}$$

este valor es aproximadamente la separación de niveles de energía vibracional. En el problema 34.6 vemos que las separaciones de niveles de energía rotacional son unas 100 veces mayores que las separaciones de niveles de energía vibracional. Por esta razón, podemos considerar que los estados rotacionales han sido obtenidos a partir de los estados vibracionales como se muestra en la figura 34-2(c).

34.8. Una radiación infrarroja de longitud de onda de $3.465 \mu\text{m}$ es absorbida por un gas de HCl . ¿Cuál es la constante de recuperación para una molécula de HCl ?

Si la molécula de HCl se considera como un oscilador armónico cuantizado, podemos tener en cuenta solamente energías dadas por

$$E_v = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_v$$

La absorción de una radiación infrarroja producirá un aumento en la energía del oscilador armónico. Debido a la regla de selección $\Delta n = \pm 1$, este aumento será de

$$\Delta E_v = (n + 1 + \frac{1}{2})\hbar\omega_v - (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_v = \hbar\omega_v = \frac{h}{2\pi} \omega_v$$

Igualando este aumento con la energía del fotón, tenemos

$$h \frac{c}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} \omega_v$$

$$\omega_v = 2\pi \frac{c}{\lambda} = \frac{2\pi(3 \times 10^8 \text{ m/s})}{3.465 \times 10^{-6} \text{ m}} = 5.44 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

La masa reducida de una molécula de HCl es

$$\mu = \frac{m_H m_{Cl}}{m_H + m_{Cl}} = \frac{(1 \text{ u})(35 \text{ u})}{1 \text{ u} + 35 \text{ u}} \left(1.661 \times 10^{-27} \frac{\text{kg}}{\text{u}} \right) = 1.61 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

La frecuencia angular de un oscilador armónico está relacionada con su masa reducida y con la constante de recuperación mediante $\omega_v = \sqrt{K/\mu}$; por lo tanto,

$$K = \mu \omega_v^2 = (1.61 \times 10^{-27} \text{ kg})(5.44 \times 10^{14} \text{ s}^{-1})^2 = 476 \text{ N/m}$$

- 34.9.** Refiérase al problema 34.8. Calcule la energía vibracional total de una molécula de HCl, si se encuentra a la temperatura de cero absoluto.

A 0 K todas las moléculas de HCl se encuentran en el nivel de energía más bajo posible, lo cual corresponde a $n = 0$ en la ecuación (34.4). Así, utilizando el número de Avogadro, N_0 ,

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} &= N_0 \left(\frac{1}{2} \hbar \omega_v \right) = (6.023 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}) \frac{1}{2} (1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(5.44 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}) \\ &= 17.3 \text{ kJ/mol} \end{aligned}$$

- 34.10.** En una muestra de N_2 las moléculas se han excitado al estado $n = 1$ de los niveles vibracionales y se han desexcitado mediante la emisión de fotones. ¿Cuáles son las energías de los fotones emitidos? (Considere únicamente los primeros cinco niveles rotacionales por cada nivel vibracional.) Para N_2 , $\hbar^2/2I = 2.5 \times 10^{-4} \text{ eV}$, $\hbar \omega_v = 0.29 \text{ eV}$.

Los niveles de energía están dados por

$$E = \hbar \omega_v \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1)$$

y estos niveles se encuentran ilustrados en la figura 34-3. En todas las transiciones se cumple que $\Delta n = -1$; y están dados por

$$\Delta E = \hbar \omega_v + \frac{\hbar^2}{2I} [l'(l'+1) - l(l+1)]$$

De la regla de selección para la energía rotacional, $\Delta l = +1$ se tiene que $l' = l + 1$, por lo tanto

$$\Delta E = \hbar \omega_v + \frac{\hbar^2}{2I} [2(l+1)] \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

y de la regla de selección $\Delta l = -1$ tenemos $l' = l - 1$, así

$$\Delta E = \hbar \omega_v + \frac{\hbar^2}{2I} [-2l] \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

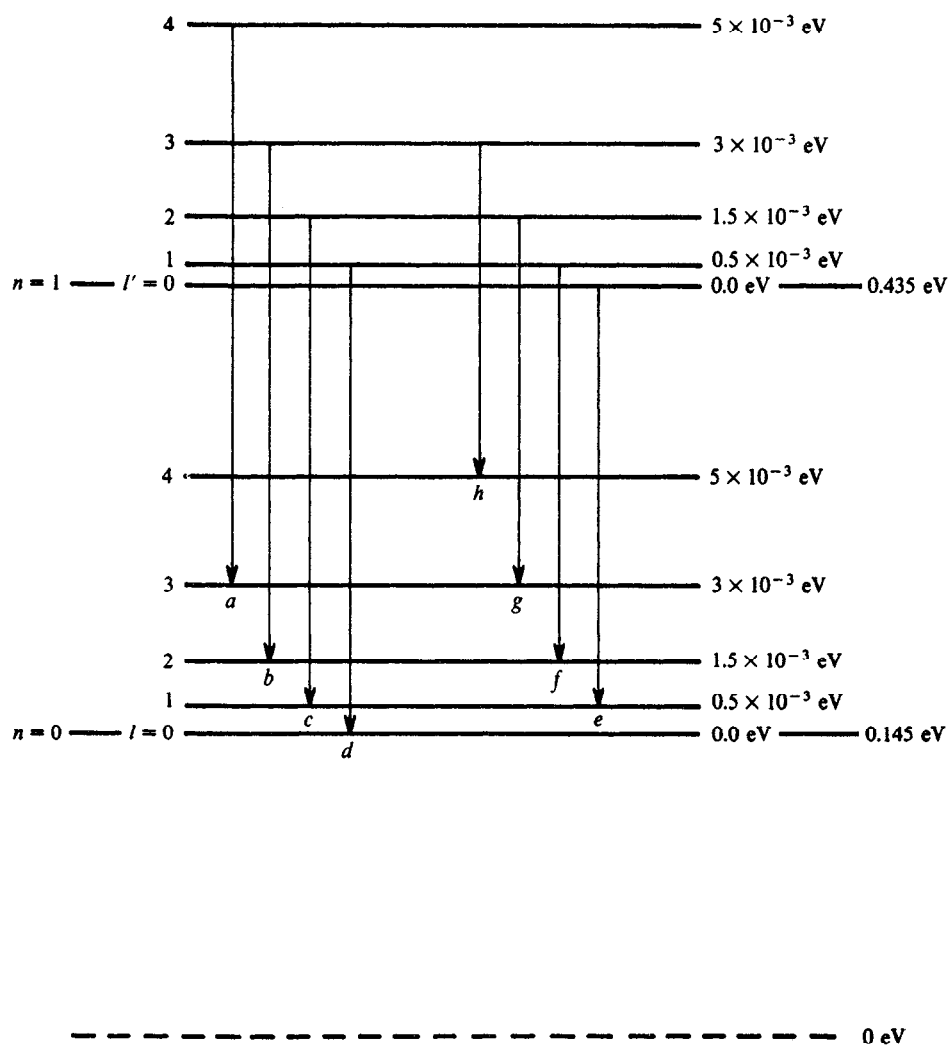


Fig. 34-3

Estas transiciones se pueden sintetizar en la tabla 34-1. Se observa que las energías están separadas por una cantidad $\hbar^2/I = 0.5 \times 10^{-3}$ eV, excepto $\Delta E = \hbar\omega_v = 0.29$ eV para la cual no aparece línea.

Tabla 34-1

Transición	l	ΔE , eV
a	3	$0.29 + 2.0 \times 10^{-3}$
b	2	$0.29 + 1.5 \times 10^{-3}$
c	1	$0.29 + 1.0 \times 10^{-3}$
d	0	$0.29 + 0.5 \times 10^{-3}$
e	1	$0.29 - 0.5 \times 10^{-3}$
f	2	$0.29 - 1.0 \times 10^{-3}$
g	3	$0.29 - 1.5 \times 10^{-3}$
h	4	$0.29 - 2.0 \times 10^{-3}$

- 34.11. En la figura 34-4 se muestra el espectro de absorción para cierto gas a la temperatura ambiente. Calcular el punto cero de energía vibracional y el momento de inercia de una molécula.

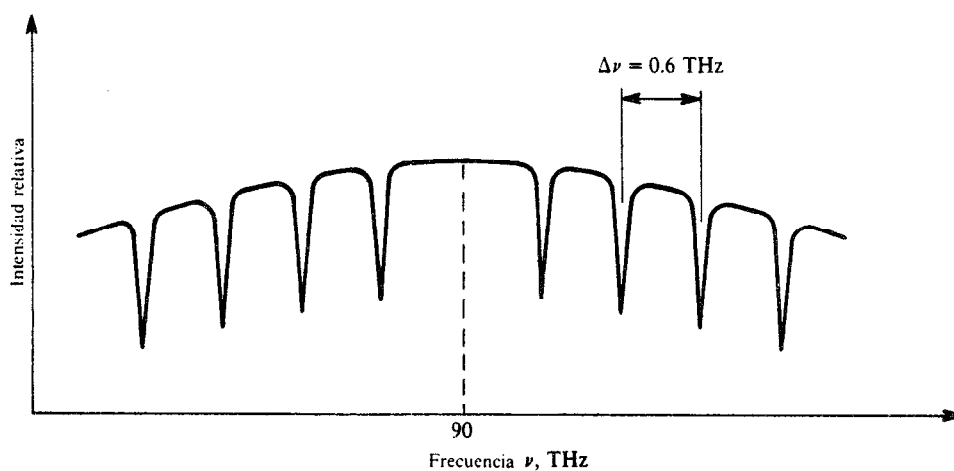


Fig. 34-4

El espectro de absorción que aparece en la figura es una combinación del espectro vibracional y rotacional. La absorción de fotones por las moléculas de un gas produce excitaciones que se encuentran en la figura 34-5. A la temperatura ambiente ($T \approx 300$ K) las moléculas no tienen suficiente energía para ocupar bandas vibracionales superiores a $n = 0$. Sin embargo, poseen suficiente energía térmica como para ser excitadas dentro de los diferentes niveles rotacionales de $n = 0$ de la banda vibracional. La absorción de fotones produce entonces excitaciones en la banda $n = 1$ como se indica en la figura 34-5. Se cumple aquí la regla de selección $\Delta n = \pm 1$. Debido a la regla de selección $\Delta l = \pm 1$, las transiciones aparecen en dos grupos, $l \rightarrow l + 1$ y $l \rightarrow l - 1$, como se indica en la figura. La diferencia de energía entre los niveles final e inicial, que es la suma de las diferencias de energía vibracional y rotacional, será igual a la energía $h\nu$ del fotón absorbido:

$$h\nu = \frac{h}{2\pi} \omega_v + [l_u(l_u + 1) - l_l(l_l + 1)] \frac{1}{2I} \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \quad \text{ó} \quad \nu = \frac{\omega_v}{2\pi} + [l_u(l_u + 1) - l_l(l_l + 1)] \frac{h}{8\pi^2 I}$$

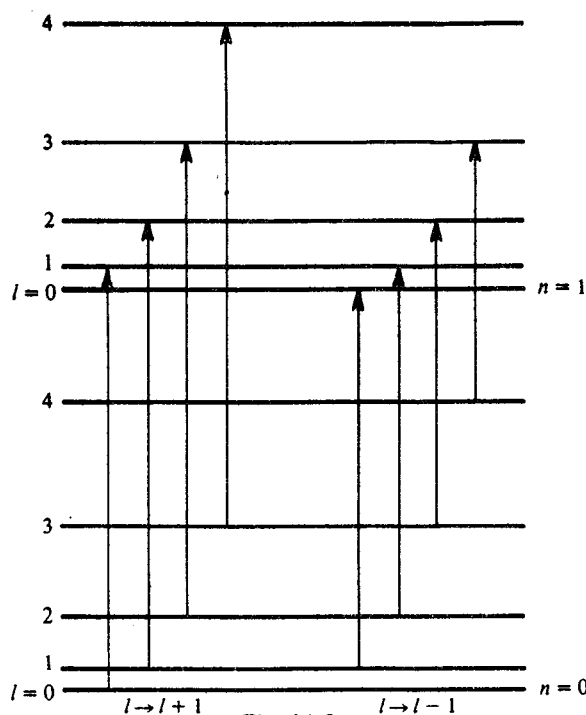


Fig. 34-5

Para los dos grupos de transiciones se tiene

$$l_u = l_l + 1: \quad \nu_1 = \frac{\omega_v}{2\pi} + (l_l + 1) \frac{h}{4\pi^2 I} \quad l_l = 0, 1, 2, \dots$$

$$l_u = l_l - 1: \quad \nu_2 = \frac{\omega_v}{2\pi} - l_l \frac{h}{4\pi^2 I} \quad l_l = 1, 2, 3, \dots$$

Las frecuencias de los fotones absorbidos aparecen como aumento en cantidades de $H/4\pi^2 I$ de

$$\frac{\omega_v}{2\pi} - 4 \frac{h}{4\pi^2 I} \quad (l_l = 4 \text{ en } \nu_2) \quad \text{a} \quad \frac{\omega_v}{2\pi} + 4 \frac{h}{4\pi^2 I} \quad (l_l = 3 \text{ en } \nu_1)$$

con excepción del intervalo de frecuencia $\nu_{\text{int}} = \omega_v/2\pi$. Podemos encontrar el momento de inercia mediante la diferencia de frecuencia $\Delta\nu$ entre niveles adyacentes, a partir de

$$\Delta\nu = \frac{h}{4\pi^2 I}$$

$$I = \frac{h}{4\pi^2 \Delta\nu} = \frac{6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{4\pi^2 (0.6 \times 10^{12} \text{ s}^{-1})} = 2.80 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Conociendo la frecuencia vibracional ($\nu_{\text{int}} = 90 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$), podemos obtener el punto cero de energía vibracional:

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_v = \frac{1}{2} h \nu_{\text{int}} = \frac{1}{2} (4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}) (90 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}) = 0.186 \text{ eV}$$

Problemas suplementarios

- 34.12. La separación de frecuencia entre los niveles adyacentes del espectro rotacional de cierta molécula es de 40 GHz. ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula? *Resp.* $4.20 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 34.13. La separación interatómica del $^{79}\text{Br}^{19}\text{F}$ es 1.76 Å. ¿Cuál es su momento de inercia? *Resp.* $7.88 \times 10^{-46} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 34.14. ¿Cuál será la separación de frecuencia entre líneas adyacentes del espectro rotacional del $^{79}\text{Br}^{19}\text{F}$ del problema 34.13? *Resp.* 21.3 GHz
- 34.15. Para $n = 0$ calcular la relación entre las longitudes de ondas de fotones emitidos en las transiciones en una molécula de $l = 2 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 0$. *Resp.* 1/2
- 34.16. La diferencia de energía de los fotones emitidos en las transiciones $l = 0 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 2$ en la molécula de $^{11}\text{B}^{16}\text{O}$ es de $4.46 \times 10^{-4} \text{ eV}$. ¿Cuál es la separación interatómica del BO? *Resp.* 1.20 Å
- 34.17. La separación en longitud de onda en el espectro rotacional de cierta molécula es de 3.62 Å en la región visible (5000 Å). ¿Cuál es el momento de inercia de la molécula? *Resp.* $3.86 \times 10^{-47} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
- 34.18. Calcular los tres primeros niveles de energía rotacional para el $^{79}\text{Br}^{19}\text{F}$ ($r_0 = 1.76 \text{ Å}$). *Resp.* 0 eV; $8.81 \times 10^{-5} \text{ eV}$; $26.4 \times 10^{-5} \text{ eV}$; $52.8 \times 10^{-5} \text{ eV}$
- 34.19. ¿Cuál será la longitud de onda del fotón producido en las transiciones rotacionales $l = 0 \rightarrow l = 1$ y $l = 1 \rightarrow l = 2$ en el $^{79}\text{Br}^{19}\text{F}$ del problema 34.18? *Resp.* 1.41 cm; 0.705 cm
- 34.20. ¿Cuál es la separación de los niveles de energía vibracional del $^{79}\text{Br}^{19}\text{F}$ ($r_0 = 1.76 \text{ Å}$)? (Compare las magnitudes de estos niveles de energía con la magnitud de los niveles de energía rotacional calculados en el problema 34.18.) *Resp.* $2.68 \times 10^{-2} \text{ eV}$

Capítulo 35

Teoría cinética

En la teoría cinética de los gases se utilizan las leyes de la mecánica clásica, aplicadas a un sistema que contiene un elevado número de partículas, para deducir las diferentes relaciones termodinámicas, en particular, la *ley del gas ideal*.

35.1 LA LEY DEL GAS IDEAL

Se supone que en un *gas ideal* la presión se debe a los choques perfectamente elásticos de las moléculas con las paredes del recipiente. En el problema 35.1 se demuestra cómo un análisis clásico de los choques conduce a una expresión para la presión p ejercida sobre las paredes del recipiente de volumen V , que contiene N moléculas, cada una de ellas de masa m , así

$$pV = \frac{2}{3} N \left[\frac{1}{2} m (v^2)_{\text{prom}} \right] \quad (35.1)$$

Aquí la cantidad $(v^2)_{\text{prom}}$ se define como sigue: Sea n_i el número total de partículas en el recipiente, cuya componente en x de la velocidad es v_{xi} . El valor promedio del cuadrado de las componentes en x de la velocidad de las N moléculas en el recipiente es

$$(v_x^2)_{\text{prom}} \equiv \frac{1}{N} [n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + \cdots + n_i v_{xi}^2 + \cdots] = \frac{1}{N} \sum_i n_i v_{xi}^2 \quad (35.2)$$

donde $N = \sum_i n_i$. Si suponemos ahora que no existe diferencia entre las direcciones x , y y z , podemos escribir

$$(v_x^2)_{\text{prom}} = (v_y^2)_{\text{prom}} = (v_z^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{3} (v^2)_{\text{prom}} \quad (35.3)$$

donde $(v^2)_{\text{prom}} = (v_x^2)_{\text{prom}} + (v_y^2)_{\text{prom}} + (v_z^2)_{\text{prom}}$ es el valor promedio del cuadrado de la velocidad. La raíz cuadrada de $(v^2)_{\text{prom}}$ se denomina *raíz cuadrada media* de la velocidad:

$$v_{\text{rcm}} \equiv \sqrt{(v^2)_{\text{prom}}} \quad (35.4)$$

La cantidad $\frac{1}{2} m (v^2)_{\text{prom}} = K_{\text{prom}}$ es la energía cinética promedio por molécula; por lo tanto

$$U = N \left[\frac{1}{2} m (v^2)_{\text{prom}} \right] \quad (35.5)$$

representa la energía cinética interna total del gas y la ecuación (35.1) puede escribirse como

$$pV = \frac{2}{3} U \quad (35.6)$$

Este resultado puede transformarse mediante la utilización de la relación entre el número total de partículas N y el número total de moles, \mathcal{N} : $N = \mathcal{N} N_0$, donde N_0 es el número de Avogadro,

$$N_0 = 6.023 \times 10^{23} \text{ moléculas/grs mol}$$

(Cuando se expresan los pesos moleculares en kilogramos, se utiliza $N_0 = 6.023 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$) Entonces la ecuación (35.1) se convierte en

$$pV = \mathcal{N} \left[\frac{2}{3} N_0 \frac{1}{2} m (v^2)_{\text{prom}} \right]$$

Si esta ecuación se compara con la del gas ideal,

$$pV = \mathcal{N}RT \quad (35.7)$$

se ve que

$$\frac{1}{2} m(v^2)_{\text{prom}} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_0} T = \frac{3}{2} kT \quad (35.8)$$

donde la relación $R/N_0 = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$ se denomina *constante de Boltzmann*, k . Así, la energía cinética promedio de un gas ideal aparece como una función de la temperatura absoluta T del gas.

Supongamos ahora que no se conociera la ecuación del gas ideal (35.7), entonces para avanzar en el desarrollo de la ecuación (35.1) deberíamos estar en condiciones de evaluar la siguiente suma

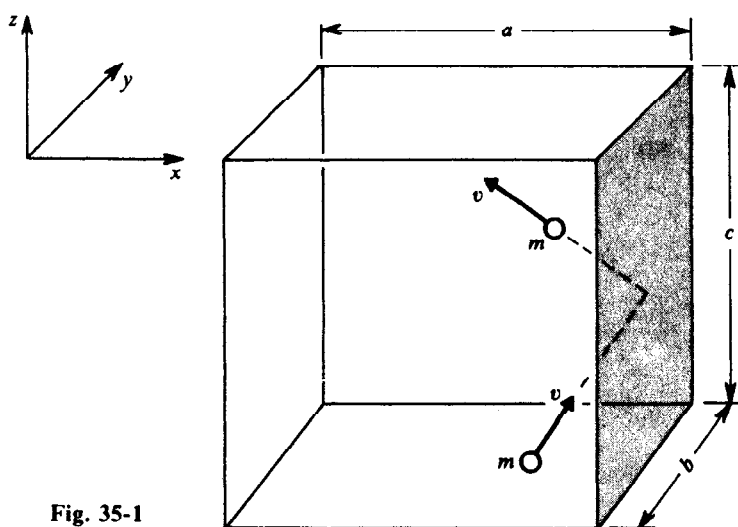
$$(v^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \sum_i n_i v_i^2$$

Los métodos para calcular este tipo de promedio involucran funciones de distribución que serán tratadas en los capítulos 36, 37 y 38.

Problemas resueltos

- 35.1. Supóngase que un gas está formado por moléculas puntuales que realizan choques perfectamente elásticos con las paredes del recipiente. Demuestre que la presión ejercida sobre las paredes de una caja rectangular de volumen $V = abc$, que contiene N moléculas idénticas cada una de masa m , está dada por

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left[\frac{1}{2} m(v^2)_{\text{prom}} \right]$$



Consideremos en primer lugar el choque de una molécula con una pared (figura 35-1). En un choque elástico la componente en x de la velocidad de la partícula cambia de $+v_x$ a $-v_x$. El correspondiente cambio de la componente en x del momentum de la partícula es

$$\Delta p_x = m(-v_x) - m(v_x) = -2mv_x$$

y como resultado del choque aparece una pequeña fuerza hacia la izquierda ejercida por la pared sobre la molécula. La reacción (tercera ley de Newton) aparece como una pequeña fuerza hacia la derecha ejercida sobre la pared, es decir, la presión.

Supongamos ahora que en vez de una partícula existen en la caja n_i partículas, todas ellas con la misma magnitud de la componente en x de la velocidad v_{xi} . En un pequeño intervalo de tiempo dt , la pared de área $A = bc$ es golpeada por las partículas que se encuentran a la izquierda de la misma y se mueven con una velocidad $+v_{xi}$, dentro de un pequeño volumen $A(v_{xi} dt)$. Así, el número de choques en un tiempo dt es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{V} \right) A(v_{xi} dt)$$

el factor $1/2$ se debe a que la mitad de las partículas se mueven alejándose de la pared. El cambio total en la componente en x del momentum, dp_{xi} , como resultado de los choques es

cambio total en el momentum =
(cambio en el momentum por partícula) \times (número de partículas que golpean la pared)

$$dp_{xi} = (-2mv_{xi}) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n_i}{V} \right) A(v_{xi} dt) \right] = - \frac{n_i m A v_{xi}^2 dt}{V}$$

ahora, por la segunda ley de Newton, la fuerza neta sobre la partícula es

$$F_{xi} = \frac{dp_{xi}}{dt} = - \frac{n_i m A v_{xi}^2}{V}$$

y la fuerza sobre la pared es $-F_{xi}$.

En el desarrollo anterior hemos despreciado los efectos de los choques entre las partículas. El intervalo de tiempo dt , puede considerarse lo suficientemente pequeño como para que el número de choques sea despreciable. También veremos que en un gas real en equilibrio los choques no constituyen un problema puesto que, en promedio, cada partícula cuya velocidad cambia, debido a un choque es reemplazada por otra partícula que, debido al choque, ha adquirido la velocidad de la primera partícula.

Desde luego, las N moléculas en un gas no tienen todas la misma magnitud de la componente en x de la velocidad. En cambio, existe una distribución de la componente en x de la velocidad entre todas las moléculas. Por lo tanto, para encontrar la fuerza total ejercida sobre el área A debemos sumar las contribuciones de todos los grupos de velocidades, lo que da

$$F_x = \sum_i (-F_{xi}) = \frac{mA}{V} \sum_i n_i v_{xi}^2 = \frac{mA}{V} [N(v_x^2)_{\text{prom}}] = \frac{NmA(v^2)_{\text{prom}}}{3V}$$

hemos utilizado aquí las ecuaciones (35.2) y (35.3). La presión p es entonces

$$p = \frac{F_x}{A} = \frac{Nm(v^2)_{\text{prom}}}{3V} = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \left[\frac{1}{2} m(v^2)_{\text{prom}} \right]$$

Obsérvese que la expresión para p no depende de la pared en especial que escogimos para el desarrollo.

35.2. ¿Cuál es la energía cinética promedio de una molécula a la temperatura ambiente (300 °K)?

$$K_{\text{prom}} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} (8.62 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}})(300 \text{ K}) = 3.88 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

Es conveniente recordar que este valor es aproximadamente $1/25$ eV.

35.3. Si la molécula del problema 35.2 es de O_2 , calcular la raíz cuadrada media (rcm) de la velocidad de la molécula.

$$K_{\text{prom}} = \frac{1}{2} m(v^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{2} m v_{\text{rcm}}^2$$

$$v_{\text{rcm}} = \sqrt{\frac{2K_{\text{prom}}}{m}} = \sqrt{\frac{2(3.88 \times 10^{-2} \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{(32 \text{ u})(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/u})}} = 484 \text{ m/s}$$

35.4. La ley de las atmósferas establece que a temperatura constante, la presión p a una altura z por encima de la superficie de la Tierra se relaciona con la presión p_0 en la superficie de la misma, según

$$p = p_0 e^{-mgz/kT} \quad (1)$$

Donde, m es un promedio de masa molecular. Demuestre que este resultado es una consecuencia de la ley del gas ideal.

Consideremos un pequeño volumen de gas $dV = A dz$, como se muestra en la figura 35-2. Puesto que el volumen está en equilibrio, su peso $\rho g dV$, debe ser igual a la diferencia entre las fuerzas sobre las caras horizontales:

$$\begin{aligned}\rho g dV &= [p(z) - p(z + dz)]A \\ \rho g A dz &= -A dp \\ dp &= -\rho g dz\end{aligned}$$

De la ley del gas ideal $pV = \mathcal{N}RT = NkT$, encontramos para la densidad:

$$\rho = \frac{Nm}{V} = \frac{mp}{kT}$$

Luego

$$dp = -\frac{mp}{kT} g dz \quad \text{ó} \quad \frac{dp}{p} = -\frac{mg}{kT} dz$$

Integrando y aplicando la condición de frontera $p(0) = p_0$, se obtiene la ecuación (1).

- 35.5. El *recorrido medio libre*, L , de una molécula es la distancia promedio que la molécula recorre entre dos choques consecutivos. Calcular el recorrido medio libre de una molécula en un gas a condiciones normales si el diámetro molecular es de 4 Å.

Supongamos que la molécula es una esfera de radio r que se mueve con velocidad constante promedio v , y que todas las demás moléculas del gas permanecen fijas. La molécula chocará con cualquier otra molécula, cuyo centro esté a una distancia $2r = d$ de la línea que describe el centro de la molécula que se mueve. Así, después de un tiempo t , habrá chocado con todas las moléculas que se encuentran dentro de un cilindro, cuya sección transversal tiene un área igual a πd^2 y una longitud de vt . El número de choques es entonces

$$C = n\pi d^2 vt$$

donde n es el número de moléculas por unidad de volumen. La distancia total recorrida, dividida por el número de choques, da la distancia medida entre dos choques:

$$L = \frac{vt}{C} = \frac{1}{n\pi d^2}$$

A condiciones normales, un kilomol de un gas ideal ocupa un volumen de 22.4 m³, entonces

$$n = \frac{6.023 \times 10^{26} \text{ moléculas/kmol}}{22.4 \text{ m}^3/\text{kmol}} = 2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

y

$$L = \frac{1}{(2.69 \times 10^{25} \text{ m}^{-3})\pi(4 \times 10^{-10} \text{ m})^2} = 7.40 \times 10^{-8} \text{ m} = 740 \text{ Å}$$

El cálculo anterior para L es aproximado. Un desarrollo exacto, en el cual se considera la distribución de Maxwell-Boltzmann, será tratado en el capítulo 37. De él se obtiene para L .

$$L = \frac{0.707}{n\pi d^2}$$

- 35.6. Una partícula que se encuentra suspendida en un fluido está sometida a la acción de fuerzas irregulares distribuidas al azar. Demuestre que el promedio del cuadrado del desplazamiento absoluto de la partícula en un intervalo de tiempo t es proporcional a t . Suponga que el tiempo entre las interacciones con las fuerzas al azar es mucho menor que el tiempo t y que cada vez que actúa una fuerza sobre la partícula ésta se mueve una distancia igual a su recorrido medio libre L en una dirección al azar. (La situación descrita aquí es el clásico *caminar al azar*.)

Después de N interacciones podemos escribir

$$\mathbf{X}_N \approx \mathbf{X}_{N-1} + \mathbf{L}$$

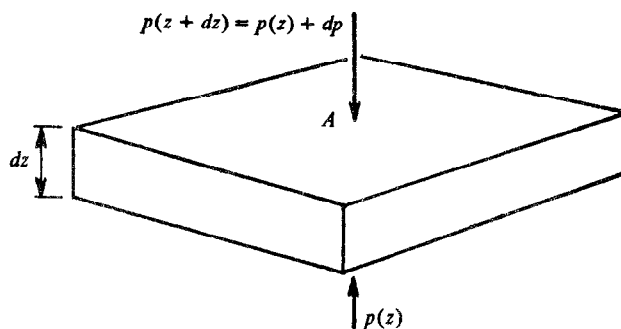


Fig. 35-2

donde \mathbf{X}_N es el vector posición después de N interacciones. Efectuando el producto escalar de \mathbf{X}_N consigo mismo, obtenemos,

$$\mathbf{X}_N \cdot \mathbf{X}_N = X_N^2 = X_{N-1}^2 + L^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{N-1}$$

Si promediamos esta expresión para X_N^2 sobre todas las posibles direcciones de \mathbf{L} , el término

$$2\mathbf{L} \cdot \mathbf{X}_{N-1} = 2LX_{N-1} \cos \theta$$

da como promedio cero, puesto que todas las direcciones de \mathbf{L} relativas a \mathbf{X}_{N-1} son igualmente probables. Así

$$(X_N^2)_{\text{prom}} = (X_{N-1}^2)_{\text{prom}} + L^2$$

que, junto con el valor inicial $(X_0^2)_{\text{prom}} = 0$, implica que

$$(X_N^2)_{\text{prom}} = NL^2$$

Se observa que $(X_N^2)_{\text{prom}}$ es directamente proporcional al número de choques, N , que a su vez es directamente proporcional al tiempo t :

$$(X_N^2)_{\text{prom}} = NL^2 = \alpha t$$

La cantidad $(X^2)_{\text{prom}}$ puede medirse experimentalmente a partir de la observación de la única partícula de la cual se ha hecho un elevado número de observaciones en intervalos de tiempo de duración t (figura 35-3); o lo que es equivalente, a la observación de r partículas durante un único intervalo de tiempo de duración t .

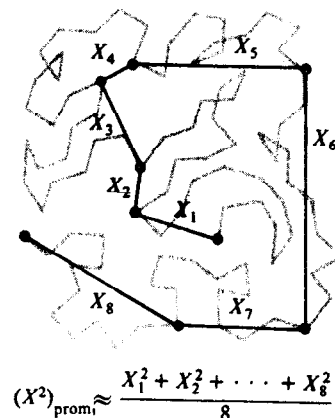


Fig. 35-3

- 35.7. Supongamos que la molécula del problema 35.5 tiene una velocidad de 454 m/s y que se mueve al azar una distancia igual a su recorrido medio libre cada vez que sufre un choque. ¿Cuál será la raíz cuadrada media del desplazamiento después de 10 segundos?

De la diferencia de recorrido medio libre, el número de choques N será igual a la distancia vt recorrida en un tiempo t , dividida por el recorrido medio libre L : $N = vt/L$. Reemplazando este valor en el resultado del problema 35.6, obtenemos

$$X_{\text{rcm}} = N^{1/2}L = \sqrt{vtL} = \sqrt{(454 \text{ m/s})(10 \text{ s})(7.40 \times 10^{-8} \text{ m})} = 1.83 \times 10^{-2} \text{ m} = 1.83 \text{ cm}$$

- 35.8. El *movimiento browniano* tiene lugar cuando una partícula suspendida en un fluido se mueve cuando es bombardeada al azar por las moléculas que integran el fluido. A partir de las leyes de Newton, demuestre que el promedio del cuadrado del desplazamiento de la partícula después de un tiempo t es de la forma

$$(X^2)_{\text{prom}} = \frac{6kT}{\mu} t$$

donde μ es la medida de la fuerza de viscosidad ejercida por el fluido sobre la partícula.

Consideremos en primer lugar un movimiento unidimensional. Entre las fuerzas que obran sobre la partícula se encuentra una fuerza de arrastre que depende de la viscosidad del líquido y que es proporcional a la velocidad de la partícula $F_{\text{vis}} = -\mu(dx/dt)$. El número μ debe ser considerado como un valor dado, puesto que puede medirse directamente (por ejemplo, a partir de la observación de la velocidad final de la partícula que se encuentra bajo la influencia de una fuerza externa conocida).

Supongamos que además de la fuerza de arrastre debida a la viscosidad, la partícula experimenta una fuerza externa al azar, F_r . De la segunda ley de Newton obtenemos (despreciando el peso de la partícula)

$$F_r - \mu \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Para calcular $(x^2)_{\text{prom}}$ procedemos como sigue: En primer lugar multiplicamos la ecuación anterior por x y promediamos para obtener

$$(xF_r)_{\text{prom}} = m \left(x \frac{d^2x}{dt^2} \right)_{\text{prom}} + \mu \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} \quad (1)$$

Ahora, siendo F_r , una fuerza completamente al azar, no se encuentra relacionada con la posición x de la partícula. Para un valor de x dado, todos los valores, tanto positivos como negativos, de F_r , son igualmente posibles; por lo tanto, el valor promedio de $x F_r$ será cero $(x F_r)_{\text{prom}} = 0$. Por otra parte, de la identidad

$$x \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

se concluye que

$$\left(x \frac{d^2 x}{dt^2} \right)_{\text{prom}} = \left[\frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) \right]_{\text{prom}} - \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]_{\text{prom}} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} - \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]_{\text{prom}}$$

ya que el promedio no se ha considerado sobre el tiempo sino sobre la distribución al azar de F_r . Reemplazando estos valores en la ecuación (1) se obtiene

$$0 = m \frac{d}{dt} \left[\left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} \right] - m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]_{\text{prom}} + \mu \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} \quad (2)$$

El segundo miembro de esta ecuación puede escribirse así:

$$m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]_{\text{prom}} = m (v_x^2)_{\text{prom}} = m \frac{1}{3} (v^2)_{\text{prom}} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} m (v^2)_{\text{prom}} \right] = kT$$

utilizando (35.8); la ecuación (2) da

$$kT = m \frac{d}{dt} \left[\left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} \right] + \mu \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} \quad (3)$$

Si definimos

$$f \equiv \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}}$$

la ecuación (3) nos da la siguiente ecuación diferencial para f :

$$m \frac{df}{dt} + \mu f = kT \quad (4)$$

Por sustitución directa puede verificarse que la solución de la ecuación (4) es

$$f = \frac{kT}{\mu} + A e^{-\frac{\mu}{m} t} \quad (5)$$

Para masas pequeñas utilizadas en experimentos de movimiento browniano, la relación μ/m es de aproximadamente 10^4 s^{-1} ; por lo tanto, el término exponencial que aparece en la ecuación (5) tiende a cero muy rápidamente. Si suponemos que este término es despreciable tenemos

$$f = \left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} = \frac{kT}{\mu}$$

Esta ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$\left(x \frac{dx}{dt} \right)_{\text{prom}} = \left[\frac{1}{2} \frac{d(x^2)}{dt} \right]_{\text{prom}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [(x^2)_{\text{prom}}] = \frac{kT}{\mu}$$

luego

$$(x^2)_{\text{prom}} = \frac{2kT}{\mu} t$$

aquí hemos supuesto que en $t = 0$, $(x^2)_{\text{prom}} = 0$. Finalmente, podemos extender este resultado a tres dimensiones utilizando

$$(x^2)_{\text{prom}} = (y^2)_{\text{prom}} = (z^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{3} (X^2)_{\text{prom}}$$

para obtener

$$(X^2)_{\text{prom}} = \frac{6kT}{\mu} t$$

Esta es la misma ecuación que se obtuvo en el problema 35.6, si hacemos $\alpha = 6kT/\mu$.

Puesto que μ es conocida, mediante mediciones de $(X^2)_{\text{prom}}$ durante intervalos fijos de tiempo t y a temperatura T , es posible determinar la constante de Boltzmann, K . J. Perrin fue quien primero utilizó el estudio del movimiento browniano para obtener el valor de número de Avogrado, N_0 , teniendo en cuenta que $N_0 = R/k$.

- 35.9.** Dos recipientes idénticos A y B se llenan con un mismo gas a una misma presión; sin embargo, la raíz cuadrada media de la velocidad v_B , de las moléculas en el recipiente B es mayor que la raíz cuadrada media de la velocidad v_A , de las moléculas en A . Si durante un intervalo corto de tiempo se abre una válvula para comunicar los dos recipientes, describa lo que ocurre desde el punto de vista de la teoría cinética.

Inicialmente se cree que con presiones iguales no ocurrirá nada al comunicar los dos recipientes. Sin embargo, esto no es así. El número de choques con la pared por unidad de tiempo N , que es proporcional al número de partículas por unidad de tiempo que se mueven a través de la válvula una vez que esta ha sido abierta, se demostró en el problema 35.1 que es proporcional al producto nv , donde n es el número de partículas por unidad de volumen. Por lo tanto,

$$\frac{\dot{N}_A}{\dot{N}_B} = \frac{n_A v_A}{n_B v_B}$$

Inicialmente, $p_A = p_B$, y la ecuación (35.1) da $n_A v_A^2 = n_B v_B^2$; luego,

$$\frac{\dot{N}_A}{\dot{N}_B} = \frac{v_B}{v_A} > 1$$

lo cual indica que inicialmente un número mayor de partículas se mueve de A hacia B que de B hacia A . Además, la energía a través de la válvula está dada por

$$\dot{E} \propto \dot{N} \times (\text{energía promedio por partícula}) = \dot{N} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

utilizando de nuevo la ecuación (35.1),

$$\frac{\dot{E}_B}{\dot{E}_A} = \frac{\dot{N}_B}{\dot{N}_A} \frac{(\frac{1}{2} m v^2)_B}{(\frac{1}{2} m v^2)_A} = \frac{n_B v_B}{n_A v_A} \frac{v_A}{v_B} = \frac{v_B}{v_A} > 1$$

y la energía fluye del recipiente B al recipiente A .

En consecuencia, el sistema no está en equilibrio con respecto a la masa ni a la energía bajo las condiciones iniciales. Para garantizar una situación de equilibrio, es decir, para que $\dot{N}_A = \dot{N}_B$ y $\dot{E}_A = \dot{E}_B$, las raíces cuadradas medias de las velocidades deben ser iguales, $v_A = v_B$. Puesto que la temperatura es proporcional al cuadrado de la raíz cuadrada media de la velocidad se ve que, para una situación en equilibrio, las temperaturas de ambos gases deben ser iguales.

- 35.10.** Supongamos que en vez de tener una válvula en el problema 35.9, los dos recipientes están separados por una pared que aunque se encuentre restringida para moverse una distancia considerable puede vibrar sin fricción entre los dos recipientes. Haga una discusión de lo que ocurre bajo las condiciones iniciales dadas en el problema 35.9

Inicialmente,

$$\frac{\dot{E}_B}{\dot{E}_A} = \frac{v_B}{v_A} > 1$$

lo cual demuestra que la pared será golpeada con más violencia sobre el lado B que sobre el lado A . En consecuencia, la pared vibra de tal manera que las moléculas al lado de B pierden energía, mientras que las moléculas al lado de A ganan energía. El equilibrio se obtiene cuando $\dot{E}_B = \dot{E}_A$, y el movimiento mecánico de la pared transmita tanta energía de B hacia A como de A hacia B . Esta transmisión de energía por medios mecánicos a través de la pared corresponde a un "flujo de calor" entre los dos recipientes. El equilibrio se obtiene cuando no existe flujo de calor neto y esto sucede cuando se logre la misma temperatura en A y en B .

Problemas suplementarios

- 35.11. Se tienen recipientes que contienen O_2 , CO_2 , F_2 y He , todos ellos a la misma temperatura. Hallar las relaciones de sus raíces cuadradas medias de las velocidades a la raíz cuadrada media de la velocidad del H_2 a la misma temperatura. *Resp.* 0.354; 0.267; 0.324; 0.707

- 35.12. A partir de la teoría cinética demuestre que $(v_{\text{rcm}})_2 = 3p/\rho$, donde ρ es la densidad del gas ideal.

- 35.13. Sea w una magnitud física que tiene un valor promedio. A partir de la identidad

$$(w - w_{\text{prom}})^2 = w^2 - 2ww_{\text{prom}} + (w_{\text{prom}})^2$$

demuestre que

$$w_{\text{rcm}} \geq w_{\text{prom}}$$

- 35.14. Una persona abre una cuenta bancaria con balance inicial cero. Cada mañana durante un año la persona lanza al aire una moneda: si la moneda cae cara, deposita \$1.00 y si cae sello, retira \$1.00 (o toma prestado \$1.00 del banco). (a) ¿Cuáles son los límites absolutos para su balance final? (b) ¿Cuál es su balance final esperado? (c) ¿Cuáles son los límites más posibles (raíz cuadrada media) para su balance final?
Resp. (a) $\pm \$365$; (b) 0; (c) $\pm \$19.10$

- 35.15. Calcular a qué altura sobre la superficie de la Tierra la presión ha descendido a la mitad del valor que tiene sobre la superficie. Suponga que la temperatura es constante y su valor es 273 °K y considere un promedio de masa por molécula de aire de 48.5×10^{-27} kg. *Resp.* 5.49 km;

- 35.16. ¿Cuántos choques por segundo son realizados por la molécula del problema 35.5 si su velocidad promedio es de 454 m/s? *Resp.* 6.14×10^9

Capítulo 36

Funciones de distribución

En el capítulo 35 encontramos que en un gas ideal de N moléculas, cada una de masa m , la presión p se relaciona con el volumen mediante la siguiente ecuación

$$pV = \frac{2}{3} N \left[\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle_{\text{prom}} \right]$$

donde el valor promedio del cuadrado de la velocidad está dado por

$$\langle v^2 \rangle_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2 n_i \quad (36.1)$$

En este capítulo describiremos los métodos utilizados para calcular el valor promedio de una magnitud física. En repetidas ocasiones nos referiremos a la magnitud específica v^2 , aunque los métodos sean aplicados a otras magnitudes.

36.1 FUNCIONES DE DISTRIBUCION DISCRETA

Para determinar el valor promedio de una magnitud física en un sistema, debemos en primer lugar identificar las variables fundamentales de las cuales depende la magnitud. Supongamos, por ejemplo, que deseamos determinar el valor promedio de la energía cinética, o lo que es lo mismo, el valor promedio del cuadrado de la velocidad v de la partícula en el sistema. Sean v_1, v_2, v_3, \dots puntos que dividen el rango total de v en intervalos igualmente espaciados de longitud Δv (figura 36-1). Fuera de las N partículas en el sistema existirá, en condiciones de equilibrio, un número definido de ellas con velocidades que se encuentran dentro de cada intervalo. Sea n_i el número de partículas con velocidades entre v_i y $v_i + \Delta v = v_{i+1}$. Para representar gráficamente este hecho podríamos graficar n_i contra v . Por razones que aparecerán más adelante, dividiremos n_i por el valor del intervalo Δv y graficamos la relación $f_i \equiv n_i / \Delta v$ para obtener el histograma indicado en la figura 36-1. Puesto que la ordenada f_i es el número de partículas por unidad de velocidad, el número de partículas n_i es igual al *área* del i -ésimo rectángulo:

$$n_i = f_i \Delta v \quad (36.2)$$

Como el número total de partículas N debe ser igual a la suma de todos los n_i , tenemos la *condición de normalización* mediante la cual la suma de las áreas de todos los rectángulos, es decir, el área total bajo el histograma da el número total de partículas:

$$N = \sum_i f_i \Delta v \quad (36.3)$$

En términos generales, el número de partículas con velocidades entre v_α y v_β está determinado por el área bajo la curva entre esos dos valores.

El histograma de las ordenadas f_i se denomina *función de distribución* para las velocidades de la partícula. (En términos estadísticos, los números $f_i \Delta v$ se denominan *frecuencias* y se habla entonces de una *distribución de frecuencia*.) En términos de función de distribución, la ecuación (36.1) puede escribirse así:

$$\langle v^2 \rangle_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \sum_i v_i^2 f_i \Delta v \quad (36.4)$$

De manera análoga, el valor promedio de cualquier magnitud que dependa de la velocidad puede escribirse en términos de la función de distribución de velocidad f_i .

Obsérvese que las sumatorias como las que aparecen en la ecuación (36.4) no se extienden en general de 1 a N . La sumatoria depende del número de intervalos escogidos y no del número de partículas.

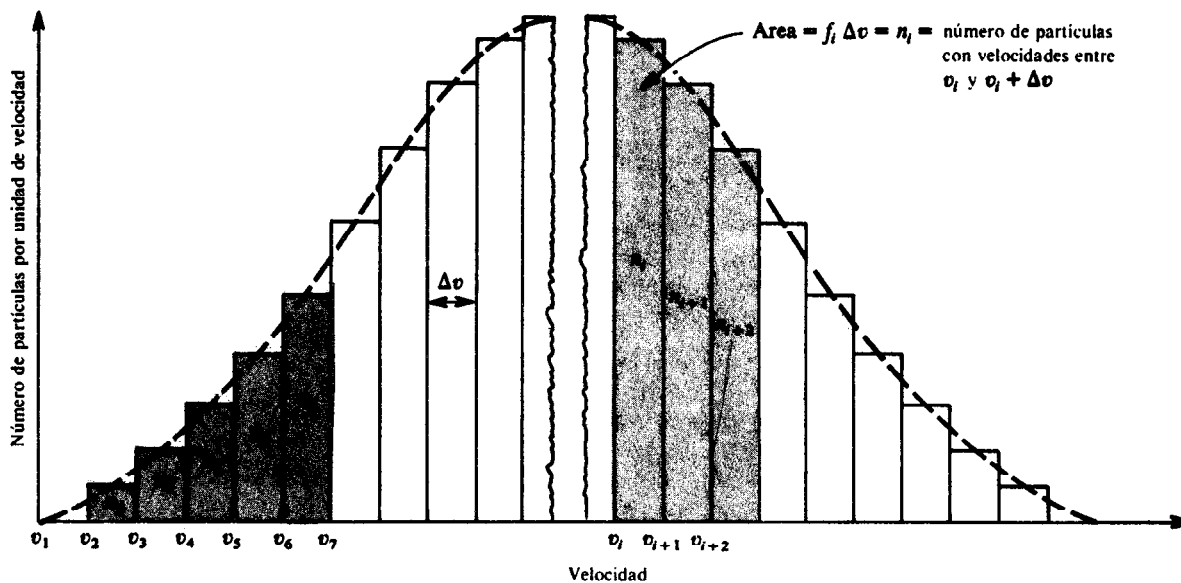


Fig. 36-1

36.2 FUNCIONES DE DISTRIBUCION CONTINUA

En muchos casos el número total de partículas, N , es muy grande y se presentan muchos choques por unidad de tiempo y con ello las velocidades pueden considerarse como si variaran continuamente. En este caso, podemos suponer que el rango de velocidad Δv se aproxima a cero: $\Delta v \rightarrow dv$. La gráfica de la figura 36-1 aparece entonces con muchos más rectángulos, cada uno de ellos más angosto y la mayoría de ellos todavía encaja bajo la curva punteada. El número de partículas, dn , con velocidad entre v y $v + dv$ es igual al área de un rectángulo infinitesimal y se obtiene de la ecuación (36.2) como

$$dn = f(v) dv$$

Aquí $f(v)$ es la distribución continua de la función indicada por la curva punteada en la figura 36-1.

En este límite todas las sumas discretas se convierten en integrales definidas. Por ejemplo, la condición de normalización dada en la ecuación (36.3) se convierte en

$$N = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} f(v) dv \quad (36.5)$$

y la ecuación (36.4) para el valor promedio del cuadrado de la velocidad aparece como

$$(v^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v^2 f(v) dv \quad (36.6)$$

36.3 FUNCIONES DE DISTRIBUCION FUNDAMENTAL Y DENSIDAD DE ESTADOS

Se ha encontrado que tanto para las leyes de la física clásica como para las de la física cuántica, existen funciones de distribución fundamentales a partir de las cuales se pueden obtener todas las demás funciones de distribución. Una función de distribución fundamental describe cómo se encuentran distribuidas, en promedio, las partículas en un sistema entre todos los *estados* disponibles del mismo. Dicho de otra manera, una función de distribución fundamental describe, para cada estado, la *probabilidad* de encontrar una partícula en ese estado.

El estado de una partícula se define mediante el mínimo conjunto de variables necesarias para describir completamente el movimiento de la partícula. Como ejemplo, desde el punto de vista clásico para interacción débil de partículas, el estado de una partícula está completamente definido al dar las tres componentes de su velocidad (v_x, v_y, v_z), o también, puesto que $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, con las tres componentes del momentum (p_x, p_y, p_z).

La función de distribución fundamental para sistemas que se rigen por las leyes clásicas se denomina *función de distribución de Maxwell-Boltzmann*, F_{MB} . (Anotamos las funciones de distribuciones fundamentales con letras mayúsculas.) La función de distribución de Maxwell-Boltzmann se define de tal manera que

$$dn_v = F_{MB} dv_x dv_y dv_z \quad (36.7)$$

sea el número promedio de partículas, cuyas componentes de velocidad se encuentran en los intervalos v_x y $v_x + dv_x$, v_y y $v_y + dv_y$, v_z y $v_z + dv_z$.

En los capítulos siguientes encontraremos que en la mecánica clásica y cuántica las funciones de distribución fundamental tienen un punto en común: todas ellas dependen solamente de la energía del estado y no de las magnitudes que definen el estado. Gracias a esta propiedad es posible escribir, por ejemplo, la distribución de energía de la partícula en la forma

$$dn_E = Fg(E) dE \quad (36.8)$$

En esta ecuación, la función de distribución fundamental F es el factor estadístico que describe la probabilidad de encontrar una partícula en un estado de energía E y $g(E)$ se denomina la *densidad de estados* (con respecto a la energía). La magnitud $g(E) dE$ da el número de estados dS_E , con energías comprendidas en el intervalo E y $E + dE$:

$$dS_E = g(E) dE \quad (36.9)$$

En sistemas de interacción débil, la energía total E de una partícula es igual a su energía cinética, en consecuencia:

$$E = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (36.10)$$

Por lo tanto, existen varios estados diferentes (v_x, v_y, v_z) que tienen la misma energía.

En términos generales, si una variable dinámica q depende únicamente de la energía, el número de partículas con valores entre q y $q + dq$ puede escribirse siempre en la forma

$$dn_q = Fg(q) dq \quad (36.11)$$

que contiene un factor estadístico F , el cual conserva la misma forma para una estadística dada (v.g. $F = F_{MB}$ en estadística clásica), y un factor de densidad de estados $g(q)$, que depende de la propiedad física particular que se está considerando. La variable q puede ser la velocidad, la energía [como en la ecuación (36.8)], o la magnitud del momentum.

Problemas resueltos

- 36.1. En cierto momento se encuentra que en un mol de un gas 4782 moléculas tienen velocidades comprendidas entre 495 m/s y 505 m/s. ¿Cuál es el valor de la función de distribución de velocidad a la velocidad de 500 m/s?

La función de distribución de velocidad f_v , se define por medio de

$$dn_v = f_v dv \quad \text{ó} \quad f_v = \frac{dn_v}{dv} \approx \frac{\Delta n_v}{\Delta v}$$

De los datos del problema, $\Delta n_v = 4782$ moléculas y $\Delta v = 505 \text{ m/s} - 495 \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$, por lo tanto

$$f_v = f_{500 \text{ m/s}} = \frac{4782 \text{ moléculas}}{10 \text{ m/s}} = 478.2 \frac{\text{moléculas}}{\text{m/s}}$$

36.2. En la tabla 36-1 aparecen las velocidades de las partículas en un cierto sistema y en un tiempo dado.

Tabla 36-1

Intervalo de velocidad, m/s	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
Número de partículas	1	0	0	1	3	0	2	1
Velocidad	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
Número	5	1	6	4	2	8	0	2
Velocidad	80-85	85-90	90-95	95-100	sobre 100			
Número	3	0	0	1	0			

Haga un gráfico de la función de distribución de velocidad a intervalos de 20 m/s y partiendo de 0 m/s.

Para intervalos finitos de velocidad, la función de distribución de velocidad está definida por

$$f_v = \frac{\Delta n_v}{\Delta v}$$

donde Δn_v es el número de partículas con velocidades en el intervalo v y $v + \Delta v$. A partir de los datos encontramos los valores de f_v , los cuales aparecen en la tabla 36-2 y graficados en la figura 36-2. Las dos líneas punteadas en la figura 36-2 constituyen una aproximación continua del histograma.

Tabla 36-2

Δv , m/s	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	sobre 100
Δn_v , partículas	2	6	16	12	4	0
f_v , partículas/(m/s)	0.1	0.3	0.8	0.6	0.2	0.0

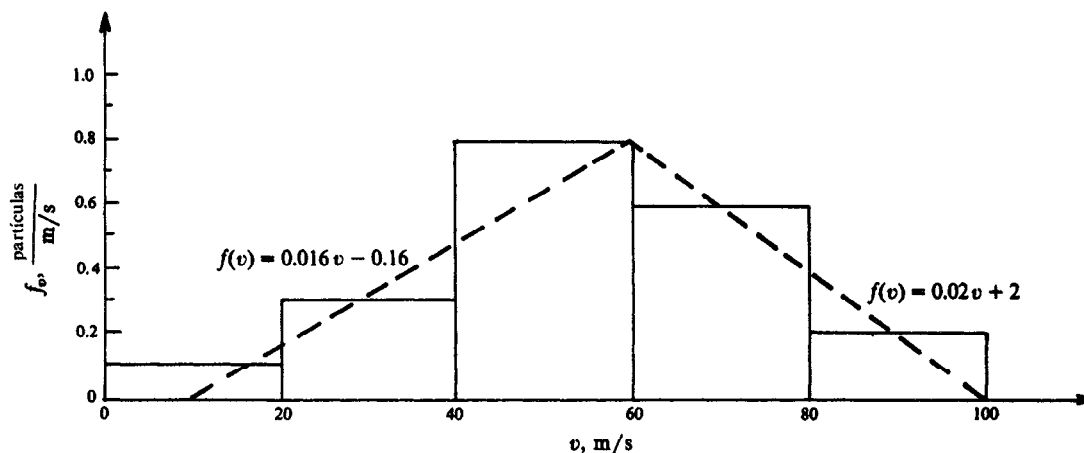


Fig. 36-2

36.3. Hallar el número de partículas en el sistema al que se refiere el problema 36.3; (a) para el histograma, (b) para la aproximación triangular.

(a) El área bajo el histograma es ($\Delta v = 20$ m/s = constante)

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_i f_{vi} \Delta v = \left(0.1 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} + 0.3 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} + 0.8 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right. \\
 &\quad \left. + 0.6 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} + 0.2 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) (20 \text{ m/s}) \\
 &= 40 \text{ partículas}
 \end{aligned}$$

(b) El área del triángulo es

$$N = \frac{1}{2}[(100 - 10) \text{ m/s}] \left(0.8 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) = 36 \text{ partículas}$$

36.4. Hallar la velocidad promedio de las partículas a las cuales se refiere el problema 36.2; (a) a partir del histograma y (b) a partir de la aproximación triangular.

(a) Utilizando el valor $N = 40$ partículas encontrado en el problema 36.3(a),

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{1}{N} \sum_i v_i f_i \Delta v \\ &= \frac{1}{40 \text{ partículas}} \left[(10 \text{ m/s}) \left(0.1 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) + (30 \text{ m/s}) \left(0.3 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \right. \\ &\quad + (50 \text{ m/s}) \left(0.8 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) + (70 \text{ m/s}) \left(0.6 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \\ &\quad \left. + (90 \text{ m/s}) \left(0.2 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \right] (20 \text{ m/s}) \\ &= 55 \text{ m/s} \end{aligned}$$

(b) A partir del valor $N = 36$ partículas calculado en el problema 36.3(b),

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v f(v) dv = \frac{1}{36} \int_{10}^{60} v (0.016v - 0.16) dv + \frac{1}{36} \int_{60}^{100} v (-0.02v + 2) dv \\ &= \frac{1}{36} \left[0.016 \frac{v^3}{3} - 0.16 \frac{v^2}{2} \right]_{10}^{60} + \frac{1}{36} \left[-0.02 \frac{v^3}{3} + 2 \frac{v^2}{2} \right]_{60}^{100} \\ &= 56.7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

36.5. Hallar la raíz cuadrada media de la velocidad de las partículas del problema 36.2; (a) del histograma, (b) de la aproximación triangular.

(a) Por definición, $v_{\text{rcm}} = \sqrt{(v^2)_{\text{prom}}}$. Con $N = 40$ partículas del problema 36.3(a),

$$\begin{aligned} (v^2)_{\text{prom}} &= \frac{1}{N} \sum_i v_i^2 f_i \Delta v \\ &= \frac{1}{40 \text{ partículas}} \left[(10 \text{ m/s})^2 \left(0.1 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) + (30 \text{ m/s})^2 \left(0.3 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \right. \\ &\quad + (50 \text{ m/s})^2 \left(0.8 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) + (70 \text{ m/s})^2 \left(0.6 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \\ &\quad \left. + (90 \text{ m/s})^2 \left(0.2 \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}} \right) \right] (20 \text{ m/s}) \\ &= 3420 (\text{m/s})^2 \end{aligned}$$

de donde $v_{\text{rcm}} = 58.5 \text{ m/s}$. Obsérvese que la v_{rcm} excede a la v_{prom} calculada en el problema 35.13.

(b) Con $N = 36$ partículas, del problema 36.3(b),

$$\begin{aligned} (v^2)_{\text{prom}} &= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv = \frac{1}{36} \int_{10}^{60} v^2 (0.016v - 0.16) dv + \frac{1}{36} \int_{60}^{100} v^2 (-0.02v + 2) dv \\ &= \frac{1}{36} \left[0.016 \frac{v^4}{4} - 0.16 \frac{v^3}{3} \right]_{10}^{60} + \left[-0.02 \frac{v^4}{4} + 2 \frac{v^3}{3} \right]_{60}^{100} \\ &= 3550 (\text{m/s})^2 \end{aligned}$$

luego $v_{\text{rcm}} = 59.6 \text{ m/s}$.

- 36.6. Encontrar el número de estados clásicos, dS_v , en el intervalo de velocidad comprendido entre v y $v + dv$ y con ello demuestre que la densidad de estados $g(v)$, tiene la forma $g(v) \propto v^2$.

Para determinar la relación entre los estados y la velocidad conviene utilizar un sistema de coordenadas en el que los tres ejes sean v_x , v_y y v_z . Un sistema de coordenadas como este, donde las componentes de la velocidad se grafican a lo largo de los tres ejes, se denomina "espacio de velocidad". Un valor de la velocidad de la partícula aparece entonces como un punto en este espacio de velocidad, (v_x, v_y, v_z) . Puesto que cada conjunto (v_x, v_y, v_z) define un estado de la partícula, se ve que cada punto en el espacio de velocidad corresponde a un estado de la partícula. Consideremos ahora un elemento infinitesimal de "volumen" $dV_v = dv_x dv_y dv_z$ en el espacio de velocidad como se indica en la figura 36-3. Aunque no es posible determinar el número exacto de puntos dentro del elemento de volumen (esto depende de la definición de "punto"), el número de puntos es proporcional al tamaño del elemento de volumen y como a cada punto (v_x, v_y, v_z) le corresponde un estado de la partícula, el número de estados, dS_v , determinado por el elemento de volumen también será proporcional al tamaño del elemento de volumen y, por lo tanto, podemos escribir:

$$dS_v = C dV_v = C dv_x dv_y dv_z$$

En el diagrama espacial de velocidad, $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2 = \text{constante}$ es una "esfera" de "radio" v , por lo tanto, todos los puntos que se encuentran sobre esta esfera corresponden a partículas que tienen la misma velocidad v . Si consideramos ahora partículas con velocidades combinadas entre v y $v + dv$, los puntos correspondientes en el espacio de velocidad asociada se encuentran en una concha esférica, determinada por las esferas de radio v y $v + dv$, cuyo volumen es

$$dV = 4\pi v^2 dv$$

El número de estados, dS_v , que corresponde a las velocidades que se encuentran dentro de este elemento de volumen es proporcional al tamaño del elemento de volumen, por lo tanto

$$dS_v = C dV = C 4\pi v^2 dv$$

La densidad de estados está definida como $dS_v = g(v) dv$; y de ahí

$$g(v) = C 4\pi v^2$$

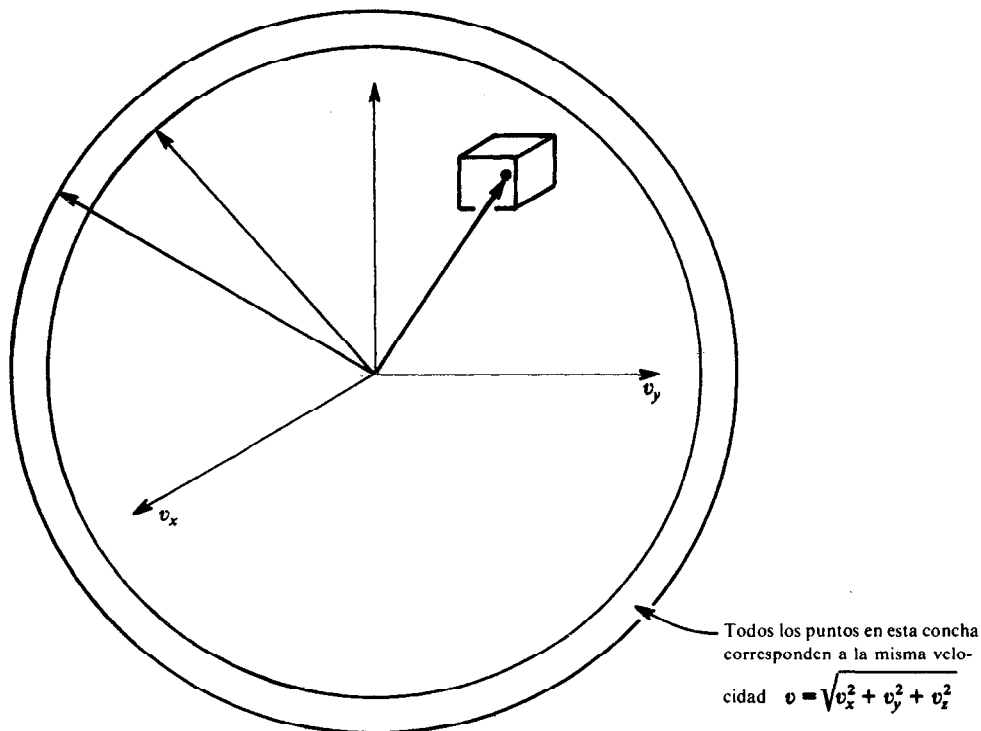


Fig. 36-3

- 36.7. Hallar el número de estados clásicos $dS_E = g(E) dE$, en el intervalo de energía comprendido entre E y $E + dE$, y a partir de ello demuestre que la densidad de estados $g(E)$ tiene la forma $g(E) \propto E^{1/2}$.

Puesto que $E = \frac{1}{2}mv^2$, un intervalo de velocidad dv se relaciona con un intervalo de energía dE mediante

$$dE = mv dv \quad \text{ó} \quad dv = \frac{dE}{mv} = \frac{dE}{\sqrt{2mE}}$$

Además, el número de estados en el intervalo de energía dE debe ser igual al número de estados en el correspondiente intervalo de velocidad dv , luego, del problema 36.6,

$$dS_E = dS_v = C4\pi v^2 dv = C4\pi \left(\frac{2E}{m} \right) \left(\frac{dE}{\sqrt{2mE}} \right) = \frac{4\pi C}{m^{3/2}} \sqrt{2} E^{1/2} dE = DE^{1/2} dE$$

Entonces, la densidad de estados en el intervalo de energía E y $E + dE$ es $g(E) = DE^{1/2}$.

Problemas suplementarios

- 36.8. Si en el sistema descrito en el problema 36.2 cada partícula tiene una masa de 0.002 kg, encontrar: (a) la energía promedio por partícula y (b) la energía total del sistema. Utilice la distribución del histograma.
 Resp. (a) 3.42 J; (b) 136.8 J
- 36.9. Repita el problema 36.8 utilizando la aproximación triangular de la figura 36-2.
 Resp. (a) 3.55 J; (b) 127.8 J
- 36.10. Utilizando la aproximación triangular de la figura 36-2, hallar el número de partículas con velocidades comprendidas entre 20 m/s y 80 m/s. Compare este resultado con el resultado obtenido de la tabla 36-2.
 Resp. 31.2 partículas; 34 partículas

- 36.11. La función de distribución de velocidad para cierto sistema de partículas es

$$f(v) = v(500 - v) \text{ partículas/(m/s)}$$

donde v puede variar entre 0 m/s y 500 m/s. La masa de cada partícula es 2×10^{-12} kg. Calcular: (a) la velocidad promedio por partícula; (b) la energía promedio por partícula; (c) la energía total del sistema.

Resp. (a) 250 m/s; (b) 7.51×10^{-8} J; (c) 1.56 J

- 36.12. Para velocidades entre $v = 0$ m/s a $v = 10^3$ m/s la función de distribución de velocidad por grupos de partículas es

$$f(v) = (5 \times 10^{20}) \sin \frac{\pi v}{10^3} \frac{\text{partículas}}{\text{m/s}}$$

y $f(v) = 0$ para velocidades superiores a 10^3 m/s. Calcular el número de partículas en el sistema.

Resp. 3.18×10^{23}

- 36.13. ¿Cuál es la velocidad promedio de las partículas del problema 36.12? Resp. 500 m/s

- 36.14. ¿Cuál es la raíz cuadrada media de la velocidad de las partículas del problema 36.12? Resp. 545 m/s

- 36.15. Si el número de estados clásicos en el intervalo de momentum comprendido entre p y $p + dp$ es $dS_p = g(p) dp$, encontrar la forma de la densidad de estados $g(p)$. Resp. $g(p) = Kp^2$ ($K = \text{constante}$)

Capítulo 37

Estadística clásica: La distribución de Maxwell-Boltzmann

Para sistemas de partículas que se rigen por leyes clásicas el número promedio de partículas dn_v , cuyas componentes de velocidad se encuentran entre v_x y $v_x + dv_x$, v_y y $v_y + dv_y$, v_z y $v_z + dv_z$ está dado por

$$dn_v = F_{MB} dv_x dv_y dv_z \quad (37.1)$$

La función de distribución de Maxwell-Boltzmann, F_{MB} , que es proporcional a la probabilidad de encontrar a la partícula en el estado (v_x, v_y, v_z) , tiene la siguiente forma

$$F_{MB} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-E/kT} \quad (37.2)$$

(una deducción aparece en los problemas 37.13 a 37.17). Aquí N es el número total de partículas, m es la masa de cada partícula, k la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta.

Como se discutió en la sección 36.3, si una propiedad q depende solamente de la energía, el número de partículas para las cuales los valores de la propiedad se encuentran entre q y $q + dq$ está dada por

$$dn_q = F_{MB} g(q) dq \quad (37.3)$$

donde $g(q)$ es la densidad de estados. Para $q = v$, tenemos (ver problemas 36.6 y 37.3)

$$g(v) = C 4\pi v^2 = 4\pi v^2 \quad (37.4)$$

y para $q = E$, tenemos (ver problemas 36.7 y 37.2)

$$g(E) = DE^{1/2} = \frac{2^{5/2}\pi}{m^{3/2}} E^{1/2} \quad (37.5)$$

Las integrales

$$I_n(\alpha) \equiv \int_0^\infty u^n e^{-\alpha u^2} du \quad (\alpha > 0)$$

generalmente surgen de las aplicaciones de la distribución de Maxwell-Boltzmann. En la tabla 37-1 aparecen los valores hasta $n = 5$.

Tabla 37-1

n	0	1	2	3	4	5
$I_n(\alpha)$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$	$\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}}$	$\frac{1}{2\alpha^2}$	$\frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}}$	$\frac{1}{\alpha^3}$

Problemas resueltos

- 37.1.** Demuestre que la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (37.2) está normalizada para un sistema de N partículas.

El número total de partículas está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_{MB} dv_x dv_y dv_z = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/2kT} dv_x dv_y dv_z$$

La integral triple del lado derecho es el producto de tres integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mq^2/2kT} dq = 2 \int_0^{\infty} e^{-mq^2/2kT} dq = 2I_0 \left(\frac{m}{2kT} \right)$$

Entonces, de la tabla 37-1, el número total de partículas es

$$N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\frac{2\pi kT}{m} \right)^{3/2} = N$$

- 37.2.** Calcular la constante D que aparece en la ecuación para densidad de estados de energía, $g(E) = DE^{1/2}$ (ver problema 36.7).

Tenemos

$$dn_E = F_{MB} g(E) dE = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-E/kT} DE^{1/2} dE$$

Puesto que el número total de partículas es N ,

$$N = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} D \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} D \left[2I_2 \left(\frac{1}{kT} \right) \right] = N \frac{m^{3/2} D}{2^{5/2} \pi}$$

aquí hemos cambiado la variable de integración E por $u = \sqrt{E}$ y además se ha utilizado la tabla 37-1. Así,

$$D = \frac{2^{5/2} \pi}{m^{3/2}}$$

La función de distribución de energía f_E está definida por $dn_E = f_E dE$. Del cálculo anterior,

$$f_E = F_{MB} g(E) = \frac{2N}{\pi^{1/2} (kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT}$$

- 37.3.** Calcular la constante C en la ecuación para la densidad de estados de la velocidad, $g(v) = C4\pi v^2$ (ver problema 36.6).

Para el número de partículas con velocidades en el intervalo dv se tiene:

$$dn_v = F_{MB} g(v) dv$$

Esto debe ser igual al número de partículas, $dn_E = F_{MB} g(E) dE$, en el correspondiente intervalo de energía dE . A partir de $E = \frac{1}{2}mv^2$,

$$dE = mv dv = \sqrt{2mE} dv$$

Luego,

$$F_{MB} g(v) dv = F_{MB} g(E) \sqrt{2mE} dv \quad \text{ó} \quad g(v) = g(E) \sqrt{2mE}$$

Puesto que $g(v) = C4\pi v^2 = C8\pi E/m$ y $g(E) = DE^{1/2}$ (problema 37.2),

$$C \frac{8\pi E}{m} = D 2^{1/2} m^{1/2} E$$

$$C = \frac{m^{3/2}}{2^{5/2} \pi} D = 1$$

La función de distribución de velocidad, f_v , se define mediante $dn_v = f_v dv$. Del cálculo anterior,

$$f_v = F_{MB} (4\pi v^2) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}$$

37.4. Calcular la raíz cuadrada media de la velocidad para una distribución de Maxwell-Boltzmann.

El valor promedio del cuadrado de la velocidad es

$$(v^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \int v^2 dn_v = \frac{1}{N} \int_0^\infty v^2 f_v dv$$

Reemplazando el valor de f_v obtenido en el problema 37.3, se tiene

$$(v^2)_{\text{prom}} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} I_4 \left(\frac{m}{2kT} \right) = \frac{3kT}{m}$$

y así,

$$v_{\text{rem}} = \sqrt{(v^2)_{\text{prom}}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

resultado éste que concuerda con la teoría cinética [ver ecuación (35.8)].

37.5. Hallar la relación entre la *velocidad más probable*, v_p , a la raíz cuadrada media de la velocidad, v_{rem} para la distribución de Maxwell-Boltzmann.

La velocidad más probable en la distribución de Maxwell-Boltzmann es aquella para la cual $f_v = 4\pi v^2 F_{MB}$ es máxima. Derivando la ecuación obtenida en el problema 37.3,

$$\frac{df_v}{dv} = 0 = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-mv^2/2kT} v \left[2 - v^2 \left(\frac{m}{kT} \right) \right]$$

Las raíces $v = 0$ y $v = \infty$ conducen a un mínimo; por lo tanto $v_p = \sqrt{2kT/m}$, y con el resultado del problema 37.4 se obtiene,

$$\frac{v_p}{v_{\text{rem}}} = \frac{\sqrt{2kT/m}}{\sqrt{3kT/m}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.816$$

37.6. En muchos casos la energía total E de una partícula puede escribirse en la forma

$$E = \sum_{i=1}^n c_i q_i^2$$

donde los c_i son constantes y los q_i son coordenadas de posición y/o de momentum (velocidad). De la función de distribución de Maxwell-Boltzmann en la forma

$$F_{MB} = A e^{-E/kT} = A e^{-(\sum c_i q_i^2)/kT}$$

se calcula la constante A .

La condición de normalización establece que

$$\begin{aligned} N &= A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sum_{i=1}^n c_i q_i^2\right)/kT} dq_1 dq_2 \cdots dq_n \\ &= A \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 q_1^2/kT} dq_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_2 q_2^2/kT} dq_2 \right] \cdots \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_n q_n^2/kT} dq_n \right] \\ &= A \left[2I_0 \left(\frac{c_1}{kT} \right) \right] \left[2I_0 \left(\frac{c_2}{kT} \right) \right] \cdots \left[2I_0 \left(\frac{c_n}{kT} \right) \right] \\ &= A \frac{(\pi kT)^{n/2}}{(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/2}} \end{aligned}$$

con lo cual

$$A = N \frac{(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/2}}{(\pi k T)^{n/2}}$$

Obsérvese que para las tres coordenadas de velocidad, con $c_1 = c_2 = c_3 = m/2$, este resultado coincide con la constante de normalización de la ecuación (37.2).

- 37.7.** Demostrar que la energía promedio por partícula a que se refiere el problema 37.6 es igual a $\frac{1}{2} kT$ multiplicado por n , el número de términos de posición y momentum al cuadrado en la expresión para la energía. Este resultado, en el que a cada término cuadrático en la expresión de energía se agrega la cantidad $\frac{1}{2} kT$ al promedio de energía por partícula, se conoce como *Teorema de equipartición*.

En el problema 37.6 hemos demostrado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-E/kT} dq_1 dq_2 \cdots dq_n = \frac{(\pi k T)^{n/2}}{(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/2}}$$

Derivando a ambos miembros con respecto a kT se obtiene

$$\frac{1}{(kT)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-E/kT} dq_1 dq_2 \cdots dq_n = \frac{\pi^{n/2} (n/2) (kT)^{n/2-1}}{(c_1 c_2 \cdots c_n)^{1/2}} = \frac{N}{A} \frac{n/2}{kT}$$

efectuando la trasposición de términos,

$$\frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} E (A e^{-E/kT}) dq_1 \cdots dq_n = n \left(\frac{1}{2} kT \right)$$

que es el Teorema de equipartición, puesto que el miembro izquierdo representa la energía promedio de una partícula.

- 37.8.** Un modelo para una molécula térmica que puede rotar libremente, pero no puede vibrar, consiste en dos masas unidas por una barra, cuyo momento de inercia alrededor del eje que pasa por las masas es aproximadamente cero. Calcular la capacidad calorífica molar de un gas diatómico utilizando el Teorema de la equipartición.

La energía de una molécula diatómica es igual a

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} I \omega_1^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2$$

y esta ecuación tiene cinco términos cuadráticos. Del Teorema de la equipartición (problema 37.7) la energía de un mol de gas es igual a

$$E_{\text{tot}} = N_0 n \left(\frac{kT}{2} \right) = \frac{5}{2} N_0 kT$$

donde N_0 es el número de Avogadro. El calor específico molar C_V , es igual a

$$C_V = \frac{dE_{\text{tot}}}{dT} = \frac{5}{2} N_0 k = \frac{5}{2} R$$

siendo R la constante del gas ideal.

- 37.9.** Si una estructura cristalina se representa como un sistema de átomos regularmente espaciados unidos por resortes, calcular el calor específico molar utilizando el Teorema de la equipartición.

La energía de un átomo vibrante en la estructura está dada por

$$E = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2} (\kappa_x x^2 + \kappa_y y^2 + \kappa_z z^2)$$

Puesto que hay seis términos de la forma ϵq^2 , por el Teorema de la equipartición, (problema 37.7) la energía de un mol es

$$E_{\text{tot}} = N_0(6) \left(\frac{kT}{2} \right) = 3N_0kT$$

en donde N_0 es el número de Avogadro. El calor específico molar está dado por

$$C_V = \frac{dE_{\text{tot}}}{dT} = 3N_0k = 3R$$

lo cual corresponde a la ley de Dulong-Petit. Se ha encontrado experimentalmente que este resultado es correcto a altas temperaturas, pero a bajas temperaturas varía debido a efectos cuánticos. Estos efectos cuánticos serán tratados en el capítulo 38.

- 37.10.** El circuito de sintonización RLC , de alto Q , representado en la figura 37-1 (con R pequeña) se encuentra a temperatura T . Utilizando el Teorema de la equipartición, calcular el valor de la raíz cuadrada media del voltaje inducido en el inductor debido a las fluctuaciones térmicas.

La energía almacenada en la inductancia L es

$$E = \int_0^I V_L i \, dt = \int_0^I Li \, di = \frac{1}{2} LI^2$$

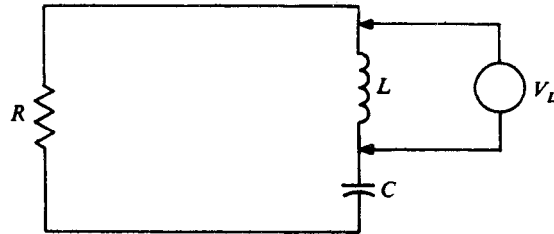


Fig. 37-1

y por el Teorema de la equipartición (problema 37.7)

$$E_{\text{prom}} = \frac{1}{2} L(I^2)_{\text{prom}} = \frac{1}{2} kT \quad (1)$$

esta respuesta obedece a que solamente existe un término cuántico en la expresión de la energía. Para un valor alto de Q en el circuito de sintonización se suprime el espectro de ruido excepto a la frecuencia de resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

por lo tanto, la corriente y el voltaje que la acompaña son sinusoidales con frecuencia angular ω_0 . Así, la magnitud del voltaje a través del inductor, V_L , se relaciona con la magnitud de la corriente I a través de él mediante

$$V_L = \omega_0 LI$$

de donde

$$(V_L^2)_{\text{prom}} = (\omega_0 L)^2 (I^2)_{\text{prom}} \quad (2)$$

Las dos ecuaciones (1) y (2) dan

$$(V_L^2)_{\text{prom}} = \omega_0^2 L kT \quad \text{ó} \quad V_{L \text{ rcm}} = \omega_0 \sqrt{LkT} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

- 37.11. Calcular la fracción N_V/N del número total de partículas N que tienen velocidades superiores a la velocidad V dada en un sistema de partículas descrito por la distribución de Maxwell-Boltzmann.

La fracción buscada está dada por

$$\frac{N_V}{N} = \frac{1}{N} \int_V^\infty dn_v = \frac{1}{N} \int_V^\infty f_v dv = \frac{1}{N} \int_V^\infty 4\pi v^2 F_{MB} dv = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_V^\infty v^2 e^{-mv^2/2kT} dv$$

Haciendo el siguiente cambio de variable

$$u^2 = \frac{mv^2}{2kT} \quad du = \sqrt{\frac{m}{2kT}} dv$$

obtenemos

$$\frac{N_V}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_U^\infty u^2 e^{-u^2} du \quad \left(U = \sqrt{\frac{m}{2kT}} V \right)$$

Integrando por partes y utilizando la tabla 37-1 con $n = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{N_V}{N} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \left[-\frac{1}{2} u e^{-u^2} \right]_U^\infty + \frac{1}{2} \int_U^\infty e^{-u^2} du \right\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} U e^{-U^2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u^2} du - \frac{1}{2} \int_0^U e^{-u^2} du \right\} \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{2} U e^{-U^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2} \int_0^U e^{-u^2} du \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} U e^{-U^2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^U e^{-u^2} du \\ &= 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} U e^{-U^2} - \text{ferr} U \end{aligned}$$

El segundo término puede evaluarse directamente y el tercero que es la *función de error* de U , se obtiene de tablas estandarizadas. En la figura 37-2 aparece un gráfico de N_V/N contra U .

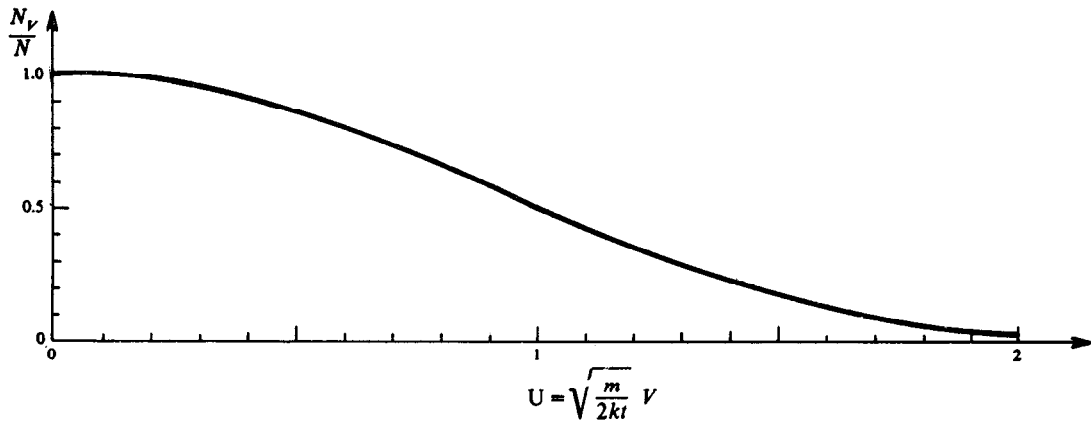


Fig. 37-2

- 37.12. En una distribución de Maxwell-Boltzmann, ¿qué porcentaje de partículas tiene velocidades por encima de la velocidad más probable, v_p ?

Del problema 37.5 la velocidad más probable es

$$V = v_p = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

lo cual corresponde a $U = 1$ en el problema 37.11. En la gráfica de la figura 37-2 encontramos que cuando $U = 1$, $N_V/N = 0.57$. Por lo tanto, un 57% de las partículas tiene velocidades por encima de v_p .

37.13. La fórmula de Stirling establece que para n grande

$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

es decir, la relación de los dos lados se aproxima a 1. Calcular el porcentaje de error ocasionado por la fórmula de Stirling para $n = 60$.

El resultado exacto para $n = 60$ es

$$\ln n! = \ln(8.321 \times 10^{81}) = 188.63$$

El resultado aproximado según la fórmula de Stirling es

$$\ln n! \approx n \ln n - n = 60(\ln 60) - 1 = 60(4.0943 - 1) = 185.66$$

El porcentaje de error, δ , en la aproximación es

$$\delta = \frac{188.63 - 185.66}{188.63} \times 100 = 1.57\%$$

Para $n = 60$ vemos que el error es solamente de un 1.57%. Cuando el valor de n es de unos 10^{23} (es decir, el número de Avogadro) el error es insignificante.

37.14. ¿De cuántas maneras se pueden colocar N partículas diferentes en r "celdas", de tal manera que n_1 partículas se alojen en la primera celda, n_2 en la segunda, ..., y n_r en la r -ésima celda ($\sum n_i = N$)?

Sea X el número de combinaciones y consideremos una cualquiera de ellas como una distribución de N partículas a lo largo de una línea recta, de tal manera que un grupo de n_1 está seguido por un grupo de n_2 ... seguido por un grupo de n_r . Si los elementos del primer grupo se permutan entre sí, obtenemos $n_1!$ distribuciones lineales diferentes de las N partículas. A su vez cada una de éstas dará lugar a $n_2!$ distribuciones debidas a las permutaciones del segundo grupo, y así sucesivamente, para un total de

$$C = n_1! n_2! \cdots n_r!$$

agrupaciones que se originan en las combinaciones escogidas. Las X combinaciones producirán XC distribuciones todas diferentes que deben agotar las $N!$ posibles agrupaciones de las N partículas. Por lo tanto,

$$XC = N! \quad \text{ó} \quad X = \frac{N!}{C} = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

37.15. En mecánica estadística se supone que una partícula dada tiene una "probabilidad intrínseca" g_i de ocupar la i -ésima celda ($\sum g_i = 1$). Por ejemplo, si las celdas representan intervalos de energía y si existe doble número de estados en ΔE_i que en ΔE_j , entonces existirá una probabilidad doble para que una partícula tenga una energía en el intervalo ΔE_i que en el intervalo ΔE_j . Con estas suposiciones, obtenga una expresión para la probabilidad de encontrar una distribución de las partículas (n_1, n_2, \dots, n_r), a las que se refiere el problema 37.14.

Supongamos que las celdas se llenan de la siguiente manera: las partículas α_1, β_1, \dots van a la celda 1; α_2, β_2, \dots van a la celda 2; etc. La probabilidad de que α_1 vaya a la celda 1 es g_1 ; la probabilidad de que α_1 y β_1 y ... vayan a la celda 1 es

$$g_1 \times g_1 \times \cdots \times g_1 = g_1^{n_1}$$

y la probabilidad de un cubrimiento total es

$$g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_r^{n_r}$$

Cada manera de realizar la distribución tiene esta probabilidad y según el problema 37.14, existen

$$\frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

formas de hacerlo. Por lo tanto, la probabilidad que buscamos es

$$P_n = \frac{N!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \cdots g_r^{n_r} \quad (1)$$

- 37.16. En mecánica estadística se supone que entre todas las distribuciones de partículas la que tiene más alta probabilidad de existir corresponde a la de equilibrio del sistema. Hallar esta distribución más probable, con relación al problema 37.15, y sujeta a las condiciones de que el número de partículas y la energía total del sistema sean constantes.

El problema consiste en obtener el máximo de

$$P_n = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots \quad (1)$$

(el número r de celdas no importa con tal de que los estados sean fijos) sujeto a las dos restricciones:

$$\text{número de partículas fijo: } \sum n_i = N \quad (2)$$

$$\text{energía total fija: } \sum E_i n_i = E_{\text{tot}} \quad (3)$$

donde N y E_{tot} están dados. La restricción de la energía supone que cada partícula en la i -ésima celda tiene la misma energía E_i . Conviene reemplazar P_n por la función monotónica creciente de P_n

$$\ln \frac{P_n}{N!} = \sum n_i \ln g_i - \sum \ln n_i!$$

(Nota: N es fijo hasta donde se considera el máximo). Supóngase además que N es muy grande ($\approx 10^{23}$) y lo que es más importante, que todos los n_i son lo suficientemente grandes como para poder utilizar la fórmula de Stirling (problema 37.13). Por lo tanto,

$$\ln \frac{P_n}{N!} = \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \quad (4)$$

la última suma se puede cancelar, puesto que, según la ecuación (2), es constante.

Considerando los n_i como variables continuas, obtenemos el máximo de la función (4), sujeto a las restricciones (2) y (3) utilizando el método de multiplicadores de Lagrange. Con esto, construimos la función

$$F(n_1, n_2, \dots; \lambda_1, \lambda_2) = \sum n_i \ln g_i - \sum n_i \ln n_i - \lambda_1 \left(\sum n_i - N \right) - \lambda_2 \left(\sum E_i n_i - E_{\text{tot}} \right)$$

y obtenemos su máximo, sin someternos a las restricciones en las variables $n_1, n_2, \dots; \lambda_1, \lambda_2$. Tomando derivadas parciales de F , obtenemos las condiciones

$$\frac{\partial F}{\partial n_i} = \ln g_i - \ln n_i - 1 - \lambda_1 - \lambda_2 E_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots)$$

además de las condiciones (2) y (3) para las derivadas en λ . Resolviendo para el valor máximo de los n_i :

$$n_i = g_i e^{-1-\lambda_1-\lambda_2 E_i} = A g_i e^{-\beta E_i} \quad (5)$$

donde $A = e^{-1-\lambda_1}$ y $\beta = \lambda_2$ son constantes desconocidas.

- 37.1 A partir del problema 37.16, demostrar que la distribución de Maxwell-Boltzmann surge como consecuencia de (5) bajo las siguientes suposiciones: (1) las "celdas" son volúmenes infinitesimales dv_x, dv_y, dv_z en el espacio de velocidad (ver problema 36.6) y existe igual probabilidad de encontrar una partícula en cada celda (es decir, todos los g_i son iguales); (2) el promedio de las energías de la partícula tiene el valor dado por la teoría cinética, $E_{\text{prom}} = \frac{3}{2} kT$.

Con la suposición de la equiprobabilidad, la probabilidad intrínseca de que una partícula se encuentre en la celda infinitesimal dv_x, dv_y, dv_z es

$$g dv_x dv_y dv_z$$

donde g es una constante. Cada partícula en la celda tiene la misma energía,

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + \frac{1}{2} m v_y^2 + \frac{1}{2} m v_z^2$$

Por lo tanto, la ecuación (5) del problema 37.16 da el número de partículas de la celda

$$dn_i = A e^{-\beta E} dv_x dv_y dv_z \quad (1)$$

aquí la constante g se encuentra involucrada en la constante A . Normalizando como en el problema 37.6. con la diferencia de que allá β era constante, obtenemos

$$A = N \frac{(m/2)^{3/2}}{\pi^{3/2}} \beta^{3/2} \quad (2)$$

Finalmente, siguiendo el proceso indicado en el problema 37.7 —donde β era conocida— se tiene

$$E_{\text{prom}} = \frac{3}{2\beta} \quad (3)$$

Iguando este valor con $3kT/2$ se obtiene $\beta = 1/kT$ y, de (2),

$$A = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

Con estos valores de β y A , la ecuación (1) representa la distribución de Maxwell-Boltzmann.

- 37.18.** Hallar la distribución más probable de $N = 5$ partículas distinguibles entre $r = 3$ celdas si las probabilidades intrínsecas para las celdas son

$$g_1 = g_2 = g_3 = \frac{1}{3}$$

De la ecuación (1) del problema 37.15, la probabilidad de una distribución (n_1, n_2, n_3) es

$$P_n = \frac{5!}{n_1! n_2! n_3!} \left(\frac{1}{3} \right)^5$$

puesto que $n_1 + n_2 + n_3 = 5$. Por lo tanto, la distribución más probable es aquella para la cual el número de maneras de hacerla

$$X = \frac{5!}{n_1! n_2! n_3!}$$

es máximo. Debido al intercambio de las partículas en dos celdas cualquiera, v.g.

$$n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 0 \rightarrow n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 0$$

el valor de X no varía. Los valores de X que aparecen en la tabla 37-2 son solamente para el caso en que $n_1 \geq n_2 \geq n_3$.

Tabla 37-2

n_1	n_2	n_3	X
5	0	0	1
4	1	0	5
3	2	0	10
3	1	1	20
2	2	1	30

De la tabla se ve que existen tres distribuciones más probables cada una de ellas con $X = 30$:

$$(2, 2, 1), (2, 1, 2), \text{ y } (1, 2, 2)$$

- 37.19.** Si la energía de una partícula en la celda 1 del problema 37.18 es cero, en la celda 2 es ϵ y en la celda 3 es 2ϵ , hallar la distribución más probable si la energía total es constante $E_{\text{tot}} = 3\epsilon$.

La restricción

$$0n_1 + \epsilon n_2 + 2\epsilon n_3 = 3\epsilon \quad \text{ó} \quad n_2 + 2n_3 = 3$$

elimina todas las distribuciones a excepción de $(3, 1, 1)$ y $(2, 3, 0)$. En la tabla 37-2 se observa que la primera es la más probable.

Para probabilidades intrínsecas iguales, la distribución de Maxwell-Boltzmann tiene la forma

$$n_i = Ae^{-\beta E_i}$$

La distribución (3, 1, 1) que ubica la materia de las partículas en el estado de energía más bajo está más cerca a la distribución de Maxwell-Boltzmann que la distribución (2, 3, 0).

Problemas suplementarios

- 37.20. Hallar la relación de la raíz cuadrada media de la velocidad v_{rcm} a la velocidad promedio v_{prom} para un caso descrito mediante la distribución de Maxwell-Boltzmann.

Resp. $\sqrt{3\pi/8} = 1.08$

- 37.21. En el circuito del problema 37.10, $L = 1 \text{ mH}$, $C = 1 \mu\text{F}$, $R = 0.1 \Omega$ y $T = 300 \text{ K}$. Calcular la raíz cuadrada media del voltaje producido en la inductancia. Resp. $6.44 \times 10^{-8} \text{ V}$

- 37.22. Seis partículas distinguibles deben distribuirse en 3 celdas. Hallar el número de combinaciones diferentes de partículas que puedan dar: (a) la distribución (6, 0, 0); (b) la distribución (4, 1, 1). Resp. (a) 1; (b) 30

- 37.23. Si las tres celdas del problema 37.22 tienen energías para la respectiva partícula de $0, \epsilon$, y 2ϵ , ¿cuál es la distribución más probable con energía total igual a 6ϵ si las probabilidades intrínsecas para las celdas son iguales? Resp. 2 partículas en cada celda

- 37.24. ¿Con relación al problema 37.19, cuál es la distribución más probable para una energía total de 4ϵ ? Resp. (2, 2, 1)

- 37.25. Considere 50 partículas diferentes distribuidas en ocho celdas así:

Celda	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de partículas	6	8	9	0	7	2	10	8

¿Cuántas combinaciones pueden hacerse con las 50 partículas para obtener esta distribución?

Resp. 1.96×10^{36}

- 37.26. Hallar la energía promedio para la distribución más probable en un sistema de dos estados con energías ϵ y 2ϵ , si $g_1 = g_2 = \frac{1}{2}$.

Resp. $E_{\text{prom}} = \frac{2\epsilon e^{-2\beta\epsilon} + \epsilon e^{-\beta\epsilon}}{e^{-2\beta\epsilon} + e^{-\beta\epsilon}}$

- 37.27. Expresar la distribución (5), problema 37.16, en términos de la función de partición,

$$Z = \sum_i g_i e^{-\beta E_i}$$

y del número total de partículas N ,

Resp. $n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta E_i}$

Capítulo 38

Estadística cuántica

La estadística cuántica describe los sistemas compuestos por un elevado número de partículas que se rigen por las leyes de la mecánica cuántica. Cada sistema se compone de un gran número de estados discretos, cada uno de ellos definido por un conjunto completo de números cuánticos en donde cada partícula del sistema ocupa uno de estos estados. Uno de los aspectos en los cuales la estadística cuántica difiere de la estadística clásica consiste en que al hacer la deducción las funciones de distribución cuántica, las partículas son indistinguibles unas de otras. En otras palabras, es imposible en principio señalar una partícula, por ejemplo, con un subíndice que la distinga durante todo el tiempo.

38.1 ESTADISTICA DE FERMI-DIRAC

La estadística de las partículas que tienen un spin semientero, denominadas *fermiones*, fue desarrollada por E. Fermi y P. A. M. Dirac. Un ejemplo de un sistema de Fermi lo constituye un gran número de interacciones débiles entre electrones (spin = $\frac{1}{2}$), es decir, un “gas” de electrones.

La función de distribución de Fermi-Dirac, F_{FD} , describe la distribución más probable de partículas idénticas que no se pueden distinguir unas de otras y que obedecen al principio de exclusión de Pauli. En un sistema de fermiones en equilibrio a la temperatura absoluta T , el número de partículas esperado en un estado particular i con energía E_i está dado por (ver problema 38.35)

$$F_{FD} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E_i/kT} + 1} = \frac{1}{e^{(E_i - E_f)/kT} + 1} \quad (38.1)$$

donde k es la constante de Boltzmann y donde $E_f = -kT\alpha$, la energía de Fermi, es una característica del sistema descrito. Tanto α como E_f son funciones que dependen de T . Cuando $T \rightarrow 0$ K, $E_f \rightarrow E_{f0}$, que es una constante positiva. La forma exacta de E_f (o de α) se determina mediante la condición de normalización, la cual consiste en que las partículas del sistema constituyen un número fijo.

Debe notarse que, al igual que F_{MB} , la función de distribución de Fermi-Dirac, F_{FD} , no da el número de partículas con energía E_i , sino más bien el número de partículas que ocupa el estado i , el cual tiene una energía E_i . Tal como se describe en la sección 36.3 (para el caso continuo), para obtener el número de partículas n_i con energía E_i , es necesario multiplicar la función de distribución de Fermi-Dirac por el número de estados g_i que tienen energía E_i :

$$n_i = g_i F_{FD}$$

Si los niveles de energía se encuentran tan cercanos que pueden considerarse como si formaran una distribución continua, el número de partículas dn_E con energías comprendidas entre E y $E + dE$ es

$$dn_E = F_{FD} g(E) dE$$

donde $dS_E = g(E) dE$ representa el número de estados cuánticos con energía entre E y $E + dE$. Como se discutió en la sección 36.3, la cantidad $g(E)$ se denomina *densidad de estados*.

38.2 ESTADISTICA DE BOSE-EINSTEIN

A. Einstein y S. N. Bose desarrollaron la estadística que se aplicaría a un sistema compuesto por un gran número de partículas no diferenciables e idénticas que interactúan débilmente, cada una de ellas con spin entero. Estas partículas, denominadas *bosones*, no obedecen al principio de exclusión de Pauli. Los fotones, las moléculas de H_2 y el helio líquido constituyen ejemplos de sistemas de bosones.

La función de distribución de Bose-Einstein, F_{BE} , da el número promedio de bosones en un sistema en equilibrio a la temperatura T que se encuentra en un estado particular i con energía E_i (ver problema 38.37):

$$F_{BE} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E_i/kT} - 1} \quad (38.2)$$

El valor de α depende del sistema de bosones particular que se ha descrito. Para sistemas de bosones cuyos números no se conservan (por ejemplo fotones), $\alpha = 0$ (problema 38.38). Al igual que en la estadística de Maxwell-Boltzmann y Fermi-Dirac, la distribución de energía de los bosones se da en términos de la función de densidad de estados, según

$$dn_E = F_{BE} g(E) dE$$

38.3 LIMITE DE ALTA TEMPERATURA

Cuando el número total de partículas se conserva, la constante α para cualquiera de las dos estadísticas cuánticas crece uniformemente con la temperatura (problemas 38.25 y 38.28). A temperaturas lo suficientemente altas (o a energías lo suficientemente altas),

$$e^{\alpha} e^{E/kT} \gg 1$$

y las dos funciones de distribución cuántica se reducen a

$$F = A e^{-E/kT}$$

que corresponde a la función clásica de distribución de Maxwell-Boltzmann.

38.4 DOS INTEGRALES UTILES

(a) Con $p > -1$, y en el límite inferior de temperatura $kT \ll E_f$ (es decir, $\alpha \ll -1$),

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E^p F_{FD} dE &= \int_0^{\infty} \frac{E^p}{e^{(E-E_f)/kT} + 1} dE \\ &= \frac{1}{p+1} \left[E_f^{p+1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2(kT)^{2n} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) \zeta(2n) \frac{d^{2n}}{dE_f^{2n}} (E_f^{p+1}) \right] \end{aligned} \quad (38.3)$$

donde $\zeta(x)$ es la función zeta de Riemann,

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \dots$$

la cual se encuentra ampliamente tabulada. Algunos valores de esta función son:

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1.645 \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} = 1.082 \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945} = 1.017$$

Cuando p es un número entero, la serie que aparece en la ecuación (38.3) es finita.

(b) Con $p > 0$, $\alpha > 0$, y $\epsilon = \pm 1$, tenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{q^p}{e^{\alpha} e^q - \epsilon} dq = \Gamma(p+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{n+1} e^{-n\alpha}}{n^{p+1}} \quad (38.4)$$

donde la función gamma, $\Gamma(x)$, cumple $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$. Algunos valores de la función gamma son:

$$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \text{ un entero})$$

En el caso especial en que $\alpha = 0$, $\epsilon = +1$, la ecuación (38.4) se convierte en

$$\int_0^{\infty} \frac{q^p}{e^q - 1} dq = \Gamma(p+1) \zeta(p+1) \quad (38.5)$$

Problemas resueltos

RADIACION DEL CUERPO NEGRO

Cuando las paredes de una cavidad se conservan permanentemente a una temperatura T , emiten y absorben radiación electromagnética (fotones) y en equilibrio la cantidad de energía emitida por las partículas es igual a la energía absorbida por las mismas. La radiación dentro de la cavidad puede analizarse al abrir un pequeño orificio en una de las paredes de la cavidad; los fotones que emergen constituyen lo que se denomina *radiación del cuerpo negro*. La física cuántica nació hacia 1900 cuando Max Planck descubrió la expresión correcta para la distribución espectral observada experimentalmente de la radiación del cuerpo negro, es decir, la fracción de la energía total irradiada con frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$.

38.1. En el caso más simple, consideremos una cavidad cúbica de lado l , cuyos bordes definen un conjunto de ejes y cuyas paredes se mantienen a una temperatura T . Las ecuaciones de Maxwell para ondas electromagnéticas muestran que las componentes rectangulares del vector de onda

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \boldsymbol{\lambda}$$

deben satisfacer las condiciones de frontera

$$\frac{k_x l}{\pi} = n_x \quad \frac{k_y l}{\pi} = n_y \quad \frac{k_z l}{\pi} = n_z$$

donde n_x , n_y , y n_z son números enteros positivos. (Estas condiciones de frontera aseguran un número entero de medias longitudes de onda a cada arista del cubo.) Cada terna (n_x, n_y, n_z) representa en términos clásicos un *modo de oscilación* electromagnético para la cavidad. Consideremos estos modos como *estados* de fotón. Encontrar el número de modos en el intervalo de frecuencia comprendido entre ν y $\nu + d\nu$, teniendo en cuenta que existen dos direcciones de polarización independientes para cada modo.

Cada frecuencia permitida ν corresponde a cierto modo (n_x, n_y, n_z) y puede escribirse como

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck}{2\pi} = \frac{c}{2l} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{cN}{2l}$$

donde $N = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$. En vez de tratar de encontrar el número de estados enteros (n_x, n_y, n_z) que corresponden a un N dado, utilizaremos una aproximación continua para encontrar el número de puntos en una concha esférica de radio N y espesor dN en el primer octante del espacio (n_x, n_y, n_z) . Esto representa el "volumen"

$$dM = \frac{1}{8} (4\pi N^2 dN) = \frac{\pi}{2} N^2 dN$$

Pero el número de estados entre N y $N + dN$ debe ser igual al número de estados en el correspondiente intervalo de frecuencia ν a $\nu + d\nu$. Utilizando $\nu = cN/2l$,

$$dN = \frac{2l}{c} d\nu$$

de donde

$$dM = \frac{\pi}{2} \left(\frac{2l\nu}{c} \right)^2 \left(\frac{2l}{c} d\nu \right) = \frac{4\pi l^3}{c^3} \nu^2 d\nu = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

aquí V es el volumen de la cavidad. Puesto que existen dos posibles direcciones de polarización independientes para cada modo, debemos multiplicar a dM por dos para obtener el número de estados de fotón dS :

$$dS = 2 dM = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu = g(\nu) d\nu$$

Así, la densidad de estados de fotón en el intervalo de frecuencia $d\nu$ es

$$g(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2$$

- 38.2.** Considerando la cavidad del problema 38.1 como un recipiente que contiene fotones, los cuales son bosones de spin 1, determinar la distribución espectral (cantidad de energía por intervalo de frecuencia) de la radiación del cuerpo negro que emerge por un pequeño agujero practicado en el recipiente. Debido a que los fotones son emitidos y absorbidos continuamente por las paredes de la cavidad, el número de ellos no se conserva.

Utilizando la densidad de estados $g(\nu)$ obtenida en el problema 38.1 y la función de distribución de Bose-Einstein para fotones, (38.2) con $\alpha = 0$, obtenemos el número de fotones dn_ν , con frecuencias comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$, cuyo valor es

$$dn_\nu = F_{BE} g(\nu) d\nu = \frac{1}{e^{E/kT} - 1} \frac{8\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

La energía de cada fotón es $E = h\nu$, por lo tanto, la energía dE_ν , transportada por los dn_ν fotones es

$$dE_\nu = h\nu dn_\nu = \frac{8\pi Vh}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = F(\nu) d\nu$$

La distribución espectral $F(\nu)$, se encuentra graficada en la figura 38-1. Debe notarse que Planck llegó a la función $F(\nu)$ por un camino diferente.

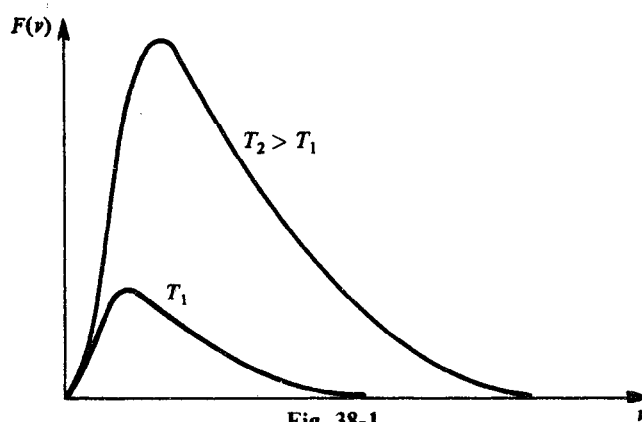


Fig. 38-1

- 38.3.** La *Ley de Stefan Boltzmann* establece que la energía electromagnética total dentro de una cavidad, cuyas paredes permanecen a una temperatura T es proporcional a T^4 . Demuestre que esta ley es una conclusión del resultado del problema 38.2 y calcule el valor de la constante de proporcionalidad.

La energía total en el interior de la cavidad del problema 38.2 está dada por

$$E = \int dE_\nu = \frac{8\pi Vh}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} = \frac{8\pi Vh^4 T^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty \frac{q^3 dq}{e^q - 1} = \text{constante} \times T^4$$

De la ecuación (38.5), el valor de la integral es

$$\Gamma(4)\zeta(4) = 3! \frac{\pi^4}{90} = 6.49$$

y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E &= \frac{8\pi k^4 (6.49)}{(hc)^3} VT^4 = \frac{8\pi (8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})^4 (6.49)}{(12.4 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m})^3} VT^4 \\ &= (4.71 \text{ keV/K}^4 \cdot \text{m}^3) VT^4 \end{aligned}$$

- 38.4.** En la figura 38-1 se observa que el pico de la curva de distribución espectral se desplaza en frecuencia con la temperatura. La *ley de desplazamiento de Wien* establece que

$$\lambda_{\text{máx}} T = \text{constante}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda para la cual se presenta el valor máximo de $F(\nu)$. Deduzca la ley de desplazamiento de Wien.

A partir de

$$\frac{dF(\nu)}{d\nu} = \frac{d}{d\nu} \left[\frac{8\pi Vh}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \right] = \frac{8\pi Vh}{c^3} \frac{\nu^2 \left[e^{h\nu/kT} \left(3 - \frac{h\nu}{kT} \right) - 3 \right]}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} = 0$$

obtenemos, para un máximo,

$$e^{h\nu_{\text{máx}}/kT} \left(3 - \frac{h\nu_{\text{máx}}}{kT} \right) - 3 \equiv e^y (3 - y) - 3 = 0$$

Esta ecuación trascendental para $y = h\nu_{\text{máx}}/kT$, que debe resolverse por métodos de aproximación, da una solución

$$y = \frac{h\nu_{\text{máx}}}{kT} = \text{constante}$$

ya que $\nu_{\text{máx}} = c/\lambda_{\text{máx}}$,

$$\lambda_{\text{máx}} T = \text{constante}$$

- 38.5. Calcular la relación de la energía emitida por un cuerpo negro a 2000 K en bandas de longitud de onda de 100 Å alrededor de 5000 Å (espectro visible) y 50000 Å (infrarrojo).

La distribución espectral en función de la longitud de onda puede obtenerse reemplazando (considerando únicamente magnitudes)

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad d\nu = -\frac{c}{\lambda^2} d\lambda$$

en la expresión para dE_ν del problema 38.2, para obtener

$$dE_\lambda = \frac{8\pi hcV}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{hc/kT\lambda} - 1} = F(\lambda) d\lambda$$

El ancho de banda $\Delta\lambda = 100$ Å es lo suficientemente pequeño como para considerar a $F(\lambda)$ constante, sobre este intervalo; con esto obtenemos

$$\frac{\Delta E_{50000}}{\Delta E_{5000}} = \frac{(5000 \text{ Å})^5}{(50000 \text{ Å})^5} \frac{e^{(12400 \text{ eV} \cdot \text{Å})/(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(2000 \text{ K})(5000 \text{ Å})} - 1}{e^{(12400 \text{ eV} \cdot \text{Å})/(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(2000 \text{ K})(50000 \text{ Å})} - 1} = 5.50$$

Este resultado demuestra que solamente una pequeña cantidad de energía total es irradiada en forma de luz visible.

TEORIA DE LOS ELECTRONES LIBRES DE LOS METALES

En la *teoría de los electrones libres* de los metales se supone que los electrones de valencia débilmente ligados a los átomos que componen el metal no están unidos a ellos en particular sino que se mueven a través de todo el sólido. Se supone, además, que cada electrón no experimenta fuerza neta ni de otros electrones de valencia, ni de los electrones ligados, ni de los núcleos. Estas suposiciones equivalen a decir que cada electrón se mueve a través del metal en un potencial electrostático constante. En los bordes del metal el potencial crece rápidamente, debido a que la fuerza electrostática neta actúa sobre un electrón en la frontera. Así, en este modelo, los electrones en un metal son considerados como un gas formado por fermiones de spin $\frac{1}{2}$ que no interactúan, confinados en una caja tridimensional.

- 38.6. Para un pozo unidimensional rectangular de paredes infinitas y de longitud l , en el problema 17.3 se encontraron las energías permitidas para partículas de masa m que no interactúan, cuyo valor está dado por $E_n = n^2 E_0$, donde n es un número positivo y $E_0 = h^2/8ml^2$. La generalización para el pozo tridimensional de paredes infinitas y lado l es

$$E = (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) E_0 \quad E_0 = \frac{h^2}{8ml^2}$$

donde n_x, n_y, n_z son números enteros positivos. Se ha encontrado que un número de estados diferentes (n_x, n_y, n_z) pueden tener la misma energía, fenómeno que se conoce como *degeneración*. Para los primeros seis niveles de energía, calcular el orden de degeneración, es decir, el número de estados que tienen la misma energía.

Ver tabla 38-1. Para niveles superiores, los estados equienergéticos no necesitan permutaciones de los mismos tres números enteros; ver problema 38.43.

Tabla 38-1

Energía	Estados equienergéticos (n_x, n_y, n_z)	Orden de degeneración
$3E_0$	(1, 1, 1)	1
$6E_0$	(2, 1, 1) (1, 2, 1) (1, 1, 2)	3
$9E_0$	(2, 2, 1) (2, 1, 2) (1, 2, 2)	3
$11E_0$	(3, 1, 1) (1, 3, 1) (1, 1, 3)	3
$12E_0$	(2, 2, 2)	1
$14E_0$	(1, 2, 3) (1, 3, 2) (2, 1, 3) (2, 3, 1) (3, 1, 2) (3, 2, 1)	6

- 38.7. Para los electrones en un metal o para las moléculas de gas en un recipiente, el valor de l del problema 38.6 es tan grande que los niveles de energía pueden considerarse como si formaran un espectro continuo. Para este caso, determinar el número de estados (n_x, n_y, n_z) con energías en el intervalo comprendido entre E y $E + dE$.

Este problema es semejante al del cuerpo negro, problema 38.1. Haciendo $N = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$, para el número de estados dS , con energías entre E y $E + dE$, obtenemos

$$dS = \frac{1}{8} (4\pi N^2 dN) = \frac{\pi}{2} N^2 dN$$

Del problema 38.6.

$$N^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = E \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)$$

por lo tanto

$$N = \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)^{1/2} E^{1/2} \quad dN = \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)^{1/2} \frac{dE}{2E^{1/2}}$$

y

$$dS = \frac{\pi}{2} E \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right) \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)^{1/2} \left(\frac{dE}{2E^{1/2}} \right) = \frac{2\pi l^3 (2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

Así, la densidad de estados en el intervalo de energía dE , con $V = l^3$, es

$$g(E) = \frac{2\pi V (2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

- 38.8. Construya un gráfico de la función de distribución de Fermi-Dirac contra energía para $T \approx 0$ K.

Cerca de $T = 0$ K, $E_f \approx E_{f0} > 0$, y, por lo tanto

$$F_{FD} \approx \frac{1}{e^{(E - E_{f0})/kT} + 1}$$

Si $E < E_{f0}$ y $T \rightarrow 0$ K, $e^{(E - E_{f0})/kT} \rightarrow 0$ y $F_{FD} = 1$. Si $E > E_{f0}$ y $T \rightarrow 0$ K, $e^{(E - E_{f0})/kT} \rightarrow \infty$ y $F_{FD} = 0$. Por lo tanto, la gráfica de F_{FD} contra E tiene la forma dada por la curva continua de la figura 38-2; si $T > 0$ K se encuentra que la gráfica toma la forma indicada por la línea de puntos.

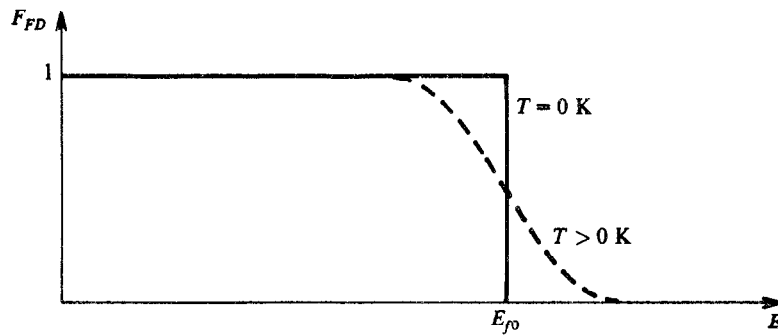


Fig. 38-2

38.9. Obtener una expresión para E_{f0} , energía de Fermi a $T = 0$ K, para un gas electrónico en un metal.

En el problema 38.7 encontramos que el número de estados (n_x, n_y, n_z) en el intervalo de energías comprendido entre E y $E + dE$ está dado por

$$dS = g(E) dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} E^{1/2} dE$$

Puesto que para cada conjunto de números cuánticos (n_x, n_y, n_z) existen dos orientaciones posibles del spin electrónico, debemos multiplicar a $g(E)$ por un factor de 2 para obtener la verdadera densidad de estados para el gas electrónico. Así, el número total N de fermiones en el sistema está dado por

$$N = 2 \int_0^\infty F_{FD} g(E) dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}$$

Para $T = 0$ K la función de distribución de Fermi-Dirac es (ver problema 38.8)

$$F_{FD} = 1 \quad \text{para } E < E_{f0}$$

$$F_{FD} = 0 \quad \text{para } E > E_{f0}$$

por lo tanto, los límites de la integral pueden cambiarse para obtener

$$N = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_{f0}} E^{1/2} dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \left(\frac{2}{3} E_{f0}^{3/2} \right)$$

ó

$$E_{f0} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

Cuando la temperatura aumenta se encuentra (ver problema 38.13) que la energía de Fermi permanece aproximadamente igual a E_{f0} .

38.10. El potasio metálico tiene una densidad de $0.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y un peso atómico de 39. Calcular la energía de Fermi para los electrones del metal si cada átomo de potasio cede un electrón al gas electrónico.

En primer lugar, calcular el número de electrones por unidad de volumen, N/V :

$$\frac{N}{V} = \frac{(6.02 \times 10^{26} \text{ átomos/kmol})(0.86 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{39 \text{ kg/kmol}} = 1.33 \times 10^{28} \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3} = 1.33 \times 10^{28} \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}$$

Entonces, del problema 38.9.

$$E_{f0} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} = \frac{(hc)^2}{8mc^2} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3} = \frac{(12.4 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m})^2}{8(0.511 \times 10^6 \text{ eV})} \left(\frac{3 \times 1.33 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}}{\pi} \right)^{2/3} = 2.05 \text{ eV}$$

A 300 K, $kT = 0.026 \text{ eV}$, por lo tanto, se observa que $E_f \approx E_{f0}$ es mucho mayor que kT a la temperatura ambiente.

38.11. Calcular la energía cinética promedio por partícula para un gas de Fermi de N partículas $T = 0$ K.

Utilizando la densidad de estados $2g(E)$ obtenida en el problema 38.9, se tiene

$$E_{\text{prom}} = \frac{1}{N} \int E dn_E = \frac{2}{N} \int_0^\infty E F_{FD} g(E) dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3} \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{e^{(E-E_f)/kT} + 1}$$

$$\rightarrow \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3} \int_0^{E_{f0}} E^{3/2} dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{Nh^3} \left(\frac{2}{5} E_{f0}^{5/2} \right)$$

Reemplazando el valor de N obtenido en el problema 38.9, llegamos a

$$E_{\text{prom}} = \frac{3}{5} E_{f0}$$

Así, aunque los electrones se encuentren a 0 K, la energía cinética en promedio tiene un valor adecuado. Esto se debe a que el principio de exclusión de Pauli no permite que todos los electrones ocupen los niveles más bajos de energía, por lo tanto, los electrones aparecen con todas las energías posibles hasta E_{f0} .

38.12. Utilizando la condición de normalización, la cual consiste en que el número de partículas es fijo, obtener, para bajas temperaturas, una expresión para la energía de Fermi, E_f para un gas electrónico en función de la energía de Fermi, E_{f0} , a $T = 0$ K.

El número de partículas está dado por

$$N = \int_0^\infty F_{FD} g(E) dE = C \int_0^\infty E^{1/2} F_{FD} dE$$

donde la densidad de estados del problema 38.9 es $g(E) = CE^{1/2} dE$ con $C = 4\pi V(2m)^{3/2}/h^3$. La ecuación (38.3), en la cual se ha dado solamente el primer término de la serie y para $p = \frac{1}{2}$, da

$$N = C \int_0^\infty E^{1/2} F_{FD} dE \approx \frac{2C}{3} \left[E_f^{3/2} + 2(kT)^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \zeta(2) \left(\frac{3}{4} E_f^{-1/2} \right) \right]$$

$$= \frac{2C}{3} E_f^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8 E_f^2} (kT)^2 \right] \quad (1)$$

Dejando tender $T \rightarrow 0$ K en (1), obtenemos

$$N = \frac{2C}{3} E_{f0}^{3/2}$$

o

$$E_{f0} = \left(\frac{3N}{2C} \right)^{2/3} = \left(\frac{3Nh^3}{8\pi V(2m)^{3/2}} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

lo cual concuerda con el resultado del problema 38.9. Puesto que kT/E_f es muy pequeño, en la ecuación (1) se observa que E_f no varía muy rápidamente con la temperatura. Por lo tanto, podemos hacer $E_f = E_{f0}$ en el segundo término del lado derecho de la ecuación (1), y sustituyendo además $N = 2CE_{f0}^{3/2}/3$, obtenemos

$$\frac{2C}{3} E_{f0}^{3/2} = \frac{2C}{3} E_f^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]$$

de donde

$$E_f = E_{f0} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]^{-2/3}$$

Finalmente, recordando que para x pequeño

$$(1+x)^{-2/3} = 1 - \frac{2}{3}x$$

podemos escribir

$$E_f = E_{f0} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]$$

- 38.13. A $T = 0$ K la energía de Fermi de la plata es de 5.5 eV. Utilizando los resultados del problema 38.12 calcular el valor de la corrección de primer orden a $T = 300$ K.

La corrección de primer orden es

$$\frac{-\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_{f0}} = \frac{-\pi^2}{12} \frac{[(8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})]^2}{5.5 \text{ eV}} = -10^{-4} \text{ eV}$$

lo cual representa una variación casi despreciable.

- 38.14. A 0 K, la energía de Fermi de la plata es de 5.5 eV y la función de trabajo es de 4.6 eV. ¿Cuál es la energía potencial electrostática promedio para los electrones libres en la plata?

La función de trabajo, ϕ , es la energía mínima necesaria para extraer un electrón de un material. Los electrones así extraídos serán aquellos con la máxima energía cinética, que a 0 K es la energía de Fermi, E_{f0} . Del mismo modo, para una partícula en una caja, E_{f0} es la energía por encima de la energía potencial electrostática promedio, $-E_0$. La relación entre las diferentes energías se indica en la figura 38-3, en donde se observa que

$$E_0 = E_{f0} + \phi = 5.5 \text{ eV} + 4.6 \text{ eV} = 10.1 \text{ eV}$$

Puesto que a temperaturas moderadas (problema 38.13), $E_f \approx E_{f0}$, este resultado explica por qué la función de trabajo de un metal es esencialmente independiente de la temperatura.

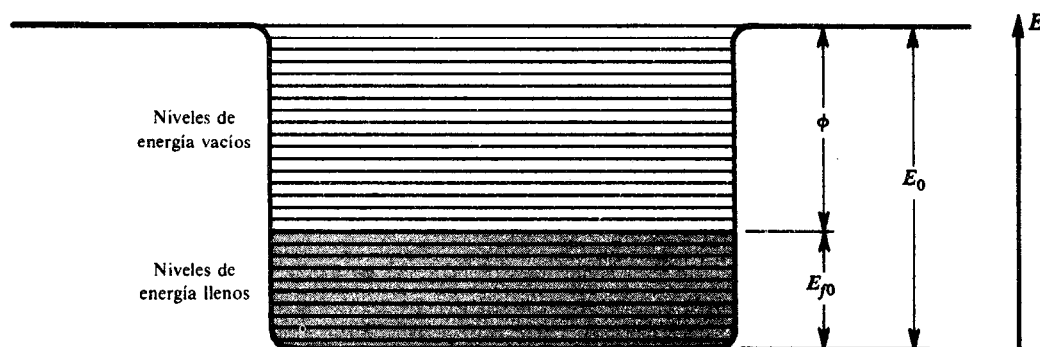


Fig. 38-3

CALORES ESPECIFICOS DE SOLIDOS CRISTALINOS

El calor específico molar de un sólido a volumen constante, C_V , se define como la variación en la cantidad de energía de un mol del sólido por unidad de variación de temperatura cuando el volumen del sólido permanece constante:

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V$$

donde E_T es la energía total de los \mathcal{N} moles del sólido. Desde el punto de vista clásico, se espera que el calor específico de un sólido cristalino permanezca constante con la temperatura y que su valor esté dado por la ley de Dulong-Petit (ver problema 37.9), $C_V = 3R$, donde R es la constante del gas ideal. Sin embargo, se ha encontrado experimentalmente que C_V varía con la temperatura como se indica en la figura 38-4. En 1912 P. Debye dio una explicación satisfactoria acerca del comportamiento observado en C_V , mediante el perfeccionamiento de una teoría anterior desarrollada por Einstein en 1906. En la teoría de Debye un sólido cristalino se considera como si estuviera formado por átomos regularmente distanciados en una estructura tridimensional. Si un átomo se desplaza de su posición de equilibrio experimentará una fuerza restauradora debida a los átomos que lo rodean, así, los átomos se comportan como un conjunto de osciladores acoplados. Cualquier perturbación será transmitida a los átomos vecinos lo que da como resultado una onda que se propaga a través del sólido.

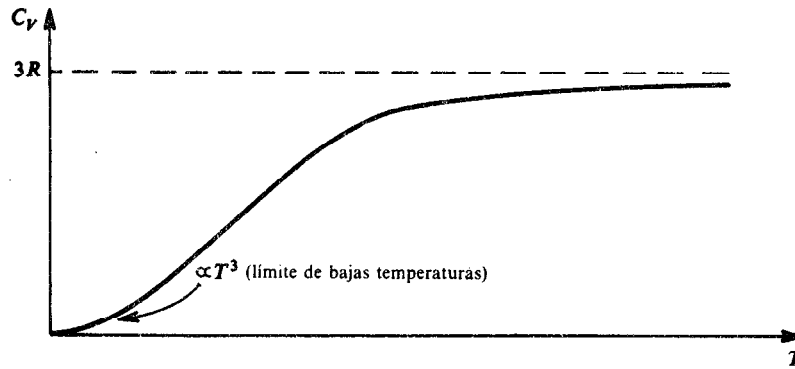


Fig. 38-4

Se ha encontrado que la cantidad de energía transferida de un átomo a su vecino está cuantizada en cantidades de $h\nu$, donde ν es la frecuencia clásica con la cual vibra el átomo alrededor de su posición de equilibrio. Cada cuanto de energía acústica $h\nu$ se denomina *fonón*, por similitud con los fotones de radiación electromagnética.

Las ondas que se propagan en la estructura pueden ser transversales o longitudinales, con velocidades v_t y v_l , respectivamente. Una onda transversal tiene dos grados de libertad vibracional mientras que una onda longitudinal tiene solamente un grado de libertad. Cada grado de libertad vibracional (modo de vibración) de un cristal corresponde a un *estado* del sistema y los fonones están distribuidos en estos estados de acuerdo con la distribución de Bose-Einstein.

Se ha encontrado que en un cristal existe una frecuencia máxima de vibración denominada *frecuencia de Debye*, ν_d . El máximo de frecuencia existe debido a que un sistema de N moléculas posee solamente $3N$ modos de vibración (cada molécula tiene 3 grados de libertad vibracional independiente). El calor específico de un sólido cristalino se obtiene calculando primero la frecuencia de Debye y la densidad de estados del cristal (problemas 38.15 y 38.16) y utilizando luego esta información para conseguir la energía cinética vibracional y el calor específico molar (problemas 38.17 y 38.18).

Además de la energía transferida por las vibraciones atómicas, si un sólido cristalino es conductor, existirá también energía transferida por los electrones libres de conducción. El calor específico total estará entonces determinado por la suma del calor específico electrónico y el calor específico de la estructura. No obstante, como se demuestra en los problemas 38.23 y 38.24, la contribución de energía electrónica transferida cobra importancia solamente a muy bajas temperaturas.

38.15. Calcular el número de estados vibracionales con frecuencias en el intervalo comprendido entre ν y $\nu + d\nu$.

Las ondas sonoras que viajan en un sólido son perfectamente análogas a las oscilaciones de los fotones en la cavidad del cuerpo negro del problema 38.1. Siguiendo el mismo razonamiento que se utilizó en el problema 38.1, el número de modos de vibración dM con frecuencias en el intervalo comprendido entre ν y $\nu + d\nu$ es

$$dM = \frac{4\pi V}{c^3} \nu^2 d\nu$$

para cada tipo de vibración, donde c es la velocidad de propagación de la onda en el medio. Considerando los dos grados de libertad vibratoria para las ondas transversales, y el único grado de libertad para las ondas longitudinales, el número de estados vibratorios, dS , con frecuencia en el intervalo comprendido entre ν y $\nu + d\nu$ es

$$dS = g(\nu) d\nu = 4\pi V \left(\frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3} \right) \nu^2 d\nu$$

Así, la densidad de estados en el intervalo de frecuencia $d\nu$ es

$$g(\nu) = 4\pi V \left(\frac{2}{v_t^3} + \frac{1}{v_l^3} \right) \nu^2$$

- 38.16. En términos de la frecuencia de Debye, ν_d , la cual representa la máxima frecuencia vibratoria posible en un sólido compuesto de N moléculas, reconstruya la densidad de estados que encontramos en el problema 38.15.

El número de estados posibles es finito e igual a $3N$. Así:

$$3N = \int dS = \int_0^{\nu_d} g(\nu) d\nu = 4\pi V \left(\frac{2}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3} \right) \int_0^{\nu_d} \nu^2 d\nu = 4\pi V \left(\frac{2}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3} \right) \frac{\nu_d^3}{3}$$

La densidad de estados tiene la forma

$$g(\nu) = 4\pi V \left(\frac{2}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3} \right) \nu^2 = \frac{9N}{\nu_d^3} \nu^2$$

- 38.17. Suponga que la energía acústica es transportada a través de una estructura cristalina en cantidades cuantizadas de valor $h\nu$ por cuasi partículas denominadas *fonones*, las cuales son bosones cuyo número total, como el de fotones, no está fijo. Obtenga una expresión para la energía cinética total (energía vibracional) del sólido cristalino.

El número de fonones dn_ν , con frecuencias en el intervalo comprendido entre ν y $\nu + d\nu$ es

$$dn_\nu = F_{BE} g(\nu) d\nu = \frac{1}{e^{E/kT} - 1} \frac{9N}{\nu_d^3} \nu^2 d\nu$$

donde $g(\nu)$ es la función obtenida en el problema 38.16. Puesto que cada fonón tiene una energía $E = h\nu$, la energía dE que poseen los dn_ν fonones es

$$dE = h\nu dn_\nu = \frac{9Nh}{\nu_d^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

La energía total E_T del sólido será la suma de las energías de todos los fonones:

$$E_T = \int dE = \frac{9Nh}{\nu_d^3} \int_0^{\nu_d} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = 9NkT \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{q_d} \frac{q^3 dq}{e^q - 1}$$

donde $q_d = h\nu_d/kT$ y $T_d = h\nu_d/k$ (se denomina *temperatura de Debye*). La integral debe calcularse numéricamente.

- 38.18. A partir del resultado del problema 38.17, obtenga una expresión para el calor específico molar a volumen constante; C_V , en el límite $T \ll T_d$.

Del problema 38.17, la energía total es

$$E_T = 9NkT \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{q_d} \frac{q^3 dq}{e^q - 1}$$

donde $q_d = h\nu_d/kT = T_d/T$. Para $T \ll T_d$ el valor de $q_d \rightarrow \infty$, y la integral se aproxima a $\pi^4/15$ (problema 38.3). Así,

$$E_T = 9NkT \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \frac{\pi^4}{15}$$

Aplicando la definición de C_V , obtenemos

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = \frac{36kN}{\mathcal{N}} \frac{\pi^4}{15} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 = \frac{12\pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3$$

aquí hemos utilizado el resultado $kN/\mathcal{N} = R$. Para bajas temperaturas se ha encontrado experimentalmente que C_V varía con T^3 .

- 38.19. La ley clásica de Dulong-Petit (ver problema 37.9) establece que $C_V = 3R$. Demuestre que esta ley se deduce a partir del resultado del problema 38.17 en el límite $T \gg T_d$.

Del problema 38.17 tenemos

$$E_T = 9NkT \left(\frac{T}{T_D} \right)^3 \int_0^{q_d} \frac{q^3 dq}{e^q - 1}$$

Para $T \gg T_d$, $q_d = T_d/T \rightarrow 0$, por lo tanto, podemos escribir

$$e^q \approx 1 + q$$

sobre todo el intervalo de integración. Así,

$$E_T \approx 9NkT \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} q^2 dq = 3NkT$$

De la definición de C_V ,

$$C_V = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = 3 \frac{N}{\mathcal{N}} k = 3R$$

Experimentalmente se ha encontrado que este resultado es válido sólo para altas temperaturas.

38.20. A partir del resultado del problema 38.17 obtenga una expresión para C_V a cualquier temperatura.

Del problema 38.16, ν_d permanece constante cuando V es constante. Así,

$$\begin{aligned} C_V &= \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = \frac{N}{\mathcal{N}} \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{9Nh}{\nu_d^3} \int_0^{\nu_d} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu \right] \\ &= \frac{9Nkh^2}{\mathcal{N}\nu_d^3 (kT)^2} \int_0^{\nu_d} \frac{\nu^4 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} d\nu = \frac{9Rh^2}{\nu_d^3 (kT)^2} \int_0^{\nu_d} \frac{\nu^4 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} d\nu \end{aligned}$$

con $kN/\mathcal{N} = R$. En función de la temperatura de Debye $T_d = h\nu_d/k$ y la variable $q = h\nu/kT$, esta expresión se transforma en

$$C_V = 9R \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 \int_0^{T_d/T} \frac{q^4 e^q}{(e^q - 1)^2} dq$$

Cuando esta ecuación para C_V se grafica en función de T se obtiene una estrecha similitud con la curva experimental de la figura 38-4.

38.21. Hallar la energía total de un gas de electrones a baja temperatura.

La energía total está dada por

$$E_T = \int_0^\infty E F_{FD} g(E) dE$$

donde $g(E) = CE^{1/2}$, según el problema 38.9. Utilizando la ecuación (38.3) y considerando únicamente el primer término de la serie,

$$\begin{aligned} E_T &= C \int_0^\infty E^{3/2} F_{FD} dE = \frac{2C}{5} \left[E_f^{5/2} + 2(kT)^2 \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi^2}{6} \right) \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} E_f^{1/2} \right) \right] \\ &= \frac{2C}{5} E_f^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{E_f} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Utilizando los resultados del problema 38.12 en los cuales se expresan C y E_f en función de E_{f0} y recordando que E_f no varía muy rápidamente con la temperatura, podemos expresar E_T como sigue:

$$\begin{aligned} E_T &= \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} NE_{f0}^{-3/2} \right) E_{f0}^{5/2} \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]^{5/2} \left[1 + \frac{5\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right] \\ &\approx \frac{3}{5} NE_{f0} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

de acuerdo con las primeras aproximaciones, hemos conservado solamente los términos de primer orden en $(kT/E_{f0})^2$.

- 38.22. Para el gas de electrones del problema 38.21, calcular el calor específico molar electrónico a volumen constante, C_{Ve} , con aproximación de primer orden.

$$C_{Ve} = \frac{1}{\mathcal{N}} \left(\frac{\partial E_T}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{3}{5} N E_{f0} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{3}{5} \frac{N}{\mathcal{N}} E_{f0} \left(\frac{5}{6} \frac{\pi^2 k^2 T}{E_{f0}^2} \right) = \frac{N\pi^2 k^2}{2\mathcal{N} E_{f0}} T = \frac{R\pi^2 k}{2E_{f0}} T$$

con $R = Nk/\mathcal{N}$.

- 38.23. Calcular el calor específico molar electrónico, C_{Ve} , para la plata a temperatura ambiente ($T = 300$ K). La energía de Fermi para la plata es $E_{f0} = 5.5$ eV.

Del problema 38.22,

$$C_{Ve} = \frac{R\pi^2 k T}{2E_{f0}} = \frac{(8.31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}) \pi^2 (8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K}) (300 \text{ K})}{2(5.5 \text{ eV})} = 0.19 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

Este es el valor por mol de átomos. Puesto que la valencia de la plata es 1, un mol de átomos corresponde a un mol de electrones. Obsérvese que a $T = 300$ K la teoría de Debye predice un calor específico, debido a las vibraciones de la estructura de aproximadamente $3R \approx 25 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, por lo tanto, a esta temperatura el calor específico electrónico puede despreciarse.

- 38.24. Con relación al problema 38.23, calcule la temperatura para la cual el calor específico molar, C_{Ve} , y el calor específico de la estructura cristalina, C_V , son iguales. La temperatura de Debye para la plata es de 210 K. Como la igualdad se presenta a bajas temperaturas, el resultado de la teoría de Debye puede interpretarse así:

$$C_V = \frac{12\pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3$$

(ver problema 38.18).

Igualando C_V y C_{Ve} ,

$$\frac{12\pi^4 R}{5} \left(\frac{T}{T_d} \right)^3 = \frac{R\pi^2 k T}{2E_{f0}}$$

$$T = \left(\frac{5kT_d^3}{24\pi^2 E_{f0}} \right)^{1/2} = \left[\frac{5(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(210 \text{ K})^3}{24\pi^2 (5.5 \text{ eV})} \right]^{1/2} = 1.75 \text{ K}$$

Este resultado indica que la conducción de calor electrónico se aprecia solamente a bajas temperaturas.

LA MECÁNICA CUÁNTICA DEL GAS IDEAL

Hemos supuesto para un gas ideal que las moléculas que lo conforman no interactúan. Sin embargo, puesto que un gas ideal está compuesto ya sea por fermiones o por bosones, su análisis debe hacerse desde el punto de vista de la estadística cuántica.

Se ha encontrado que a elevadas temperaturas los resultados de la mecánica cuántica se confunden con los obtenidos a partir de un tratamiento clásico. No obstante, cuando las temperaturas se aproximan a cero absoluto, un análisis cuántico predice resultados que difieren notablemente de los que se predicen clásicamente. Por ejemplo, para un gas de bosones a temperaturas bajas, sin llegar a cero, la teoría predice que todas las partículas se encuentran en el estado energético más bajo, fenómeno que se conoce como la *condensación de Bose-Einstein* (problema 38.26). Además, un gas de fermiones, aún a cero absoluto, tendrá una presión finita diferente de cero (problema 38.33). Algunos gases que obedecen a la estadística de Bose-Einstein son el H_2 y el helio, mientras que el hidrógeno atómico es un gas que se rige por la estadística de Fermi-Dirac.

- 38.25.** Considere un gas formado por un número fijo N de bosones en un recipiente de volumen V . Demuestre que α es una función estrictamente creciente de la temperatura T .

La condición de normalización está dada por

$$N = \int dn_E = \int_0^\infty F_{BE} g(E) dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1}$$

la densidad de estados $g(E)$, fue obtenida en el problema 38.7. Efectuando el siguiente cambio de variable $q = E/kT$, obtenemos

$$N = \frac{2\pi V(2mkT)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^{1/2} dq}{e^{\alpha} e^q - 1} \quad (1)$$

esta ecuación define de manera implícita a α como una función de T . Cuando T aumenta, el coeficiente de la integral también aumenta. Puesto que N es fijo, en la medida en que la integral decrece, el valor de α debe crecer.

Obsérvese que, debido a que N es finito, la integral es siempre convergente y así α debe ser siempre un valor positivo.

- 38.26.** Para una determinada densidad de partículas, N/V , calcular la temperatura más baja posible de un gas de bosones en concordancia con la estadística de Bose-Einstein (remítase al problema 38.25).

Puesto que α decrece continuamente cuando la temperatura decrece sin que llegue a ser negativo, el valor mínimo de la temperatura T_0 , es aquel para el cual $\alpha = 0$. De la ecuación (1) del problema 38.25,

$$N = \frac{2\pi V(2mkT_0)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^{1/2} dq}{e^q - 1}$$

Según la ecuación (38.5) la integral toma el siguiente valor

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \quad (2.61)$$

Sustituyendo este valor y resolviendo para T_0 , se obtiene

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{(hc)^2 (2.61)^{-2/3}}{2\pi (mc^2) k} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} = \frac{(12.4 \times 10^{-7} \text{ eV} \cdot \text{m})^2 (2.61)^{-2/3}}{2\pi (mc^2) (8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \\ &= (1.50 \times 10^{-9} \text{ eV} \cdot \text{K} \cdot \text{m}^2) \frac{(N/V)^{2/3}}{mc^2} \end{aligned}$$

Para $T \approx T_0$ la mayoría de los bosones que no interactúan se encuentran en el estado más bajo ($E = 0$) y podemos considerar el sistema como un estado condensado. Este fenómeno se conoce como *condensación de Bose-Einstein*.

- 38.27.** Calcular la energía total del gas de Bose del problema 38.25.

Efectuemos el siguiente cambio de variable: $q = E/kT$ con lo cual la ecuación (38.4) da

$$\begin{aligned} E_T &= \int E dn_E = \int_0^\infty E F_{BE} g(E) dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} \\ &= \frac{2\pi V(2m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^{3/2} dq}{e^{\alpha} e^q - 1} = \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2} kT}{2h^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}} \\ &= \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2} kT}{2h^3} \sum_{n=1}^\infty \frac{Z^n}{n^{5/2}} \end{aligned}$$

donde $Z = e^{-\alpha}$.

- 38.28.** Consideremos un gas formado por N fermiones de spin $\frac{1}{2}$ en un recipiente de volumen V . Demuestre que α es una función estrictamente creciente de la temperatura.

La condición de normalización encontrada en el problema 38.9 es

$$N = \int dn_E = 2 \int_0^\infty F_{FD} g(E) dE = \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{\alpha} e^{E/kT} + 1} = \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^{1/2} dq}{e^{\alpha} e^q + 1}$$

donde $q = E/kT$. El resultado se obtiene con el mismo argumento utilizado en el problema 38.25.

Para la distribución de Fermi-Dirac, los valores de α deben ser negativos. Se observa que α también crece uniformemente con la masa de los fermiones del sistema. Este hecho explica por qué a la temperatura ambiente ($T \approx 300$ K) un "gas" electrónico presenta esencialmente el mismo comportamiento cuántico que a bajas temperaturas (ver problema 38.13), mientras que un gas formado por moléculas en las cuales la masa individual es de unas 2000 veces la del electrón, exhibe un comportamiento aproximadamente clásico a la temperatura ambiente.

- 38.29.** Calcular la energía total del sistema de fermiones del problema 38.28, suponiendo que $\alpha > 0$.

La energía total E_T , se obtiene de la ecuación (38.4), como

$$\begin{aligned} E_T &= \int E dn_E = 2 \int_0^\infty E F_{FD} g(E) dE \\ &= \frac{4\pi V(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{E^{3/2} dE}{e^{\alpha} e^{E/kT} + 1} = \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2} kT}{h^3} \int_0^\infty \frac{q^{3/2} dq}{e^{\alpha} e^q + 1} \\ &= \frac{4\pi V(2mkT)^{3/2} kT}{h^3} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}} \\ &= \frac{3V(2\pi mkT)^{3/2} kT}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{Z^n}{n^{5/2}} \end{aligned}$$

donde $Z = e^{-\alpha}$.

- 38.30.** Hallar la energía cinética promedio por partícula en el límite de temperatura superior $T \gg 0$ K para los gases de bosones y fermiones de los problemas 38.25 y 38.28.

Utilicemos la ecuación (38.4) para calcular las integrales de N para los dos gases y utilicemos las expresiones para E_T obtenidas en los problemas 38.27 y 38.29, para llegar a

$$E_{\text{prom}} = \frac{E_T}{N} = \frac{3}{2} kT \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1} \frac{Z^n}{n^{5/2}}}{\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^{n+1} \frac{Z^n}{n^{3/2}}}$$

donde $Z = e^{-\alpha}$, $\epsilon = +1$ para los bosones y $\epsilon = -1$ para los fermiones. Para temperaturas muy altas, $\alpha \rightarrow \infty$ (problemas 38.25 y 38.28), con lo cual $Z \rightarrow 0$. Tomando solamente los dos primeros términos en cada sumatoria y cancelando el factor común $\epsilon^2 Z$, obtenemos

$$\begin{aligned} E_{\text{prom}} &\approx \frac{3}{2} kT \left(\frac{1 + \epsilon Z/2^{5/2}}{1 + \epsilon Z/2^{3/2}} \right) \approx \frac{3}{2} kT \left(1 + \epsilon \frac{Z}{2^{5/2}} - \epsilon \frac{Z}{2^{3/2}} \right) \\ &= \frac{3}{2} kT \left(1 - \epsilon \frac{Z}{2^{5/2}} \right) = \frac{3}{2} kT \left(1 - \epsilon \frac{e^{-\alpha}}{2^{5/2}} \right) \end{aligned}$$

Se observa que a alta temperatura E_{prom} se aproxima asintóticamente al mismo valor clásico para ambos gases, $\frac{3}{2} kT$. La corrección de primer orden en el resultado clásico da el mismo valor para ambos gases, pero la energía promedio por partícula es mayor que el resultado clásico para los fermiones y menor que el resultado clásico para los bosones.

- 38.31.** A partir de la primera ley de la termodinámica $dE_T = dQ - p dV$, la presión p en un proceso reversible puede escribirse así:

$$p = - \left(\frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_Q$$

En función de E_T , obtenga una expresión para la presión de un gas desde el punto de vista mecánico-cuántico.

Recordemos que los niveles de energía para las partículas que no interactúan y que se encuentran en una caja cúbica tridimensional de lado l , según el problema 38.6, están dados por

$$E_i = \frac{h^2}{8ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{h^2}{8mV^{2/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1)$$

Debido a la degeneración, es posible encontrar varios estados (n_x, n_y, n_z) que corresponden a una energía dada E_i (ver problema 38.6). Sea n_{ij} el número de partículas en el j -ésimo estado del nivel E_i . La energía total del sistema será entonces

$$E_T = \sum_i \sum_j E_i n_{ij}$$

con lo cual

$$dE_T = \sum_i \sum_j E_i dn_{ij} + \sum_i \sum_j n_{ij} dE_i$$

Puesto que E_i depende de las dimensiones del sistema, el segundo término $\sum_i \sum_j n_{ij} dE_i$, corresponde a la variación de E_T debida a las variaciones, en el volumen del sistema ocasionado por un trabajo realizado sobre el mismo. Así, el primer término debe ser igual al calor absorbido por el sistema:

$$dQ = \sum_i \sum_j E_i dn_{ij}$$

En otras palabras, un flujo de calor hacia el sistema corresponde a un cambio en los números de ocupación n_{ij} . Si $Q = \text{constante}$, es decir, $dQ = 0$, se tiene

$$p = - \left(\frac{\partial E_T}{\partial V} \right)_Q = - \sum_i \sum_j n_{ij} \frac{\partial E_i}{\partial V}$$

De la ecuación (1),

$$\frac{\partial E_i}{\partial V} = - \frac{2}{3} \frac{h^2}{8mV^{5/3}} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = - \frac{2}{3V} E_i$$

y, por lo tanto,

$$p = \frac{2}{3V} \sum_i \sum_j n_{ij} E_i = \frac{2}{3} \frac{E_T}{V}$$

Esta ecuación tiene una forma idéntica al resultado clásico establecido en la ecuación (35.6).

- 38.32.** De los problemas 38.30 y 38.31, obtenga la corrección de primer orden a temperaturas altas para la ley clásica del gas ideal, $pV = NkT$, teniendo en cuenta para ello las propiedades mecánico-cuánticas del gas.

Del problema 38.30,

$$E_T = NE_{\text{prom}} = \frac{3}{2} NkT \left(1 - \epsilon \frac{e^{-\alpha}}{2^{5/2}} \right)$$

donde

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{para un gas de bosones} \\ -1 & \text{para un gas de fermiones} \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en el resultado del problema 38.31, obtenemos

$$pV = NkT \left(1 - \epsilon \frac{e^{-\alpha}}{2^{5/2}} \right)$$

- 38.33.** Con relación a los problemas 38.21 y 38.31, obtenga una expresión para la presión de un gas ideal de fermiones de spin $\frac{1}{2}$ y a temperaturas muy bajas.

Para un sistema de fermiones de spin $\frac{1}{2}$ y a bajas temperaturas, del problema 38.21, tenemos

$$E_T = \frac{3}{5} N E_{f0} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]$$

Reemplazando este valor en el resultado del problema 38.31, tenemos

$$P = \frac{2}{5} \frac{N E_{f0}}{V} \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{E_{f0}} \right)^2 \right]$$

Este resultado indica que cuando $T \rightarrow 0$ K, la presión de un gas de fermiones tiende a un valor finito. Este punto cero de presión se presenta debido a que aún a 0 K los fermiones tienen una energía finita, como consecuencia del principio de exclusión de Pauli.

DEDUCCION DE LAS FUNCIONES CUÁNTICAS DE DISTRIBUCION

- 38.34.** Para un determinado nivel de energía, E_i en un sistema de fermiones existe un cierto número de estados g_i que tienen esta energía (es decir, E_i presenta una degeneración de orden g_i). De acuerdo con el principio de exclusión de Pauli, según el cual en cada estado no puede encontrarse más de una partícula, el número máximo de fermiones que pueden ocupar el nivel de energía E_i es g_i . ¿De cuántas maneras diferentes pueden distribuirse entre los niveles de energía $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots, N$ fermiones idénticos indistinguibles, de tal manera que el i -ésimo nivel de energía tenga $n_i \leq g_i$ estados llenos ($n_1 + n_2 + \dots = N$)?

Debido a que las partículas no se distinguen unas de otras, existe una manera de asignar n_1, n_2 partículas a E_2, \dots fuera de los g_1 estados en el nivel E_1 , seleccionamos los n_1 estados que deben llenarse con las n_1 partículas. Esto puede efectuarse de

$$\binom{g_1}{n_1} = \frac{g_1!}{n_1! (g_1 - n_1)!}$$

formas diferentes. Para cada una de ellas existen

$$\binom{g_2}{n_2} = \frac{g_2!}{n_2! (g_2 - n_2)!}$$

maneras diferentes de llenar el nivel E_2 , y así sucesivamente. El número total de formas es entonces

$$X = 1 \times \binom{g_1}{n_1} \binom{g_2}{n_2} \dots = \frac{g_1!}{n_1! (g_1 - n_1)!} \frac{g_2!}{n_2! (g_2 - n_2)!} \dots \quad (1)$$

- 38.35.** Encuentre la distribución más probable para el problema 38.34, si se combinan las condiciones siguientes: número de partículas fijo y energía total fija.

La distribución más probable es aquella que pueda realizarse en el mayor número de formas. Para esto debemos obtener el máximo de la función $X(n_1, n_2, \dots)$, dada por la ecuación (1) del problema 38.34 teniendo en cuenta las restricciones

$$\sum_i n_i = N = \text{constante} \quad \sum_i E_i n_i = E_T = \text{constante}$$

(Las restricciones $n_i \leq g_i$ pueden despreciarse, puesto que sabemos de antemano que el valor máximo obtenido debe satisfacerse.) Pasando al problema de las variables continuas para la función

$$\ln \frac{X}{g_1! g_2! \dots}$$

Las condiciones obtenidas para un máximo son

$$\frac{n_i}{n_i + g_i - 1} = e^{-\alpha} e^{-\beta E_i}$$

Suponga que $n_i + g_i \gg 1$ tenemos

$$\frac{n_i}{n_i + g_i} = e^{-\alpha} e^{-\beta E_i} \quad \text{ó} \quad n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\beta E_i} - 1}$$

Puesto que n_i es el número de bosones con energía E_i , y g_i es el número de estados con energía E_i , el número promedio de bosones en un estado con energía E_i , es n_i/g_i ; es decir, n_i/g_i es la función de distribución de Bose-Einstein, F_{BE} :

$$F_{BE} = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\beta E_i} - 1}$$

- 38.38. Demuestre que en un sistema de bosones en el cual no existe un número fijo de partículas (es decir, un sistema de fotones en la cavidad de un cuerpo negro) presenta una distribución de Bose-Einstein con $\alpha = 0$.

En la deducción dada en el problema 38.37, el hacer $\alpha = 0$ equivale a suspender la restricción.

$$\sum_i n_i = N = \text{constante}$$

Problemas suplementarios

RADIACION DEL CUERPO NEGRO

- 38.39. ¿Cuál es la densidad de estados de fotón en el intervalo de energía comprendido entre E y $E + dE$ en una cavidad cúbica de volumen $V = l^3$? Resp. $8\pi V E^2 / (hc)^3$
- 38.40. ¿Cuál es la cantidad de energía por intervalo de longitud de onda emitida por un cuerpo negro?
Resp. $\frac{8\pi V hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$
- 38.41. Reconstruya el gráfico de la figura 38-1 para $F(\lambda)$ contra λ .
- 38.42. Repita el problema 38.5 para una banda de longitud de onda de 50 \AA de ancha y para una longitud de onda de infrarrojo de 25000 \AA . Resp. 33.8

TEORIA DE LOS ELECTRONES LIBRES EN LOS METALES

- 38.43. ¿Cuál es el orden de degeneración del nivel $5l E_0$ de un pozo cúbico tridimensional de paredes infinitas?
Resp. 6
- 38.44. ¿Cuál es la densidad de estados para un pozo cúbico tridimensional de paredes infinitas en el intervalo de momentum comprendido entre p y $p + dp$? Resp. $4\pi l^3 p^2 / h^3$
- 38.45. ¿Cuál es la raíz cuadrada media de la velocidad a $T = 0 \text{ K}$ en función de la energía de Fermi, E_{f0} , para un gas de electrones en un metal?
Resp. $v(\text{m/s}) = (4.59 \times 10^5) \sqrt{E_{f0}(\text{eV})}$

- 38.46. ¿Cuál es el término siguiente en la expresión de la ecuación (1) del problema 38.12?

$$\text{Resp. } \frac{7}{640} \left(\frac{\pi k T}{E_f} \right)^4$$

- 38.47. Se ha encontrado que la energía de Fermi de cierto material a $T = 300$ K es menor que su valor a 0 K, en un valor de 1.2×10^{-4} eV. ¿Cuál es la energía de Fermi de este material a 0 K? *Resp.* 4.58 eV

- 38.48. Para cierto material, cuya función de trabajo es 3.4 eV, la energía potencial electromagnética promedio es 11.2 eV. ¿Cuál es la energía de Fermi del material? *Resp.* 7.8 eV

- 38.49. ¿Cuál es la relación de la máxima velocidad a la raíz cuadrada media de la velocidad de un gas de electrones en un metal a $T = 0$ K? *Resp.* 1.29

CALORES ESPECIFICOS DE SOLIDOS CRISTALINOS

- 38.50. ¿Cuál es la densidad de estados en el intervalo de longitud comprendido entre λ y $\lambda + d\lambda$?

$$\text{Resp. } 4\pi V \left(\frac{2}{v_l^3} + \frac{1}{v_t^3} \right) \frac{c^3}{\lambda^4}$$

- 38.51. Con respecto al problema 38.23, hallar la temperatura para la cual el calor específico molar electrónico C_{Ve} , es el 5% del valor del calor específico molar C_V de la plata. *Resp.* 7.83 K

- 38.52. En un sistema mecánico cuántico de dos estados, cuyos niveles son $E_1 = 0$ y $E_2 = \epsilon$, la probabilidad de encontrar una partícula en un estado de energía E es proporcional al factor de Boltzmann $e^{-E/kT}$. Hallar la energía total de un sistema de N partículas.

$$\text{Resp. } E_T = \frac{N\epsilon e^{-\epsilon/kT}}{1 + e^{-\epsilon/kT}}$$

- 38.53. Hallar el calor específico a volumen constante en el sistema del problema 38.52.

$$\text{Resp. } C_V = \frac{Nk(\epsilon/kT)^2 e^{-\epsilon/kT}}{(1 + e^{-\epsilon/kT})^2}$$

- 38.54. Calcular los límites superior e inferior de temperatura de C_V en el problema 38.53. *Resp.* 0 y 0

MECANICA CUANTICA DEL GAS IDEAL

- 38.55. ¿Cuál es la raíz cuadrada media de la velocidad en el gas de Bose del problema 38.25?

$$\text{Resp. } \left(\frac{3kT}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}} \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{3/2}} \right)^{1/2}$$

- 38.56. Hallar la temperatura T_0 (ver problema 38.25) para el ^4He líquido, cuya densidad es $0.146 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. *Resp.* 3.16 K (Aunque el helio líquido no es un verdadero gas de Bose, que no interactúa, la aproximación da un resultado muy cercano a 2.2 K, que es la temperatura a la cual se observa un rápido crecimiento en la población en el estado fundamental, lo cual corresponde a un cambio de líquido normal a un superfluido.)

- 38.57. ¿Cuál es la raíz cuadrada media de la velocidad para el gas de Fermi del problema 38.28? Suponga que $\alpha \geq 0$.

$$\text{Resp. } \left[\frac{3kT}{m} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{5/2}} \bigg/ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-n\alpha}}{n^{3/2}} \right]^{1/2}$$

- 38.58. Calcular el punto cero de presión en el gas de electrones en la plata ($E_{f0} = 5.5$ eV; densidad $10.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$). *Resp.* $2.06 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \approx 2 \times 10^5 \text{ atm}$

Capítulo 39

Teoría de bandas de los sólidos

La teoría de los electrones libres de los metales discutida en el capítulo 38 no explica por qué algunos materiales son buenos conductores de la electricidad mientras que otros, los *aisladores*, son malos conductores; ni tampoco por qué algunos materiales, denominados *semiconductores*, tienen propiedades de conducción que se encuentran entre las de los conductores y las de los aisladores. La teoría que ha explicado con mayor éxito el por qué las razones de las resistividades de los sólidos debe ser de unos 10^{30} es la denominada *teoría de bandas* de los sólidos.

Se puede considerar un sólido como constituido por átomos individuales aislados que se han reunido para formarlo. Un átomo individual posee un elevado número de niveles de energía discretos que pueden estar ocupados por los electrones del mismo. Generalmente los electrones que se encuentran en el estado fundamental ocupan únicamente los niveles de energía más bajos. Es posible excitar a los electrones para que ocupen niveles superiores de energía. Por lo regular, los electrones más energéticos, o sea los de valencia, toman parte en estas excitaciones. Consideremos en primer lugar la combinación de dos átomos. Si no existiera interacción entre los dos átomos, el valor de cada nivel de energía sería el mismo que para cada átomo aislado y el número de niveles para una energía particular se obtendría duplicando el correspondiente valor para el átomo aislado, como se indica en la figura 39-1(b). Debido a las interacciones, cada nivel anterior de energía única se desdobra en dos niveles, como aparece en la figura 39-1(c). En forma análoga, si se reúne un mayor número de átomos, existirá un mayor número de desdoblamientos para cada nivel de energía, un desdoblamiento por cada átomo adicional. La figura 39-1(d) indica el desdoblamiento de los niveles de energía cuando se han reunido 5 átomos.

Puesto que el número de átomos/cm³ en los sólidos es de aproximadamente 10^{23} , cada nivel de energía única para un átomo aislado se desdoblará en un enorme número de partes. Como los valores de los niveles de energía permanecen aproximadamente iguales, cuando se reúne un elevado número de átomos que interactúan, se obtienen bandas de niveles de energía prácticamente continuas, separadas por brechas en aquellos lugares en los cuales no existen estados electrónicos, como se ilustra en la figura 39-1(e).

La forma como se ubican los electrones en las bandas disponibles se rigen por el principio de exclusión de Pauli. Los electrones llenan las bandas de la misma manera como se llenaron los estados electrónicos en los átomos polieletrónicos (capítulo 24). Como ejemplo, consideremos el $_{11}\text{Na}$ en el cual todos sus niveles de energía se encuentran llenos hasta el nivel 3s, en donde hay un electrón y su configuración electrónica es $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. El nivel 3s se encuentra cuasi-lleno, ya que en él pueden ubicarse dos electrones.

En forma análoga, en los sólidos las bandas pueden estar llenas, parcialmente llenas o vacías, como se indica en la figura 39-2. Las propiedades conductoras de un sólido cristalino se determinan por la banda de energía más alta ocupada por los electrones de valencia y la banda vacía inmediatamente superior. Si la banda que contiene los electrones de valencia se encuentra llena, nos referimos a ella como la *banda de valencia* y la banda inmediatamente superior será entonces la *banda de conducción*; si la banda que contiene los electrones de valencia no está llena, la denominamos banda de conducción. En un buen conductor la banda de conducción se encuentra aproximadamente semillena [figura 39-2(a)] o también la banda de conducción se recubre con la siguiente banda más alta [figura 39-2(b)]. En este caso, es muy fácil llevar los electrones de valencia a un nivel de energía más alto, con lo cual estos electrones pueden adquirir energía de un campo eléctrico para así tomar parte en la conducción eléctrica.

En un material aislador la banda de valencia se encuentra llena y la brecha entre esta banda y la de conducción es muy amplia [figura 39-2(c)]. En consecuencia, los electrones no pueden adquirir fácilmente energía de un campo eléctrico y, por lo tanto, no pueden participar en la conducción eléctrica.

En algunos materiales la banda de valencia se encuentra llena, al igual que en los aisladores, pero la brecha entre esta banda y la de conducción es muy angosta [figura 39-2(d)]. A $T = 0 \text{ K}$ la banda de valencia se encuentra completamente llena y la de conducción vacía, con lo cual el material se comporta como un

aislador. A la temperatura ambiente, parte de los electrones adquiere energía térmica suficiente como para pasar a la banda de conducción donde pueden participar en la conducción eléctrica. Estos electrones dejan

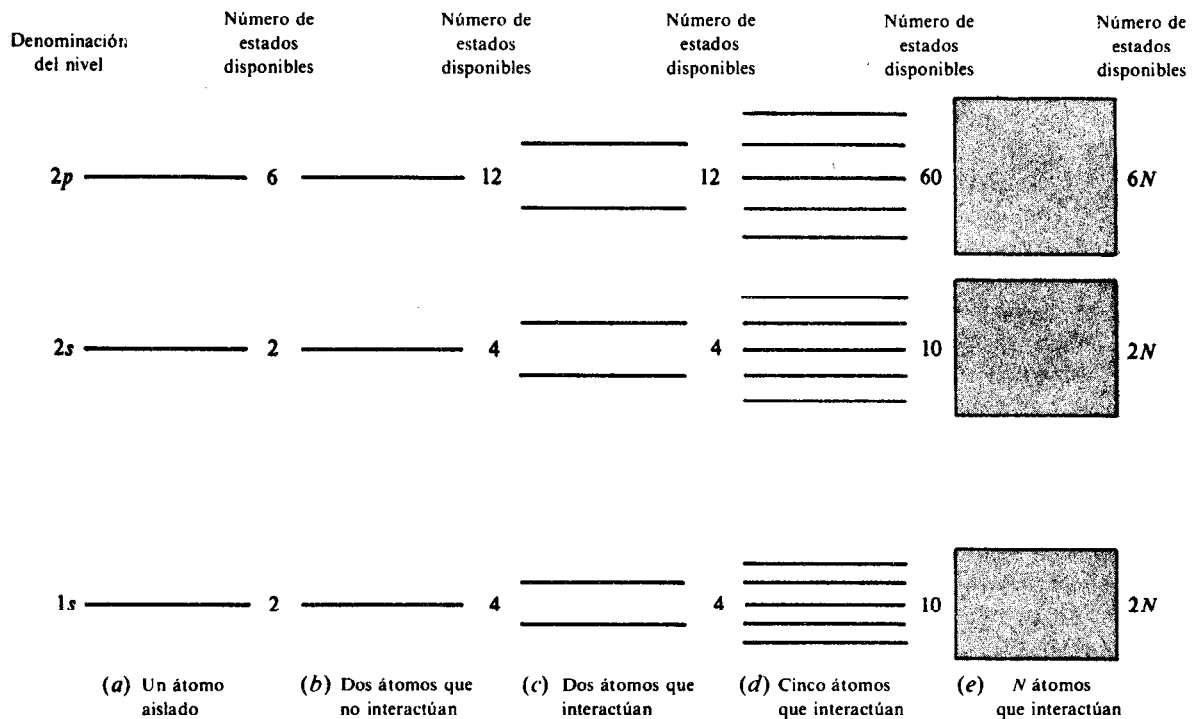


Fig. 39-1

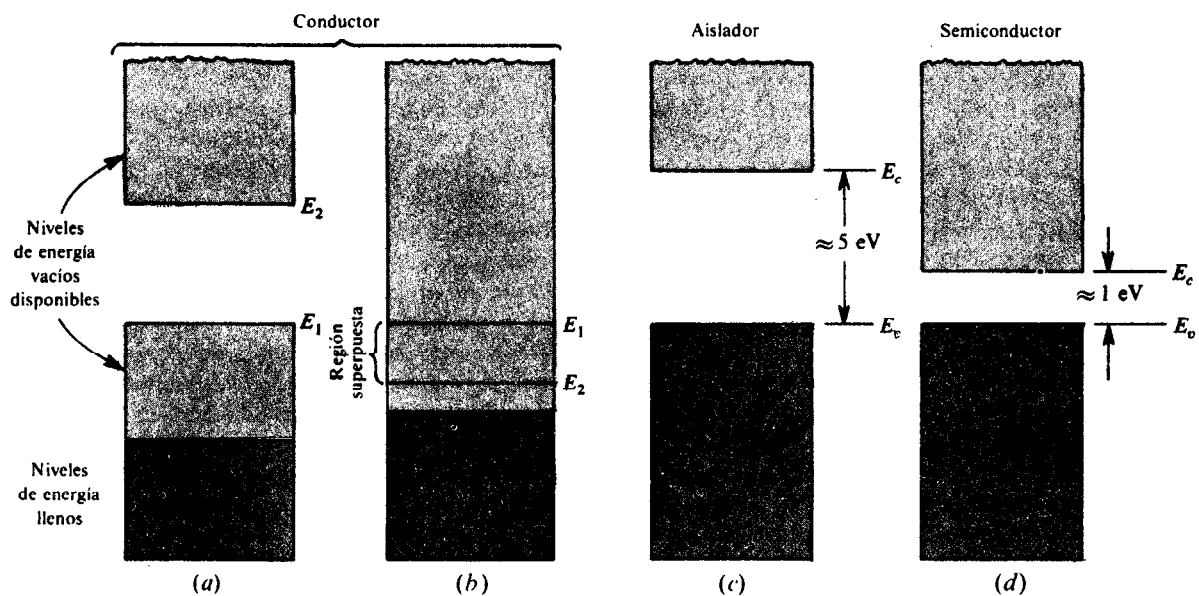


Fig. 39-2

“huecos” hacia los cuales se pueden mover otros electrones que se encuentran en la banda de valencia durante la conducción eléctrica. La excitación de electrones hacia estos huecos produce el mismo efecto que el de portadores de carga positiva que mantienen la conducción eléctrica.

Los semiconductores descritos anteriormente se denominan *intrínsecos*. Mediante la introducción de impurezas a un material, es posible lograr un control para que la conducción eléctrica sea esencialmente de

electrones (negativa) o de huecos portadores de carga (positiva). Tales semiconductores se denominan *extrínsecos* y constituyen la base de los dispositivos semiconductores. Si los portadores de carga predominantes son electrones, el material se denomina semiconductor *tipo n* (*n* inicial de "negativo"), si los portadores de carga que predominan son huecos, el material se denomina semiconductor *tipo p* (*p* inicial de "positivo").

Problemas resueltos

- 39.1. Un modelo para la conducción de corriente eléctrica en un metal, consiste en suponer que el metal es un recipiente que contiene un gas electrónico y la estructura metálica hace las veces de recipiente. Cuando se aplica un potencial eléctrico a través del material, los electrones que se mueven al azar son acelerados en la dirección del campo eléctrico aplicado en sentido contrario y después de varios choques con los iones pesados de la estructura adquieren una *velocidad de arrastre* neta promedio v_d , la cual se traduce en una corriente eléctrica neta. Hallar la resistividad para un material en el cual se encuentran n electrones por unidad de volumen y donde el recorrido libre medio del electrón es λ y la velocidad promedio debida a la excitación térmica es \bar{v} . Para simplificar, supóngase que el volumen V es el de una caja de sección transversal de área A y longitud l .

Si se aplica un potencial ϕ a través del material y a lo largo del lado de longitud l , la fuerza sobre un electrón es

$$F = eE = e \frac{\phi}{l}$$

y la aceleración del electrón es

$$a = \frac{F}{m_e} = \frac{e\phi}{m_e l}$$

El tiempo promedio entre los choques de los electrones con la estructura es $t = \lambda / \bar{v}$. La velocidad alrededor de su velocidad al azar, adquirida durante este intervalo de tiempo es la velocidad de arrastre

$$v_d = at = \frac{e\phi\lambda}{m_e l \bar{v}}$$

(Más exactamente, $v_d = at'$, donde t' es el tiempo promedio medido *desde el último choque*. No obstante, como hemos supuesto que los choques son acontecimientos independientes al azar, es posible demostrar que el tiempo entre choques tiene una distribución exponencial, ecuación (1) del problema 29.1. Podemos demostrar entonces que el tiempo esperado desde el último choque es igual al tiempo esperado entre los choques, es decir, $t' = t$.)

La corriente I es la rapidez con la cual es transportada la carga que cruza la sección transversal de área A . La parte de movimiento al azar de los electrones no produce transporte neto y, por lo tanto,

$$I = (ne)Av_d = \frac{ne^2\lambda A}{m_e l \bar{v}} \phi$$

que es la ley de Ohm, $I = \phi/R$. Definiendo la *resistividad* ρ de un material como

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

tenemos

$$\rho = \frac{m_e \bar{v}}{ne^2 \lambda}$$

- 39.2. Según el problema 39.1, calcular la resistividad de la plata ($A = 108$), cuya densidad es 10.5×10^3 kg/m³ suponiendo que cada átomo contribuye con un electrón, (electrón de valencia) para la conducción. Para efectos de este cálculo considere el valor de λ igual a 100 veces la *distancia* interatómica d , y v_d igual a la velocidad para la cual la energía de Fermi, $E_{f0} = 5.5$ eV.

La velocidad que corresponde a la energía de Fermi está dada por

$$v_f = \left(\frac{2E_{f0}}{m_e c^2} \right)^{1/2} c = \left(\frac{2 \times 5.5 \text{ eV}}{0.511 \times 10^6 \text{ eV}} \right)^{1/2} (3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1.39 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Puesto que cada átomo contribuye con un electrón, la densidad atómica resulta ser igual a la densidad electrónica:

$$n = \frac{(6.02 \times 10^{26} \text{ átomos/kmol})(10.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{108 \text{ kg/kmol}} \left(\frac{1 \text{ electrón}}{\text{átomo}} \right) = 5.85 \times 10^{28} \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}$$

Si cada átomo ocupa un volumen aproximado de d^3 , tenemos

$$\frac{\lambda}{100} = d = \left(\frac{1}{5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}} \right)^{1/3} = 2.58 \times 10^{-10} \text{ m} \quad \text{ó} \quad \lambda = 2.58 \times 10^{-8} \text{ m}$$

Utilizando el resultado del problema 39.1, obtenemos

$$\rho = \frac{m_e v_f}{e^2 n \lambda} = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.39 \times 10^6 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (5.85 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(2.58 \times 10^{-8} \text{ m})} = 3.29 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

Se ha encontrado experimentalmente que la resistividad de la plata varía de $1.5 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ a 0°C hasta $6.87 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ a 800°C . Se observa así que nuestra burda aproximación concuerda razonablemente con el valor observado.

- 39.3.** Calcular la resistividad del silicio ($A = 28$), siguiendo el proceso descrito en el problema 39.2, sabiendo que la densidad es de $2.42 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ y su valencia es 2. Suponga que la energía de Fermi para el silicio es de unos 5 eV.

Del mismo modo que en el problema 39.2, obtenemos

$$v_f = \left(\frac{2E_{f0}}{m_e c^2} \right)^{1/2} c = \left(\frac{2 \times 5 \text{ eV}}{0.511 \times 10^6 \text{ eV}} \right)^{1/2} (3 \times 10^8 \text{ m/s}) = 13.3 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$n = \frac{(6.02 \times 10^{26} \frac{\text{átomos}}{\text{kmol}})(2.42 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)}{28 \text{ kg/kmol}} \left(\frac{2 \text{ electrones}}{\text{átomo}} \right) = 1.04 \times 10^{29} \frac{\text{electrones}}{\text{m}^3}$$

El número de átomos por m^3 es igual a la mitad de la densidad electrónica y si cada átomo ocupa un volumen aproximado de d^3 , tenemos

$$\lambda = 100d = 100 \left[\frac{1}{\frac{1}{2}(1.04 \times 10^{29} \text{ m}^{-3})} \right]^{1/3} = 2.68 \times 10^{-8} \text{ m}$$

La resistividad es entonces

$$\rho = \frac{m_e v_f}{e^2 n \lambda} = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(13.3 \times 10^5 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2 (1.04 \times 10^{29} \text{ m}^{-3})(2.68 \times 10^{-8} \text{ m})} = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$$

Se ha encontrado que a la temperatura ambiente la resistividad del silicio es de unos $10^3 \Omega \cdot \text{m}$, valor muchísimo mayor que el predicho en este cálculo. La razón de esta discrepancia está en que hemos supuesto que los electrones de valencia generan conducción. Como el silicio es un semiconductor, existe una brecha entre la banda de valencia y la de conducción. Solamente aquellos electrones con energías lo suficientemente grandes para pasar a la banda de conducción podrán tomar parte en la conducción eléctrica.

- 39.4.** Demuestre que en un semiconductor intrínseco el número de huecos con energías comprendidas entre E y $E + dE$ está dado por

$$dn_h = (1 - F_{FD}) g(E) dE$$

donde $g(E)$ es la densidad de estados en la banda de valencia.

A $T = 0$ K la banda de valencia en un semiconductor intrínseco se encuentra llena y no existen electrones en la banda de conducción. Para $T > 0$ K, parte de los electrones han sido excitados a la banda de conducción y el número de ellos es igual al número de huecos creado en la banda de valencia. Esto se indica en la figura 39-3. En la figura 39-3(b) el área sombreada representa la función de distribución para el número de huecos. Por lo tanto, el número de huecos con energías comprendidas entre E y $E + dE$ está dado por

$$dn_h = (1 - F_{FD}) g(E) dE$$

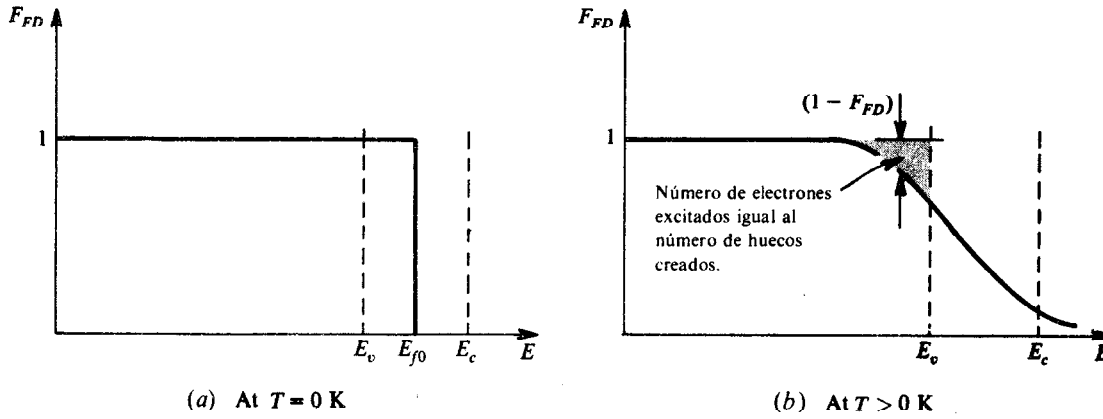


Fig. 39-3

- 39.5. Se puede demostrar, para un semiconductor, que en la región inmediatamente superior a la banda de conducción y debajo de la banda de valencia, la densidad de las funciones de estados $g(E)$ es aproximadamente simétrica alrededor del punto medio de la brecha, E_m , como se indica en la figura 39-4(b). (Dentro de la brecha, la densidad de estados es cero.) Demuestre que el nivel de energía de Fermi se encuentra en el punto medio de la brecha.

Debido a que se produce un hueco en la banda de valencia por cada electrón en la banda de conducción, el número total de electrones, N_e , en la banda de conducción, debe ser igual al número de huecos, N_h , en la banda de valencia. El número de electrones dn_e , con energías comprendidas entre E y $E + dE$ en la banda de conducción es

$$dn_e = F_{FD} g(E) dE$$

mientras que en la banda de valencia el número de huecos, dn_h , con energías comprendidas entre E' y $E' + dE'$ es (ver problema 39.4)

$$dn_h = (1 - F_{FD}) g(E') dE'$$

Por lo tanto,

$$\int_{E_c}^{E_c + E_v} F_{FD}(E) g(E) dE = \int_0^{E_v} [1 - F_{FD}(E')] g(E') dE'$$

En el miembro izquierdo hemos tomado el límite superior como $E_c + E_v$, puesto que $g(E') = 0$ para $E' < 0$ y, por lo tanto, debido a la simetría $g(E) = 0$ para $E > E_c + E_v$. Efectuando el siguiente cambio de variables

$$x = E - E_m \quad x = E_m - E'$$

en las integrales del miembro izquierdo y derecho respectivamente, obtenemos

$$\int_{E_c - E_m}^{E_m} F_{FD}(E_m + x) g(E_m + x) dx = \int_{E_m - E_v}^{E_m} [1 - F_{FD}(E_m - x)] g(E_m - x) dx$$

Pero, por simetría,

$$E_c - E_m = E_m - E_v \quad g(E_m + x) = g(E_m - x)$$

y, por lo tanto,

$$\int_{E_c - E_m}^{E_m} \{ F_{FD}(E_m + x) - [1 - F_{FD}(E_m - x)] \} g(E_m + x) dx = 0 \quad (1)$$

Utilizando la forma explícita para F_{FD} , obtenemos para la cantidad entre llaves:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{(E_m + x - E_f)/kT} + 1} - \left[1 - \frac{1}{e^{(E_m - x - E_f)/kT} + 1} \right] &= \frac{1}{e^{(E_m + x - E_f)/kT} + 1} - \frac{e^{(E_m - x - E_f)/kT}}{e^{(E_m - x - E_f)/kT} + 1} \\ &= \frac{1 - e^{2(E_m - E_f)/kT}}{[e^{(E_m + x - E_f)/kT} + 1][e^{(E_m - x - E_f)/kT} + 1]} \end{aligned}$$

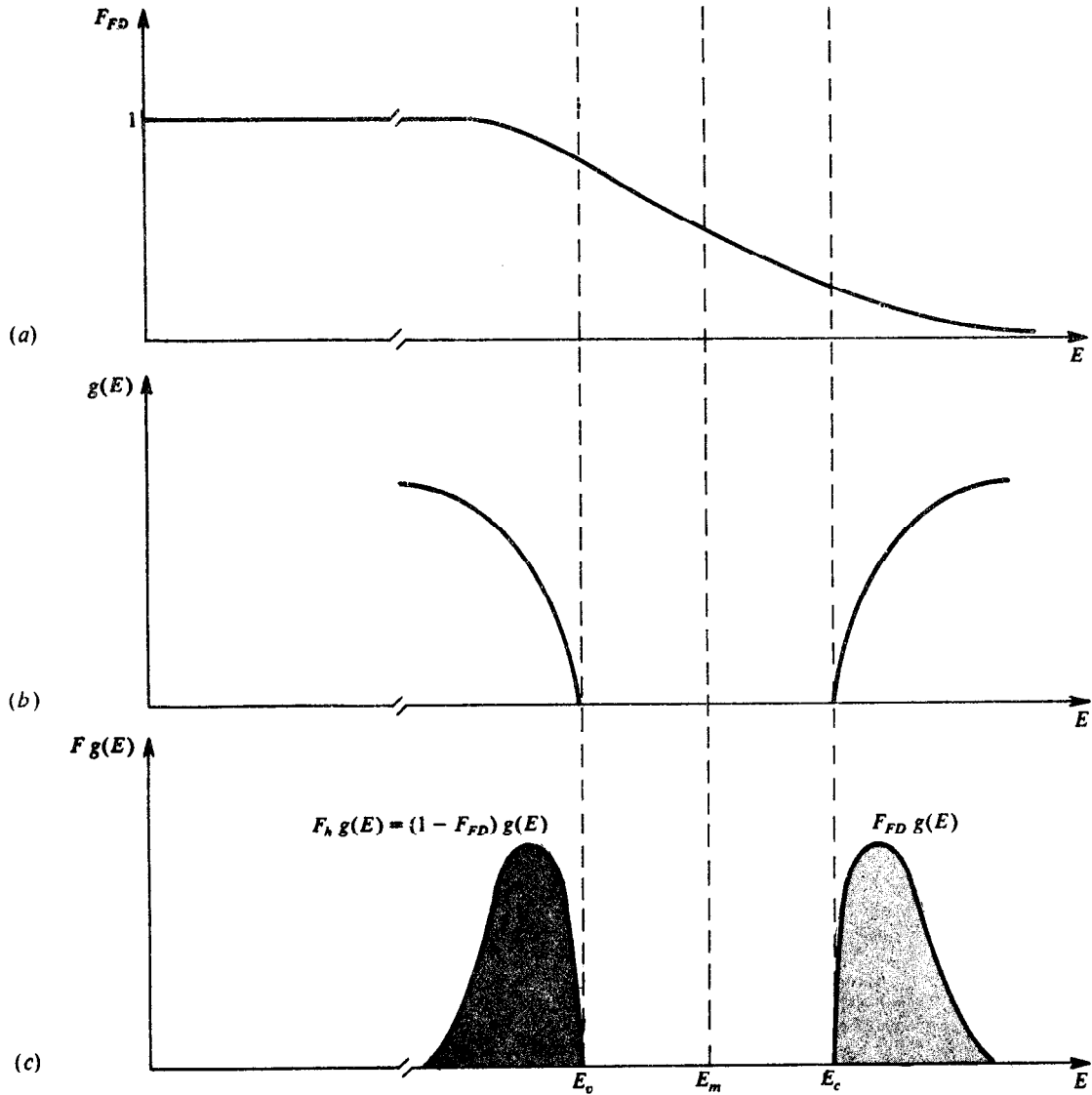


Fig. 39-4

$g(E_m + x)$ es positivo en todo el intervalo de integración de la ecuación (1). Se observa que la cantidad entre llaves es positiva en todo el intervalo si $E_f > E_m$ y es negativa en todo el intervalo si $E_f < E_m$. En uno u otro caso el integrando de la ecuación (1) tendrá un solo signo con el cual el valor de la integral no es nulo. Por lo tanto, $E_f = E_m$.

Un análisis más elaborado demuestra que la densidad de estados no es perfectamente simétrica alrededor de E y, por lo tanto, la energía de Fermi no se encuentra exactamente en el punto medio de la brecha. No obstante, el error que se introduce con nuestra suposición es despreciable.

- 39.6. En el problema 38.9 encontramos que la densidad de estados en la teoría de los electrones libres en un metal se rige por la siguiente ecuación:

$$g(E) = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} E^{1/2}$$

Supóngase que esta misma ecuación es válida para los electrones de la banda de conducción si sustituimos en ella a E del lado derecho por $E - E_c$, donde E_c es la energía correspondiente a la parte más baja de la banda de conducción. Considerando la energía de Fermi en el centro de la brecha, demuestre que el número de electrones de valencia por unidad de volumen en la banda de conducción a la temperatura T varía de acuerdo con

$$n_e = C e^{-E_g/2kT}$$

donde $C = 2(2\pi m_e kT)^{3/2}/h^3$ y $E_g = E_c - E_v$ es el ancho de la brecha en la energía.

A temperaturas comunes $kT \approx 0.026$ eV, para las cuales se cumple que la banda de conducción $E - E_f \gg kT$, podemos utilizar la expresión aproximada

$$F_{FD} = e^{-(E - E_f)/kT}$$

El número total de electrones N_e , en la banda de conducción es entonces.

$$N_e = \int_{E_c}^{\infty} F_{FD} g(E) dE = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2} V}{h^3} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-(E - E_f)/kT} dE$$

ó

$$n_e = \frac{N_e}{V} = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{-(E_c - E_f)/kT} \int_{E_c}^{\infty} (E - E_c)^{1/2} e^{-(E - E_c)/kT} dE$$

Utilizando el resultado del problema 39.5, según el cual $E_c - E_f = E_g/2$ y haciendo el siguiente cambio de variable $u^2 = E - E_c$, obtenemos

$$n_e = \frac{8\sqrt{2} \pi m_e^{3/2}}{h^3} e^{-E_g/2kT} \int_0^{\infty} u^2 e^{-u^2/kT} du = 2 \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_g/2kT}$$

la integral ha sido evaluada con ayuda de la tabla 37-1 ($n = 2$).

Si se introducen los valores de las constantes en la expresión para n_e , se obtiene

$$n_e = (4.83 \times 10^{21}) T^{3/2} e^{-E_g/2kT} \text{ electrones/m}^3$$

Para $T = 300$ K, $kT = 0.026$ eV, con lo cual

$$n_e|_{300 \text{ K}} = (4.83 \times 10^{21}) (300)^{3/2} e^{-E_g/2(0.026 \text{ eV})} = (2.51 \times 10^{25}) e^{-E_g/(0.052 \text{ eV})} \text{ electrones/m}^3$$

Estrictamente hablando, la expresión para n_e no es correcta, ya que la energía de Fermi no se encuentra exactamente en el centro de la brecha. Sin embargo, para cálculos dentro de ciertos valores razonables, la expresión es lo suficientemente exacta.

- 39.7. Con relación al problema 39.6, calcular la razón entre las densidades electrónicas en las bandas de conducción del carbón aislador ($E_g = 5.33$ eV) y el silicio semiconductor ($E_g = 1.14$ eV) a la temperatura ambiente (300 K).

A 300 K, $kT = 0.026$ eV.

$$\frac{n_C}{n_{Si}} = e^{-(5.33 \text{ eV} - 1.14 \text{ eV})/(0.052 \text{ eV})} \approx 10^{-35}$$

El número de electrones de conducción en un aislador es muchísimo menor que el del semiconductor, lo que demuestra por qué los aisladores tienen resistividades enormemente altas, aún comparadas con las de los semiconductores.

- 39.8.** La *movilidad* de los portadores de carga se define como $\mu = v_d/E$, donde v_d es la velocidad de arrastre que aparece al aplicar un campo eléctrico E ; la movilidad así definida representa una medida de la facultad que tienen los portadores de carga para moverse a través de un material cuando se aplica un campo eléctrico. De acuerdo con el problema 39.1, la movilidad también puede escribirse así: $\mu = e\lambda/m\bar{v}$. Para el silicio ($E_g = 1.1$ eV) a temperatura ambiente, la movilidad de los electrones es $\mu_n = 0.13$ m²/V·s y la movilidad de los huecos es $\mu_p = 0.05$ m²/V·s. Calcular la conductividad del silicio, $\sigma = 1/\rho$, donde ρ es la resistividad (ver problema 39.1).

En la conductividad σ aparecen dos contribuciones: una debida a los electrones y la otra a los huecos. Por lo tanto

$$\sigma = \frac{1}{\rho_n} + \frac{1}{\rho_p} = \frac{e^2 n_n \lambda_n}{m_e \bar{v}_e} + \frac{e^2 n_p \lambda_p}{m_p \bar{v}_p}$$

Utilizando $\mu = e\lambda/m\bar{v}$, podemos escribir

$$\sigma = n_n e \mu_n + n_p e \mu_p$$

Del resultado del problema 39.6,

$$n_n = n_p = (2.51 \times 10^{25}) e^{-(1.1 \text{ eV})/(0.052 \text{ eV})} = 1.6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

luego

$$\sigma = (1.6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.13 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s} + 0.05 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}) = 4.6 \times 10^{-4} (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$$

La resistividad total es entonces

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2.2 \times 10^3 \Omega \cdot \text{m}$$

- 39.9.** Se refiere al problema 39.8. Se agrega al silicio un átomo de impureza el cual cede un electrón adicional a la banda de conducción del silicio en la proporción de un átomo de impureza por 10^{10} átomos de silicio. Calcular la conductividad del silicio estimulado suponiendo que la movilidad de los electrones donados es la misma que la de los electrones huéspedes y que la densidad del donante es mucho mayor que la densidad intrínseca de los electrones y huecos huéspedes.

Del problema 39.3 la densidad de los átomos de silicio es

$$n_{\text{Si}} = 5.2 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$$

por lo tanto, la densidad de los átomos del donante es 10^{-10} veces este valor, o sea

$$n_d = 5.2 \times 10^{18} \text{ átomos/m}^3$$

(En el problema 39.8 encontramos que la densidad de los portadores de carga intrínseca era $\approx 10^{16} \text{ m}^{-3}$, valor que resulta mucho menor que la densidad del donante n_d .) La expresión general para la conductividad es

$$\sigma = n_n e \mu_n + n_p e \mu_p$$

donde n_n y n_p son las densidades de los portadores de carga negativa y positiva respectivamente. Puesto que la densidad predominante es la de los donantes de carga negativa, podemos escribir

$$\sigma \approx n_d e \mu_n = (5.2 \times 10^{18} \text{ m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.13 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}) = 0.11 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$$

Cuando comparamos este resultado con el del problema 39.8, observamos que una pequeñísima cantidad de impurezas puede tener efectos considerables en lo que se refiere a la conducción de un semiconductor. En la práctica, la relación de impurezas oscila entre 10^{-5} a 10^{-10} .

- 39.10. Una corriente constante circula por una tira delgada de material que se encuentra en un campo magnético B perpendicular a la tira, en estas condiciones aparece una pequeña diferencia de potencial a través de la tira (este fenómeno se conoce como *efecto Hall*). Demuestre que la relación entre el campo eléctrico E inducido en el material, la densidad de corriente j , el número de portadores de carga por unidad de volumen n y el campo magnético B es

$$E = \frac{jB}{qn}$$

donde q representa la carga de los portadores de carga.

En la figura 39-5 se describe la situación de equilibrio para los portadores de carga positiva. Cuando surge el campo magnético B la fuerza F_B hace que el lado izquierdo del material tenga una carga neta positiva con respecto al lado derecho. El campo eléctrico E creado por esta acumulación de carga ejercerá una fuerza F_E sobre los portadores de carga para producir una situación de equilibrio con lo cual los portadores no son arrastrados ni a la derecha ni a la izquierda. Por lo tanto, con v_d perpendicular a B , tenemos

$$F_E = F_B \quad \text{ó} \quad qE = qv_d B \quad \text{ó} \quad E = v_d B$$

y puesto que $j = qnv_d$,

$$E = \frac{jB}{qn}$$

Es posible determinar el valor $1/qn$, denominado *coeficiente de Hall*, mediante mediciones de E , j y B .

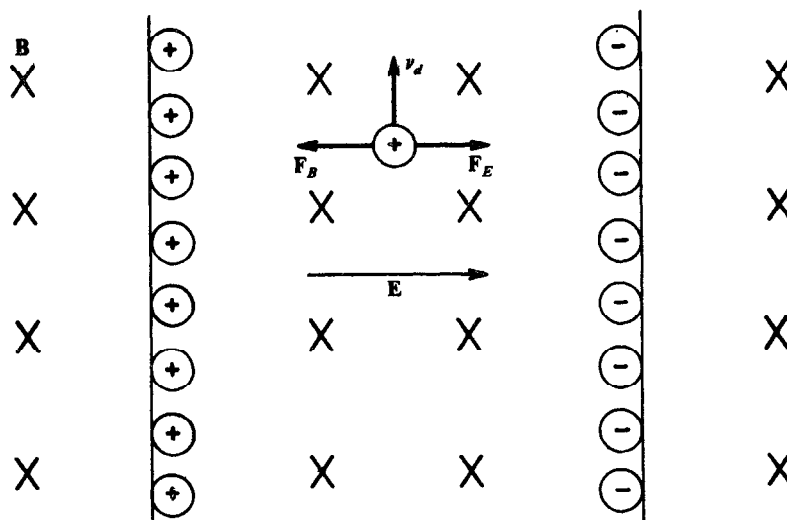


Fig. 39-5

Como la dirección del campo eléctrico y la correspondiente polaridad de la diferencia de potencial dependen del signo de los portadores de carga, es posible determinar este signo a partir del efecto Hall. Aunque sólo los electrones tienen libertad para moverse en un material, se encuentra que los coeficientes de Hall indican la conducción de portadores de carga positivos. Tanto los huecos como la ausencia de electrones en la banda de valencia aparecen como portadores de carga positiva.

Problemas suplementarios

- 39.11. La energía mínima que deben tener los electrones que escapan de un metal en la *emisión termiónica* es $E = E_f + \phi$, donde E_f es la energía de Fermi y ϕ la función de trabajo. Hallar la distribución de energía de los electrones emitidos, suponiendo que $\phi \gg kT$. Resp. $Ae^{-E/kT}$

- 39.12. La resistividad del oro ($A_u = 197$) es $2.04 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$, la energía de Fermi es de 5.54 eV y su densidad $19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$. Calcular la relación entre el recorrido medio libre λ a la distancia interatómica d para los electrones de conducción si cada átomo de oro contribuye con un electrón libre. Resp. $\lambda/d = 161$
- 39.13. Calcular la relación entre las densidades electrónicas en las bandas de conducción del silicio ($E_g = 1.1 \text{ eV}$) y del germanio ($E_g = 0.7 \text{ eV}$) a 300 K. Resp. $n_{\text{Ge}}/n_{\text{Si}} = 2.2 \times 10^3$
- 39.14. Se agrega al silicio un átomo de impureza que cede un hueco adicional a la banda de valencia del silicio en una proporción de un átomo de impureza por 10^9 de silicio. Calcular la conductividad del silicio estimulado suponiendo que la movilidad de los huecos donados es igual a la de los huecos intrínsecos ($\mu_p = 0.05 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$). Resp. $0.42 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$
- 39.15. Después de agregar un átomo de impureza que cede un electrón adicional a la banda de conducción del silicio ($\mu_n = 0.13 \text{ m}^2/\text{V} \cdot \text{s}$), la conductividad del silicio estimulado es de $0.54 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$. Calcular la relación de las impurezas. Resp. 2 partes en 10^9
- 39.16. Conviene describir el movimiento de un electrón (o de un hueco) en una banda mediante una *masa efectiva*, m^* , definida así:

$$\frac{1}{m^*} \equiv \frac{1}{\hbar^2} \frac{d^2 E}{dk^2}$$

donde k es el número de onda ($k = 2\pi/\lambda$). Demostrar que para un electrón libre ($p = \hbar k$), $m^* = m$.

Apéndice

ALGUNAS CONSTANTES FUNDAMENTALES EN UNIDADES ADECUADAS

$$c = \text{velocidad de la luz} = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$e = \text{carga del electrón} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$h = \text{constante de Planck} = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ = 4.136 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = 0.658 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \text{constante de Coulomb} = 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

$$k = \frac{R}{N} = \text{constante de Boltzmann} = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K} \\ = 8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K}$$

ALGUNAS CONVERSIONES Y COMBINACIONES UTILES

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m} = 10^5 \text{ fm}$$

$$hc = 19.865 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m} = 12.41 \times 10^3 \text{ eV} \cdot \text{Å} = 1241 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\hbar c = 3.165 \times 10^{-26} \text{ J} \cdot \text{m} = 1973 \text{ eV} \cdot \text{Å} = 197.3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$ke^2 = 1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

$$\frac{ke^2}{\hbar c} = \text{constante de estructura fina} = \frac{1}{137}$$

$$\frac{e\hbar}{2m_e} = \text{magnetón de Bohr} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J/T} \\ = 5.79 \times 10^{-5} \text{ eV/T}$$

MASAS DE ALGUNAS PARTICULAS ELEMENTALES

Partícula	Masa en reposo m_0 (kg)	$m_0 c^2$ (MeV)
Electrón	9.109×10^{-31}	0.511
Protón	1.673×10^{-27}	938.3
Neutrón	1.675×10^{-27}	939.6
Unidad de masa atómica (1 u)	1.661×10^{-27}	931.5

MASA DE LOS ATOMOS NEUTROS

El asterisco que aparece al lado del número de masa en la quinta columna de la tabla indica que se trata de un isótopo radiactivo, cuyo período de vida media aparece en la séptima columna.

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
0	(Neutrón)	n		1*	1.008665	12 min
1	Hidrógeno	H	1.0079	1	1.007825	
	Deuterio	D		2	2.014102	
	Tritio	T		3*	3.016050	12.26 a
2	Helio	He	4.0026	3	3.016030	
				4	4.002603	
				6*	6.018892	0.802 s
3	Litio	Li	6.939	6	6.015125	
				7	7.016004	
4	Berilio	Be	9.0122	7*	7.016929	53.4 d
				9	9.012186	
				10*	10.013534	2.7×10^6 a
5	Boro	B	10.811	10	10.012939	
				11	11.009305	
6	Carbón	C	12.01115	12	12.000000	
				13	13.003354	
				14*	14.003242	5730 a
7	Nitrógeno	N	14.0067	14	14.003074	
				15	15.000108	
8	Oxígeno	O	15.9994	15*	15.003070	122 s
				16	15.994915	
				17	16.999133	
				18	17.999160	
9	Fluor	F	18.9984	19	18.998405	
10	Neón	Ne	20.183	20	19.992440	
				21	20.993849	
				22	21.991385	
11	Sodio	Na	22.9898	22*	21.994437	2.60 a
				23	22.989771	
12	Magnesio	Mg	24.312	23*	22.994125	12 s
				24	23.985042	
				25	24.986809	
				26	25.982593	
13	Aluminio	Al	26.9815	26*	25.986892	7.4×10^5 a
				27	26.981539	
14	Silicio	Si	28.086	28	27.976929	
				29	28.976496	
				30	29.973763	
				32*	31.974020	≈ 700 a
15	Fósforo	P	30.9738	31	30.973765	
16	Azufre	S	32.064	32	31.972074	
				33	32.971462	
				34	33.967865	
				36	35.967089	
17	Cloro	Cl	35.453	35	34.968851	
				36*	35.968309	3×10^5 a
				37	36.965898	
18	Argón	A	39.948	36	35.967544	
				38	37.962728	
				39*	38.964317	270 a
				40	39.962384	
				42*	41.963048	33 a
19	Potasio	K	39.102	39	38.963710	
				40*	39.964000	1.3×10^9 a

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
(19)	(Potasio)			41	40.961832	
20	Calcio	Ca	40.08	39*	38.970691	0.877 s
				40	39.962589	
				41*	40.962275	7.7×10^4 a
				42	41.958625	
				43	42.958780	
				44	43.955492	
				46	45.953689	
				48	47.952531	
21	Escandio	Sc	44.956	45	44.955920	
				50*	49.951730	1.73 min
22	Titanio	Ti	47.90	44*	43.959572	47 a
				46	45.952632	
				47	46.951768	
				48	47.947950	
				49	48.947870	
				50	49.944786	
23	Vanadio	V	50.942	50*	49.947164	$\approx 6 \times 10^{15}$ a
				51	50.943961	
24	Cromo	Cr	51.996	50	49.946055	
				52	51.940513	
				53	52.940653	
				54	53.938882	
25	Manganeso	Mn	54.9380	50*	49.954215	0.29 s
				55	54.938050	
26	Hierro	Fe	55.847	54	53.939616	
				55*	54.938299	2.4 a
				56	55.939395	
				57	56.935398	
				58	57.933282	
				60*	59.933964	$\approx 10^5$ a
27	Cobalto	Co	58.9332	59	58.933189	
				60*	59.933813	5.24 a
28	Níquel	Ni	58.71	58	57.935342	
				59*	58.934342	8×10^4 a
				60	59.930787	
				61	60.931056	
				62	61.928342	
				63*	62.929664	92 a
				64	61.927958	
29	Cobre	Cu	63.54	63	62.929592	
				65	64.927786	
30	Zinc	Zn	65.37	64	63.929145	
				66	65.926052	
				67	66.927145	
				68	67.924857	
				70	69.925334	
31	Galio	Ga	69.72	69	68.925574	
				71	70.924706	
32	Germanio	Ge	72.59	70	69.924252	
				72	71.922082	
				73	72.923462	
				74	73.921181	
				76	75.921405	
33	Arsénico	As	74.9216	75	74.921596	
34	Selenio	Se	78.96	74	73.922476	
				76	75.919207	
				77	76.919911	
				78	77.917314	
				79*	78.918494	7×10^4 a

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
(34)	(Selenio)			80	79.916527	
				82	81.916707	
35	Bromo	Br	79.909	79	78.918329	
				81	80.916292	
36	Kriptón	Kr	83.80	78	77.920403	
				80	79.916380	
				81*	80.916610	2.1×10^5 a
				82	81.913482	
				83	82.914131	
				84	83.911503	
				85*	84.912523	10.76 a
				86	85.910616	
37	Rubidio	Rb	85.47	85	84.911800	
				87*	86.909186	5.2×10^{10} a
38	Estroncio	Sr	87.62	84	83.913430	
				86	85.909285	
				87	86.908892	
				88	87.905641	
				90*	89.907747	28.8 a
39	Ytrio	Y	88.905	89	88.905872	
40	Circonio	Zr	91.22	90	89.904700	
				91	90.905642	
				92	91.905031	
				93*	92.906450	9.5×10^5 a
				94	93.906313	
				96	95.908286	
41	Niobio	Nb	92.906	91*	90.906860	(largo)
				92*	91.907211	$\approx 10^7$ a
				93	92.906382	
				94*	93.907303	2×10^4 a
42	Molibdeno	Mo	95.94	92	91.906810	
				93*	92.906830	$\approx 10^4$ a
				94	93.905090	
				95	94.905839	
				96	95.904674	
				97	96.906021	
				98	97.905409	
				100	99.907475	
43	Tecnecio	Tc		97*	96.906340	2.6×10^6 a
				98*	97.907110	1.5×10^6 a
				99*	98.906249	2.1×10^5 a
44	Rutenio	Ru	101.07	96	95.907598	
				98	97.905289	
				99	98.905936	
				100	99.904218	
				101	100.905577	
				102	101.904348	
				104	103.905430	
45	Rodio	Rh	102.905	103	102.905511	
46	Paladio	Pd	106.4	102	101.905609	
				104	103.904011	
				105	104.905064	
				106	105.903479	
				107*	106.905132	7×10^6 a
				108	107.903891	
				110	109.905164	
47	Plata	Ag	107.870	107	106.905094	
				109	108.904756	
48	Cadmio	Cd	112.40	106	105.906463	
				108	107.904187	

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	T _{1/2}
(48)	(Cadmio)			109*	108.904928	453 d
				110	109.903012	
				111	110.904188	
				112	111.902762	
				113	112.904408	
				114	113.903360	
				116	115.904762	
49	Indio	In	114.82	113	112.904089	
				115*	114.903871	6 × 10 ¹⁴ a
50	Estaño	Sn	118.69	112	111.904835	
				114	113.902773	
				115	114.903346	
				116	115.901745	
				117	116.902958	
				118	117.901606	
				119	118.903313	
				120	119.902198	
				121*	120.904227	25 a
				122	121.903441	
				124	123.905272	
51	Antimonio	Sb	121.75	121	120.903816	
				123	122.904213	
				125*	124.905232	2.7 a
52	Teluro	Te	127.60	120	119.904023	
				122	121.903064	
				123*	122.904277	1.2 × 10 ¹³ a
				124	123.902842	
				125	124.904418	
				126	125.903322	
				128	127.904476	
				130	129.906238	
53	Yodo	I	126.9044	127	126.904070	
				129*	128.904987	1.6 × 10 ⁷ a
54	Xenón	Xe	131.30	124	123.906120	
				126	125.904288	
				128	127.903540	
				129	128.904784	
				130	129.903509	
				131	130.905085	
				132	131.904161	
				134	133.905815	
				136	135.907221	
55	Cesio	Cs	132.905	133	132.905355	
				134*	133.906823	2.1 a
				135*	134.905770	2 × 10 ⁶ a
				137*	133.906770	30 a
56	Bario	Ba	137.34	130	129.906245	
				132	131.905120	
				133*	132.905879	7.2 a
				134	133.904612	
				135	134.905550	
				136	135.904300	
				137	136.905500	
				138	137.905000	
57	Lántano	La	138.91	137*	136.906040	6 × 10 ⁴ a
				138*	137.906910	1.1 × 10 ¹¹ a
				139	138.906140	
58	Cerio	Ce	140.12	136	135.907100	
				138	137.905830	
				140	139.905392	

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
(58)	(Cerio)			142*	141.909140	5×10^{15} a
59	Praseodimio	Pr	140.907	141	140.907596	
60	Neodimio	Nd	144.24	142	141.907663	
				143	142.909779	2.1×10^{15} a
				144*	143.910039	
				145	144.912538	
				146	145.913086	
				148	147.916869	
				150	149.920960	
61	Promecio	Pm		145*	144.912691	18 a
				146*	145.914632	1600 d
				147*	146.915108	2.6 a
62	Samario	Sm	150.35	144	143.911989	
				146*	145.912992	1.2×10^8 a
				147*	146.914867	1.08×10^{11} a
				148*	147.914791	1.2×10^{13} a
				149*	148.917180	4×10^{14} a
				150	149.917276	
				151*	150.919919	90 a
				152	151.919756	
				154	153.922282	
63	Europio	Eu	151.96	151	150.919838	
				152*	151.921749	12.4 a
				153	152.921242	
				154*	153.923053	16 a
				155*	154.922930	1.8 a
64	Gadolinio	Gd	157.25	148*	147.918101	85 a
				150*	149.918605	1.8×10^6 a
				152*	151.919794	1.1×10^{14} a
				154	153.920929	
				155	154.922664	
				156	155.922175	
				157	156.924025	
				158	157.924178	
				160	159.927115	
65	Terbio	Tb	158.925	159	158.925351	
66	Disprosio	Dy	162.50	156*	155.923930	2×10^{14} a
				158	157.924449	
				160	159.925202	
				161	160.926945	
				162	161.926803	
				163	162.928755	
				164	163.929200	
67	Holmio	Ho	164.930	165	164.930421	
				166*	165.932289	1.2×10^3 a
68	Erbio	Er	167.26	162	161.928740	
				164	163.929287	
				166	165.930307	
				167	166.932060	
				168	167.932383	
				170	169.935560	
69	Tulio	Tm	168.934	169	168.934245	
				171*	170.936530	1.9 a
70	Yterbio	Yb	173.04	168	167.934160	
				170	169.935020	
				171	170.936430	
				172	171.936360	
				173	172.938060	
				174	173.938740	
				176	175.942680	

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
71	Lutecio	Lu	174.97	173*	172.938800	1.4 a
				175	174.940640	
				176*	175.942660	2.2×10^{10} a
72	Hafnio	Hf	178.49	174*	173.940360	2.0×10^{15} a
				176	175.941570	
				177	176.943400	
				178	177.943880	
				179	178.946030	
				180	179.946820	
73	Tántalo	Ta	180.948	180	179.947544	
				181	180.948007	
74	Wolframio (Tungsteno)	W	183.85	180	179.947000	
				182	181.948301	
				183	182.950324	
				184	183.951025	
				186	185.954440	
75	Renio	Re	186.2	185	184.953059	
				187*	186.955833	5×10^{10} a
76	Osmio	Os	190.2	184	183.952750	
				186	185.953870	
				187	186.955832	
				188	187.956081	
				189	188.958300	
				190	189.958630	
				192	191.961450	
				194*	193.965229	6.0 a
77	Iridio	Ir	192.2	191	190.960640	
				193	192.963012	
78	Platino	Pt	195.09	190*	189.959950	7×10^{11} a
				192	191.961150	
				194	193.962725	
				195	194.964813	
				196	195.964967	
				198	197.967895	
79	Oro	Au	196.967	197	196.966541	
80	Mercurio	Hg	200.59	196	195.965820	
				198	197.966756	
				199	198.968279	
				200	199.968327	
				201	200.970308	
				202	201.970642	
				204	203.973495	
81	Talio	Tl	204.19	203	202.972353	
				204*	203.973865	3.75 a
				205	204.974442	
		Ra E''		206*	205.976104	4.3 min
		Ac C''		207*	206.977450	4.78 min
		Th C''		208*	207.982013	3.1 min
		Ra C''		210*	209.990054	1.3 min
82	Plomo	Pb	207.19	202*	201.927997	3×10^5 a
				204*	203.973044	1.4×10^{17} a
				205*	204.974480	3×10^7 a
				206	205.974468	
				207	206.975903	
				208	207.976650	
		Ra D		210*	209.984187	22 a
		Ac B		211*	210.988742	36.1 min
		Th B		212*	211.991905	10.64 h
		Ra B		214*	213.999764	26.8 min
83	Bismuto	Bi	209.980	207*	206.978438	30 a

Z	Elemento	Símbolo	Peso atómico químico	A	Masa (u)	$T_{1/2}$
(83)	(Bismuto)			208*	207.979731	3.7×10^5 a
				209	208.980394	
		Ra E		210*	209.984121	5.1 d
		Th C		211*	210.987300	2.15 min
				212*	211.991876	60.6 min
		Ra C		214*	213.998686	19.7 min
				215*	215.001830	8 min
84	Polonio	Po		209*	208.982426	103 a
		Ra F		210*	209.982876	138.4 d
		Ac C'		211*	210.986657	0.52 s
		Th C'		212*	211.989629	0.30 μ s
		Ra C'		214*	213.995201	164 μ s
		Ac A		215*	214.999423	0.0018 s
		Th A		216*	216.001790	0.15 s
		Ra A		218*	218.008930	3.05 min
85	Astato	At		215*	214.998663	≈ 100 μ s
				218*	218.008607	1.3 s
				219*	219.011290	0.9 min
86	Radón	Rn				
		An		219*	219.009481	4.0 s
		Tn		220*	220.011401	56 s
		Rn		222*	222.017531	3.823 d
87	Francio	Fr				
		Ac K		223*	223.019736	22 min
88	Radio	Ra	226.05			
		Ac X		223*	223.018501	11.4 d
		Th X		224*	224.020218	3.64 d
		Ra		226*	226.025360	1620 a
		Ms Th ₁		228*	228.031139	5.7 a
89	Actinio	Ac		227*	227.027753	21.2 a
		Ms Th ₂		228*	228.031080	6.13 h
90	Torio	Th	232.038			
		Rd Ac		227*	227.027706	18.17 d
		Rd Th		228*	228.028750	1.91 a
				229*	229.031652	7300 a
		Io		230*	230.033087	76000 a
		UY		231*	231.036291	25.6 h
		Th		232*	232.038124	1.39×10^{10} a
		UX ₁		234*	234.043583	24.1 d
91	Protoactinio	Pa	231.0359	231*	231.035877	32480 a
		UZ		234*	234.043298	6.66 h
92	Uranio	U	238.03	230*	230.033937	20.8 d
				231*	231.036264	4.3 d
				232*	232.037168	72 a
				233*	233.039522	1.62×10^5 a
				234*	234.040904	2.48×10^5 a
		Ac U		235*	235.043915	7.13×10^8 a
				236*	236.045637	2.39×10^7 a
		UI		238*	238.048608	4.51×10^9 a
93	Neptunio	Np	237.0480	235*	235.044049	410 d
				236*	236.046624	5000 a
				237*	237.048056	2.14×10^6 a
94	Plutonio	Pu	239.0522	236*	236.046071	2.85 a
				238*	238.049511	89 a
				239*	239.052146	24360 a
				240*	240.053882	6700 a
				241*	241.056737	13 a
				242*	242.058725	3.79×10^5 a
				244*	244.064100	7.6×10^7 a

TABLA DE PREFIJOS

Prefijo	Abreviatura	Orden de magnitud
Tera	T	10^{12}
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	K	10^3
hecto	H	10^2
deca	D	10
deci	d	10^{-1}
centi	C	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	P	10^{-12}
femto	F	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Indice

- Absorción
 - coeficiente de, 75
 - picos de, 154
- Acontecimiento, 1
- Acoplamiento Russell-Saunders, 137
- Acoplamiento spin-órbita, 126, 137, 179
- Actividad, 187
- Afinidad electrónica, 230
- Aislador, 289
- Alfa
 - decaimiento, 187
 - partícula, 186, 187
- Ancho natural de línea, 94
- Antipartícula, 70, 189, 215, 218
- Aparejamiento, 176, 179, 182, 184
- Atomo de impurezas, 296
- Atomo, hidrógeno, 100
 - hidrogénico, 104
 - mu-mesónico, 103, 109, 111
 - pi-mesónico, 103
 - polieletrónico, 133
- Átomos polieletrónicos, 135
- Atmósferas, ley de las, 246

- Banda, de conducción, 289
 - de valencia, 289
- Barn, 204
- Beta
 - decaimiento, 188
 - partícula, 186, 188
- Bohr, N., 93
 - átomo, 100
 - modelo, 100
 - órbita, 100
 - principio de correspondencia, 107
 - teoría, 100, 101
- Boltzmann, L., 272
 - constante de, 245
 - distribución de, 254, 259
- Bose-Einstein
 - condensación de, 281
 - estadística, 269, 281
- Bosones, 218, 269
- Bragg
 - difracción de, 83
 - ley de, 83
 - plano de, 83

- Calor específico, 277
- Caminar al azar, 247

- Capa, atómica, 135
 - nuclear, 177
- Capa hemirreductora, 75
- Capa K, 152
- Capa L, 152
- Capa M, 152
- Capacidad calorífica, 277?
- Captura de electrón, 188, 189
- Ciclo, Bethe, 212, 216
 - carbón, 212, 216
 - Critchfield, 212, 216
 - protón-protón, 212, 216
- Conducción eléctrica, 273
- Conductividad, eléctrica, 296
 - de calor, 277
- Conductor, 289
- Configuración electrónica, 135
- Constante de acoplamiento, 219
- Constante de decaimiento, 186
- Contracción de la longitud, 17
- Contracción de Lorentz-Fitzgerald, 17
- Compton
 - dispersión, 63
 - ecuación de, 63
 - efecto de, 63
 - longitud de onda de, 63, 66, 82, 112
- Coulomb
 - energía, 170, 176
 - fuerza, 171
- Cowan, C.L., 188
- Cuanta, 53
- Curie, 187, 190
- Chadwick, J., 208

- De Broglie
 - hipótesis de, 78, 100
 - ondas de, 78, 89, 100
- Debye, P., 232, 277
 - frecuencia de, 278
 - temperatura de, 279, 280
 - teoría de, 277
 - unidad, 232
- Decaimiento, alfa, 187
 - beta, 187
 - gamma, 187
- Decaimiento radioactivo, 186
- Degeneración, 274, 285
- Densidad de estados, 253, 257, 258, 259, 269, 279
- Desintegración
 - constante de, 186
 - energía de, 188, 189

- Destrucción de pares, 69
- Deuterio, 109
- Deutrón, 165, 166, 201
- Diagramas de niveles de energía, 102
- Difracción de, electrones, 84
 - partículas, 92
 - rayos X, 83
- Dilatación del tiempo, 20
- Dirac, P., 123, 269, 285
- Dispersión, elástica, 201
 - inelástica, 201, 204
- Distribución de, Boltzmann, 254
 - Bose-Einstein, 269, 285
 - exponencial, 188
 - Fermi-Dirac, 269, 285
 - frecuencia, 252
 - Maxwell-Boltzmann, 254, 259, 264
- Dualidad onda partícula, 78

- Ecuación de onda, 5
- ecuaciones de Maxwell, 5, 13
- Efecto Auger, 154
- Efecto Doppler, 50
- Efecto fotoeléctrico, 57
- Efecto Zeeman
 - anómalo, 117, 137, 146
 - normal, 114, 116, 126
- Einstein, A., 267
 - Postulados de, 7
- Electrón, libre, 277
 - de valencia, 277
- Electrón voltio, 40
- emisión termoiónica, 297
- Energía
 - de afinidad electrónica, 230
 - de apareamiento, 176
 - de Coulomb, 171, 176
 - de dipolo magnético, 115
 - de enlace nuclear, 171, 175
 - de exceso neutrón-protón, 176
 - de superficie, 175
 - incertidumbre en la, 93
 - relativista, 40
 - rotacional, 235
 - vibracional, 235, 236
- Energía de disociación, 230, 231
- Energía de enlace, 175
- Energía de Fermi, 269, 275, 295
- Enlace metálico, 231
- Enlace, covalente, 230
 - iónico, 230
 - metálico, 231
 - van der Waals, 231
- Espacio absoluto, 7
- Espectro
 - de absorción, 242
 - del hidrógeno, 100
 - de rayos X, 152
 - rotacional, 236, 237, 238
 - vibracional, 236
- Estadística, cuántica, 269
 - de Fermi-Dirac, 269, 281
- Estado
 - cuántico, 130
 - fundamental, 102
 - molecular, 253
 - triple, 230
 - único, 230
 - vibracional, 278
- Estados atómicos, 135
- Estados atómicos excitados, 137
- Estructura fina, 126
 - constante de, 112
- Eter, 7
- Exceso de masa, 170
- Experimento de Davisson y Germer, 84, 87
- Experimento de, Fizeau, 37
 - Franck-Hertz, 163
 - Michelson-Morley 7, 9, 10, 11
 - Stern-Gerlach, 122
 - Zeeman, 114
- Extrañeza, 221

- Factor g de Landó, 145
- Fisión, 211
- Fluorescencia, 155
- Fonón, 278
- Fórmula semiempírica de la masa 175
- Fotofisión, 213
- Fotón, 53, 273
 - emisión de, 101
 - energía del, 53
 - momentum del, 53
- Función de distribución, 253
- Función zeta de Riemann, 270
- Fusión

- Gamma,
 - decaimiento, 187
 - función, 270
 - rayos, 186, 187
- gas ideal, clásico, 244
 - mecánico cuántico, 281
- Gas noble, 142, 149
- Gerlach, W. m., 122
- Germer, L. H., 87
- Goudsmit, S.A., 122

- Hall
 - coeficiente, 297
- Halógeno, 143, 149, 230
- Hertz, G., 163
- Hidrógeno
 - átomo de, 100
 - espectro del, 100
- Huecos, 289

- Impurezas, 290
- Incertidumbre
 - en el momentum angular y en el ángulo, 95
 - en la energía y en el tiempo, 93
 - en la posición y en el momentum, 93
- Indeterminación (ver Principio de incertidumbre)
- Interacción, débil, 219
 - electromagnética, 219
 - fuerte, 219
 - gravitacional, 219

- Intercambio de partículas, 228
- Interferómetro, 9
- Invariancia, 2, 4, 5, 13, 30, 31
- Ionización
 - energía de, 101
 - potencial de, 105
- Isóbaro, 170, 181
- Isómeros, 187
- Isótono, 170
- Isótopo, 170

- Laue, M. von, 83
- Ley
 - de Dulong-Petit, 263, 277, 279
 - de las atmósferas, 246
 - del desplazamiento de Wien, 272
 - del gas ideal, 244
 - de Stefan-Boltzmann, 272
- Ley de atenuación, 75
- Leyes de conservación
 - de la carga, 219
 - de la extrañeza, 222
 - de la masa-energía, 219
 - de la paridad, 222
 - del momentum angular, 220
 - del momentum lineal, 220
 - del número bariónico, 220
 - del número leptónico, 220
 - del spin, 220
 - del spin isotópico, 220
- Ley de decaimiento, 186
- Ley de Dulong-Petit, 263, 277
- Longitud, propia, 17
 - en reposo, 17
- Lorentz
 - transformaciones de las coordenadas, 13
 - transformaciones de la velocidad, 33

- Magnetón, de Bohr, 116
 - nuclear, 165
 - de capas, nuclear, 177
 - de gota de líquido, 175
 - de partícula independiente, 135
- Modelo vectorial, 126, 144
- Moléculas diatómicas, 235, 262
- Molecular
 - niveles de energía, 236
 - rotación, 235
 - vibración, 235
- Momentum angular, clásico, 114
 - electrónico, 101, 116
 - del spin, 122
 - intrínseco, 122
 - total, 126
- Momentum angular orbital, 116
- Momento cuadripolar, 166
- Momento cuadripolar eléctrico, 166, 167
- Momento de dipolo, eléctrico, 137, 232
 - magnético, 135
- Momentum, relativista, 39, 92
 - incertidumbre en el, 92-93
- Movilidad, 296
- Movimiento browniano, 248
- Movimiento Caja unidimensional, 91, 96, 130
- Morley, E., 7, 9, 10, 11

- Multiplicadores de Lagrange, 266, 286
- Masa, atómica, 171
 - nuclear, 171
 - relativista, 39
- Masa reducida, 102, 112
- Mediciones
 - de espacio-tiempo (relativista), 24
 - de longitud (relativista), 17
 - de posición, 92
 - de tiempo (relativista), 20
- Mesón, 215
- Metales alcalinos, 142, 149, 230
- Modelo, atómico de capas, 135

- Neutrino, 188, 219
- Neutrón, 165, 170, 201, 208
- Neutrón térmico, 213
- Newton, segunda ley de, 39
- Normalización, condición de, 252, 260, 276, 282
- Notación espectroscópica, 136, 177
- Nuclear
 - energía de enlace, 171
 - fisión, 211
 - fusión, 212
 - magnetón, 165
 - materia, 171
 - modelos, 175
 - modelos de capas, 177
 - momento magnético, 165
 - radio, 171
 - reacciones, 201
 - spin, 165
- Núcleo compuesto, 202, 204
- Núcleo padre, 186
- Nucleón, 165
- Núcleos de espejo, 180
- Núcleos hija, 186
- Número atómico, 170
- Número de Avogadro, 244
- Número bariónico, 218
- Número cuántico
 - magnético, 114
 - del momentum angular orbital, 116, 177
 - del momentum angular total, 127, 179
 - principal, 91, 101, 130
 - del spin, 123, 179
- Número leptónico, 220
- Números mágicos, 177, 184

- Ondas
 - de Broglie, 78
 - de materia, 92
 - de interpretación de probabilidad, 89
- Orbita, 135, 179
- Orbital, 179
- Oscilador armónico, 177

- Paradoja de los gemelos, 27
- Paridad, 222
- Partícula en una caja, 91, 95, 130
- Partículas elementales
 - antipartículas, 218
 - familias de, 218
 - interacción de, 219

- masa de las, 218
- spin de las, 218
- spin isotópico de las, 220
- tiempo de vida medio de las, 218
- Pauli, W., 188
 - principio de exclusión de, 130, 135
- Perrin, J., 246
- Picos de absorción de rayos X, 154
- Planck, M., 53, 271
 - constante de, 53
- Posición, incertidumbre en la, 93
- Positronio, 110
- Potencial de frenado, 57
- Potencial de Morse, 233
- Potencial, del oscilador armónico, 177
 - de Morse, 233
- Precesión de Larmor, 118
- Principio de: complementariedad, 93
 - correspondencia, 108
 - exclusión, 130, 135, 269
 - incertidumbre, 92
 - incertidumbre de Heisenberg, 92
- Producción de pares, 69
- Protón, 165, 170, 201

- Radiación
 - atómica, 101
 - del cuerpo negro, 271
- Radiación de frenado, 151
- Radiación del cuerpo negro, 269, 271
- Radio
 - de Bohr, 101
 - nuclear, 171
- Radioastronomía, 124
- Raíz cuadrada media de la velocidad, 244, 261
- Rango, 200
- Rayos X característicos (ver espectro de rayos X)
- Rayos X, 83, 84, 151, 189
 - difracción de los, 83
 - espectro de, 152
 - fluorescencia de los, 155
 - picos de absorción, 154
- Reacción endoenergética (endotérmica), 203, 205
- Reacción exoenergética (exotérmica), 203, 205
- Reacciones
 - D-D, 212
 - de núcleos compuestos, 212
 - de pérdida, 201
 - de recuperación, 201
 - directa, 202
 - D-T, 212
- Recorrido libre medio, 247, 248
- Reglas de selección, 137, 236
- Reines, F., 188
- Relación de Moseley, 152
- Relación entre masa-energía, 40
- Relación giromagnética, 123
- Relatividad, principio de la, 7
- Resistividad, 291
- Resonancia, 218, 222
- Roentgen, W., 151

- Rotación molecular, 235
- Rutherford, E., 201
- Rydberg, fórmula de, 100

- Sección transversal, 203, 204, 205, 208
- Semiconductor extrínseco, 290
- Semiconductor intrínseco, 290
- Semiconductores, 289
 - estimulador, 290
 - extrínsecos, 290
 - intrínsecos, 290
 - tipo *n*, 291
 - tipo *p*, 291
- Serie de Balmer, 100, 106, 112
- Serie de Brackett, 100
- Serie de Lyman, 100, 104, 112
- Serie de Pschen, 100, 112
- Simultaneidad, 9, 13, 15
- Sincronización, 8
- Sincronización de relojes, 8
- Sistema de centro de masa, 102, 202, 205, 210
- Sistema, de centro de masa, 202
 - de laboratorio, 202
- Spin electrónico, 122, 126
- Spin isotópico, 220
- Stefan-Boltzmann, ley de, 272, 286
- Ster-Gerlach, experimento de, 122
- Stirling, fórmula de, 265, 286
- Subcapa, 135

- Tabla periódica, 135
- Teoría cinética, 244
- Teoría de bandas, 289
- Teorema de la equipartición, 263
- Teoría de los electrones libres, 273
- Teoría de los electrones libres de los metales, 273
- Teoría electrónica de los metales, 273
- Teoría especial de la relatividad, 1
- Thomson, G. P., 84
- Tiempo
 - incertidumbre en el, 93
 - propio, 20
- Tiempo de vida medio, 186, 218
- Tiempo propio, 20
- Tiempos de vida promedio, 186, 192
- Transformación
 - de la aceleración según Galileo, 2
 - de la masa-energía, 40
 - de las coordenadas según Lorentz, 12
 - de la velocidad según Galileo, 1
 - de la velocidad según Lorentz, 33
 - del momentum-energía, 40
- Transformación de la velocidad, 33
- Transformación de las coordenadas según Galileo, 1
 - Lorentz, 12
- Transición de elementos, 143, 149
- Transición del dipolo eléctrico, 117
- Transiciones del dipolo eléctrico, 117, 137, 232
- Tritón, 201
- Túnel, 207

Uhlenbeck, G.E., 122
Unidad de masa atómica, 165
Umbral
 energía, 206
 longitud de onda, 57, 70, 73

Valor Q, 203
Variables conjugadas, 93
Variación del momentum, 92
Vector de propagación, 70
Velocidad
 de la luz, 7, 8, 12, 14

 más probable, 261
 promedio, 235
 raíz cuadrada media, 244, 261
Vibración molecular, 235
Vida media, 186

Wiszacker, C. V., 175
Wien, ley de desplazamiento de, 272

Yukawa, H., 219