

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ MOHAMED EL BACHIR EL IBRAHIMI
Faculté des Mathématiques & Informatique



Séries d'exercices avec solutions pour le Chapitre 01

Par :
Dr. BERKANI Amirouche
(*Maître de Conférences -A-*)

Pour :
Troisième année Licence de Mathématiques

Avril 2021

Chapitre 1

Équations elliptiques

Exercice 1.1. Montrer que la fonction u définie par $u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x + x^2 + y^2}$ est une fonction harmonique sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 1.2. Considérons le problème de conduction thermique suivant dans un intervalle fini :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (1.3)$$

où f est une condition initiale donnée et k est une constante positive. Afin de rendre (1.2) consistant avec (1.3), on suppose la condition de compatibilité : $f(0) = f(L) = 0$. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution du problème (1.1)–(1.3).

Solution: On commence par rechercher des solutions de la PDE (1.1) qui satisfont aux conditions aux limites (1.2) et ont la forme spéciale

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (1.4)$$

où X et T sont des fonctions des variables x et t , respectivement. A cette étape, on ne prend pas en compte la condition initiale (1.3). On n'est évidemment pas intéressé par la solution zéro $u(x, t) = 0$. Nous cherchons donc des fonctions X et T qui ne s'annulent pas identiquement.

Différencions la solution séparée (1.4) et remplaçons dans l'EDP, on obtient

$$XT_t = kX_{xx}T$$

On peut récrire

$$\frac{T_t}{T} = k \frac{X_{xx}}{X}. \quad (1.5)$$

Puisque x et t sont des variables indépendantes, différencions (1.5) par rapport à t implique qu'il existe une constante dénotée par λ (appelée constante de séparation) telle que

$$\frac{T_t}{T} = k \frac{X_{xx}}{X} = -\lambda. \quad (1.6)$$

Comme on cherche des solutions ne s'annule pas identiquement, alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T(t) \neq 0$. Conséquemment on obtient

$$\begin{cases} u(0, t_0) = X(0)T(t_0) = 0 \\ u(L, t_0) = X(L)T(t_0) = 0 \end{cases} \implies X(0) = X(L) = 0$$

L'équation (1.6) conduit au système d'EDO's suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda X = 0, & 0 < x < L, \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

et

$$\frac{dT}{dt} + \lambda T = 0, \quad t > 0, \quad (1.8)$$

où λ est une constante. On commence d'abord à résoudre le système (1.7). Une solution non triviale de (1.7) est appelée fonction propre avec la valeur propre λ . On distingue 3 cas :

Cas 1 : $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X(x) = \alpha e^{-\mu x} + \beta e^{\mu x}$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$ ont comme conséquence que $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha e^{-\mu L} + \beta e^{\mu L} = 0$. Ce système d'équations n'a qu'une seule solution, la solution triviale $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. En effet, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu L} & e^{\mu L} \end{vmatrix} = e^{\mu L} - e^{-\mu L} = \frac{1}{e^{\mu L}} (e^{2\mu L} - 1) \neq 0$$

Sinon $e^{2\mu L} - 1 = 0$ implique que $2\mu L = 0$. Mais ceci est absurde parce que μ et L sont différents de 0. De ceci on peut conclure que

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu L} & e^{\mu L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu L} & e^{\mu L} \end{pmatrix}$ est inversible. Ainsi dans le cas où $\lambda = -\mu^2 < 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x; t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda < 0$

Cas 2 : Si $\lambda = 0$, $X(x) = \alpha + \beta x$, où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$ ont comme conséquence que $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha + \beta L = 0$. Comme $L \neq 0$, alors ce système n'admet que la solution triviale $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Ainsi dans le cas où $\lambda = 0$, alors $X \equiv 0$ et $u(x; t) = 0$ pour tout $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$. On doit donc exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 3 : Si $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $X(x) = \alpha \cos(\mu x) + \beta \sin(\mu x)$ où α, β sont des nombres réels arbitraires. Mais les conditions $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$ ont comme conséquence que $\alpha = 0$ et $\beta \sin(\mu L) = 0$. Comme on ne veut pas obtenir la solution triviale

$X \equiv 0$, alors on peut supposer que $\beta \neq 0$. Comme $\beta \sin(\mu L) = 0$, alors $\sin(\mu L) = 0$. Conséquemment $\mu L = n\pi$ et $\lambda = (n\pi/L)^2$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Les valeurs

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2$$

sont appelées les valeurs propres et les fonctions

$$X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L)$$

sont les fonctions caractéristiques du problème (1.7). Parce que $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer

$$\lambda_n = (n\pi/L)^2, \quad X_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x/L), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On passe maintenant à l'équation (1.8) dont la solution générale est donnée par

$$T(t) = \gamma_n e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

On a ainsi obtenu la suite suivante de solutions séparées

$$u_n(x, t) = \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le principe de superposition implique que toute combinaison linéaire

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

de solutions séparées est également une solution de l'équation de la chaleur qui satisfait les conditions aux limites de Dirichlet.

Considérons maintenant la condition initiale. Supposons qu'il ait la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(n\pi x/L)$$

c'est-à-dire qu'il s'agit d'une combinaison linéaire des fonctions propres. Ensuite, une solution au problème de chaleur (1.1) - (1.3) est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

L'idée brillante de Fourier était qu'il était possible de représenter une fonction arbitraire f satisfaisant les conditions aux limites (1.2) comme une combinaison linéaire infinie unique des fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$. En d'autres termes, il est possible de trouver des constantes δ_n telles que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L)$$

Une telle série est appelée une série (ou extension) de Fourier (généralisée) de la fonction f par rapport aux fonctions propres du problème, et δ_n , $n = 1, 2, \dots$ sont appelés les coefficients de Fourier (généralisés) de la série. Dans ce cas, le principe de superposition généralisée implique que l'expression formelle

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

est un candidat naturel pour une solution généralisée du problème (1.1) - (1.3). On explique maintenant comment représenter une fonction arbitraire f sous la forme d'une série de Fourier. En d'autres termes, comment calculer les coefficients δ_n . Remarquons

$$\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \int_0^L \sin(m\pi x/L) \sin(n\pi x/L) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L/2, & m = n \end{cases}$$

Par conséquent, les coefficients de Fourier sont donnés par

$$\delta_n = \frac{\int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx}{\int_0^L \sin^2(m\pi x/L) ds} = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx.$$

On obtient la formule explicite de la solution formelle, qui est donnée par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin(n\pi x/L) e^{-k(n\pi/L)^2 t}$$

où

$$\delta_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin(m\pi x/L) f(x) dx.$$

□

Exercice 1.3. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer u solution de l'équation de Laplace suivante :

$$\Delta u(x, y, z) = u_{xx}(x, y, z) + u_{yy}(x, y, z) + u_{zz}(x, y, z) = 0, \quad \text{dans } D \quad (1.9)$$

où $D = \{0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi\}$ avec les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(0, y, z) = 0, & u(\pi, y, z) = 0, & u(x, 0, z) = 0 \\ u(x, \pi, z) = 0, & u(x, y, \pi) = 0, & u(x, y, 0) = g(x, y). \end{cases} \quad (1.10)$$

et g est une fonction donnée.

Solution: D'après la méthode de séparation des variables, on suppose que toute solution non-triviale est de la forme :

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (1.11)$$

qui vérifie les trois conditions homogènes dans (1.10). Nous avons laissé tomber la condition non-homogène $u(\pi, y, z) = g(y, z)$.

En substituant cette solution dans l'É.D.P. (1.9) et en séparant les variables, nous obtenons

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = 0 \quad (1.12)$$

où X'' est la dérivée seconde de X par rapport à x , Y'' est la dérivée seconde de Y par rapport à y et Z'' est la dérivée seconde de Z par rapport à z . La division de l'équation de l'éq.(1.12) sur $X(x)Y(y)Z(z)$, nous donne

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)}. \quad (1.13)$$

Dans (1.13), le terme de gauche est indépendant de z , alors que le terme de droite est une fonction de z seulement. Par conséquent, ces deux expressions doivent être constantes et nous pouvons écrire

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Par suite, d'une manière analogue, on aura

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda_1 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

Aussi, d'après les conditions aux bords (1.10), on a la solution u vérifie les trois conditions homogènes, alors, nous obtenons :

$$\begin{cases} u(0, y, z) = 0 \implies X(0)Y(y)Z(z) = 0, & x \in [0, \pi] \implies X(0) = 0, \\ u(\pi, y, z) = 0 \implies X(\pi)Y(y)Z(z) = 0, & x \in [0, \pi] \implies Z(\pi) = 0, \\ u(x, 0, z) = 0 \implies X(0)Y(0)Z(z) = 0, & y \in [0, \pi] \implies Y(0) = 0, \\ u(x, \pi, z) = 0 \implies X(x)Y(\pi)Z(z) = 0, & y \in [0, \pi] \implies Y(\pi) = 0, \\ u(x, y, \pi) = 0 \implies X(x)Y(y)Z(\pi) = 0, & z \in [0, \pi] \implies Z(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

En résumé, d'après (1.14), (1.15) et (1.16) donc il nous font étudier les problèmes suivants :

$$(p_1) \begin{cases} X''(x) - \lambda_2 X(x) = 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = 0, & X(\pi) = 0, \end{cases}, \quad (p_2) \begin{cases} Y''(y) - (\lambda_1 - \lambda_2)Y(y) = 0, & 0 < y < \pi, \\ Y(0) = 0, & Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

et

$$(p_3) \begin{cases} Z''(z) + \lambda_1 Z(z) = 0, & 0 < z < \pi, \\ Z(\pi) = 0. \end{cases}$$

Résolution du problème (p_1)

On distingue trois cas possibles pour λ_2 .

Cas 1 : si $\lambda_2 = k^2 > 0$, avec k est un nombre réel non nul. Alors, le problème (p_1) admet une solution générale de la forme :

$$X(x) = A_1 e^{-kx} + A_2 e^{kx}$$

où A_1 et A_2 sont des constantes positives. D'après les conditions $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$, ont comme conséquent

$$(S_1) \begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ A_1 e^{-k\pi} + A_2 e^{k\pi} = 0. \end{cases}$$

Le système (S_1) n'a que une seule solution, c'est la solution triviale $(A_1, A_2) = (0, 0)$. En effet : le déterminant du système (S_1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-k\pi} & e^{k\pi} \end{vmatrix} = e^{k\pi} - e^{-k\pi} = \frac{e^{2k\pi} - 1}{e^{k\pi}} \neq 0.$$

Sinon

$$e^{2k\pi} - 1 = 0 \implies e^{2k\pi} = 1 \implies 2k\pi = 0.$$

Mais ceci est absurde parce que μ est différent de zéro. Donc, nous pouvons conclure que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-k\pi} & e^{k\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-k\pi} & e^{k\pi} \end{pmatrix}$ est inversible. Ainsi que dans le cas où $\lambda_2 = k^2 > 0$, alors $X(x) \equiv 0$ et $u(x, y, z) \equiv 0$ pour tout $0 < x < \pi$. On doit donc exclure le cas $\lambda_2 > 0$.

Cas 2 : si $\lambda_2 = 0$ on a $X(x) = A_1x + A_2$ où A_1 et A_2 sont des nombres réels arbitraires. Mais, d'après les conditions $X(\pi) = 0$ et $X(0) = 0$, on a

$$\begin{cases} A_2 = 0 \\ A_1\pi + A_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} A_2 = 0 \\ A_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi que dans le cas où λ_2 , alors $X(x) \equiv 0$ et $u(x, y, z) \equiv 0$ pour tout $0 < x < \pi$. On doit donc aussi exclure le cas $\lambda_2 = 0$.

Cas 3 : si $\lambda_2 = -k^2 < 0$, la solutions générale du problème (p_1) est de la forme

$$X(x) = A_1 \sin(kx) + A_2 \cos(kx)$$

où A_1 et A_2 sont des nombres réels arbitraires. D'après la condition $X(0) = 0$ on obtient $A_2 = 0$. Donc une solution non-triviale elle s'écrit sous la forme $X(x) = A_1 \sin(kx)$ avec $A_1 \neq 0$.

Aussi, comme $X(\pi) = 0$, alors on a $\sin(k\pi) = 0$ donc $k\pi = n\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda_2 = -n^2$. Les valeurs $\lambda_2 = -n^2$ sont appelées les valeurs propres et les fonctions $X(x) = A_1^n \sin(nx)$ sont les fonctions caractéristiques du problème (p_1) avec A_1^n sont des constantes. Comme $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer les valeurs propres λ_2 et les fonctions caractéristiques X pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Résolution du problème (p_2)

Soit $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, alors, on distingue toujours trois cas pour λ .

Cas 1 : si $\lambda = \mu^2 > 0$, avec μ est un nombre réel non nul. Alors, le problème (p_2) admet une solution générale de la forme :

$$Y(x) = B_1 e^{-\mu y} + B_2 e^{\mu y}$$

où B_1 et B_2 sont des constantes positives. D'après les conditions $Y(0) = 0$, $Y(\pi) = 0$, ont comme conséquent

$$(S_2) \begin{cases} B_1 + B_2 = 0 \\ B_1 e^{-\mu\pi} + B_2 e^{\mu\pi} = 0. \end{cases}$$

Le système (S_2) n'a que une seule solution, c'est la solution triviale $(B_1, B_2) = (0, 0)$. En effet : le déterminant du système (S_2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu\pi} & e^{\mu\pi} \end{vmatrix} = e^{\mu\pi} - e^{-\mu\pi} = \frac{e^{2\mu\pi} - 1}{e^{\mu\pi}} \neq 0.$$

Sinon

$$e^{2\mu\pi} - 1 = 0 \implies e^{2\mu\pi} = 1 \implies 2\pi\mu = 0.$$

Mais ceci est absurde parce que μ est différent de zéro. Donc, nous pouvons conclure que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu\pi} & e^{\mu\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

car la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mu\pi} & e^{\mu\pi} \end{pmatrix}$ est inversible. Ainsi que dans le cas où $\lambda = \mu^2 > 0$, alors $Y(y) \equiv 0$ et $u(x, y, z) \equiv 0$ pour tout $0 < y < \pi$. On doit donc exclure le cas $\lambda > 0$.

Cas 2 : si $\lambda = 0$ on a $Y(y) = B_1 y + B_2$ où B_1 et B_2 sont des nombres réels arbitraires. Mais, d'après les conditions $Y(\pi) = 0$ et $Y(0) = 0$, on a

$$\begin{cases} B_2 = 0 \\ B_1\pi + B_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B_2 = 0 \\ B_1 = 0 \end{cases}$$

Ainsi que dans le cas où λ , alors $Y(y) \equiv 0$ et $u(x, y, z) \equiv 0$ pour tout $0 < y < \pi$. On doit donc aussi exclure le cas $\lambda = 0$.

Cas 3 : si $\lambda_2 = -k^2 < 0$, la solutions générale du problème (p_1) est de la forme

$$Y(y) = B_1 \sin(\mu y) + B_2 \cos(\mu y)$$

où B_1 et B_2 sont des nombres réels arbitraires. D'après la condition $X(0) = 0$ on obtient B_2 . Donc une solution non-triviale elle s'écrit sous la forme $Y(y) = B_1 \sin(\mu y)$ avec $B_1 \neq 0$.

Aussi, comme $Y(\pi) = 0$, alors on a $\sin(\mu\pi) = 0$ donc $\mu\pi = m\pi$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $\lambda = -m^2$. Les valeurs $\lambda = -m^2$ sont appelées les valeurs propres et les fonctions $Y(y) = B_1^n \sin(my)$ sont les fonctions caractéristiques du problème (p_2) avec B_1^n sont des constantes. Comme $\sin(-y) = -\sin(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, il suffit donc de considérer les valeurs propres λ et les fonctions caractéristiques Y pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Si maintenant nous considérons le problème (p_3) pour les valeurs propres $\lambda_1 - \lambda_2 = -m^2$ avec $\lambda_2 = -n^2$, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, alors on obtient dans ce cas là $\lambda_1 = -m^2 - n^2$ et la solution générale du problème (p_3) est de la forme

$$Z(z) = C_1 e^{z\sqrt{n^2+m^2}} + C_2 e^{-z\sqrt{n^2+m^2}}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Mais nous avons aussi

$$Z(\pi) = 0 \implies C_1 e^{\pi\sqrt{n^2+m^2}} + C_2 e^{-\pi\sqrt{n^2+m^2}} = 0 \implies C_2 = -C_1 e^{2\pi\sqrt{n^2+m^2}}$$

En substituant ceci dans la solution Z , nous obtenons

$$\begin{aligned} Z(z) &= C_1 e^{z\sqrt{n^2+m^2}} - C_1 e^{2\pi\sqrt{n^2+m^2}} e^{-z\sqrt{n^2+m^2}} \\ &= C_1 e^{\pi\sqrt{n^2+m^2}} \left[e^{(z-\pi)\sqrt{n^2+m^2}} - e^{-(z-\pi)\sqrt{n^2+m^2}} \right] \\ &= 2C_1 e^{\pi\sqrt{n^2+m^2}} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}(z-\pi)\right) \\ &= C_1^{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}(z-\pi)\right), \quad \text{avec } C_1^{nm} = 2C_1 e^{\pi\sqrt{n^2+m^2}} \end{aligned}$$

car

$$\sinh(\theta) = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}, \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

Finalement, En combinant tout ceci, nous obtenons une solution de la forme

$$u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z) = C_{nm} \sin(nx) \sin(my) \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}(z-\pi)\right), \quad (1.17)$$

est une solution générale de l'É. D. P. (1.9) pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ avec $C_{nm} = A_1^n B_1^m C_1^{nm}$ sont des constantes.

Ce problème est linéaire et homogène. Dans ce cas, le principe de superposition est valable et

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sin(nx) \sin(my) \sinh\left(\sqrt{n^2+m^2}(z-\pi)\right) \quad (1.18)$$

est aussi une solution du problème (1.9)–(1.10), où C_{nm} sont des constantes qui seront déterminer.

Posons $z = 0$ dans (1.18), en utilisant la condition $u(x, y, 0) = g(x, y)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(\pi)\right) \sin(nx) \sin(my) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(\pi)\right) \right] \sin(nx) \sin(my) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \sin(nx) \sin(my), \quad x \in [0, \pi], \quad y \in [0, \pi] \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{nm} = C_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(\pi)\right), \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (1.19)$$

D'où $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \sin(nx) \sin(my)$, $\forall (x, y) \in [0, \pi]^2$ est la série de Fourier impaire doubles de la fonction g sur $[0, \pi]^2$, donc

$$C_{nm} \sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(\pi)\right) = \alpha_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x, y) \sin(nx) \sin(my) dx dy, \quad n, m \in \mathbb{N}^*$$

Enfin, on a

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \frac{\sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(z - \pi)\right)}{\sinh\left(\sqrt{n^2 + m^2}(\pi)\right)} \sin(nx) \sin(my) \quad (1.20)$$

est une solution du l'É.D.P. (1.9) avec les conditions aux limites (1.10). \square

Exercice 1.4. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq a^2\}$ un disque de rayon a centré à l'origine. On note par $C : x^2 + y^2 = a^2$ le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon a . En utilisant les coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$ et $0 < r \leq a$, montrer que l'équation de Laplace sur le disque D c'est-à-dire : $\begin{cases} \Delta u(x, y) = u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, & \text{dans } D, \\ u(x, y) = f(x, y), & \text{sur } C = \partial D \end{cases}$ est équivalente à l'équation suivante :

$$\Delta w(r, \theta) = w_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} w_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}(r, \theta) = 0,$$

où $w(r, \theta) = u(x(r, \theta), y(r, \theta))$ avec la condition au bord $w(a, \theta) = h(\theta) = f(x(r, \theta), y(r, \theta))$.

Solution: Soit u une fonction deux fois différentiables, on pose :

$$w(r, \theta) = u(r \cos \theta, r \sin \theta). \quad (1.21)$$

Étape 1 : on calcule les dérivées partielles d'ordre un de la fonction u , alors, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \quad = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta), \\ \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, \theta) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ \quad = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta). \end{cases} \quad (1.22)$$

Le système (1.22) est un système d'équations de deux inconnues $\frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ et $\frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$. Aussi, on peut résoudre le système (1.22) car son déterminant est égal à $r^2 \neq 0$, donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, \theta) = w_1(r, \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, \theta) = w_2(r, \theta). \end{cases} \quad (1.23)$$

Étape 2 : pour écrire le Laplacien en coordonnées polaires, nous aurons besoin de calculer les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction u , alors, pour ce là, nous définissons les fonctions u_1 et u_2 par :

$$u_1(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \quad u_2(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

On peut facilement voir que d'après (1.21), que

$$\begin{aligned} u_1(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = w_1(r, \theta) \\ u_2(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = w_2(r, \theta). \end{aligned}$$

D'après (1.21), donc en appliquant la première relation et la deuxième de (1.23) au couple (u_1, w_1) et (u_2, w_2) respectivement, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (r \cos \theta, r \sin \theta) = \cos \theta \frac{\partial w_1}{\partial r}(r, \theta) - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w_1}{\partial \theta}(r, \theta), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) (r \cos \theta, r \sin \theta) = \sin \theta \frac{\partial w_2}{\partial r}(r, \theta) + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w_2}{\partial \theta}(r, \theta). \end{cases} \quad (1.24)$$

Notons qu'à partir de (1.23), nous avons

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}, \\ \frac{\partial w_1}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \end{cases} \quad (1.25)$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial w_2}{\partial r} = \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}, \\ \frac{\partial w_2}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}. \end{cases} \quad (1.26)$$

Étape 3 : l'injection de (1.25) et (1.26) dans (1.24), nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r, \theta) - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r, \theta) \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) + \frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta}(r, \theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}(r, \theta) + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}(r, \theta) + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}(r, \theta) \\ &+ \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial r}(r, \theta) - \frac{2 \sin^2 \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2}(r, \theta). \end{aligned}$$

Finalement, le problème (P') découle en tenant compte de ces deux égalités. \square

Exercice 1.5. Résoudre le problème suivant :

$$w_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r} w_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2} w_{\theta\theta}(r, \theta) = 0, \quad \text{pour } 0 < r < 1 \quad (1.27)$$

avec

$$w(1, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \theta < \pi \\ 0, & \pi < \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (1.28)$$

En utilisant la formule d'intégrale de Poisson, déterminer $w(0, \theta)$.

Solution: La solution du problème (1.27)–(1.28) est donnée par (voir le cours Lemme 1.1.) :

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos(n\theta) + \beta_n \sin(n\theta)) \quad (1.29)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta, & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) d\theta, & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Donc on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta = \frac{1}{2}$$

et

$$\begin{cases} \alpha_n = \frac{-1}{n\pi} \sin(n\theta) \Big|_0^\pi, & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \beta_n = \frac{1}{n\pi} \cos(n\theta) \Big|_0^\pi, & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_n = 0, & (n = 0, 1, 2, \dots), \\ \beta_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n\pi}, & (n = 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Finalement, on trouve

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n\pi} r^n \sin(n\theta).$$

D'après la la formule d'intégrale de Poisson, on a : $r = 0$

$$w(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\Phi) d\Phi = \frac{1}{2}.$$

\square