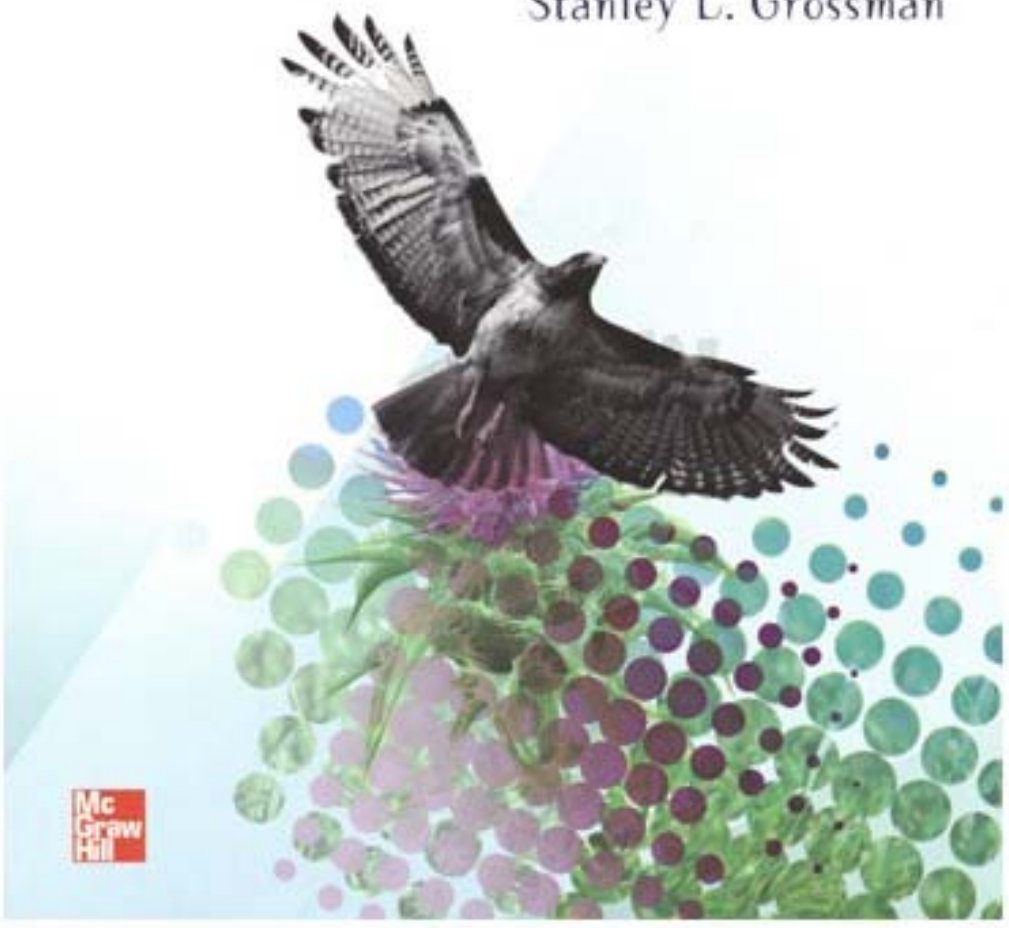
Matemáticas 4

Álgebra lineal

Stanley L. Grossman



Mc Graw Hill

Unidad

1

NÚMEROS COMPLEJOS

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Manejar los números complejos y las diferentes formas de representarlos, así como las operaciones entre ellos para tener una base de conocimiento a utilizar en ecuaciones diferenciales y en diferentes aplicaciones de ingeniería.

Considere el problema de encontrar las raíces de los polinomios

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{1}$$

Para encontrar las raíces, se utiliza la fórmula cuadrática y se obtiene

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \tag{2}$$

Si $b^2 - 4c > 0$, existen dos raíces reales. Si $b^2 - 4c = 0$, se obtiene una sola raíz (de multiplicidad 2) $\lambda = -b/2$. Para manejar el caso $b^2 - 4c < 0$, se introduce la **unidad imaginaria**.[†]

[†] El término *imaginario* no debe ser una preocupación. Es sólo un nombre. El matemático Alfred North Whitehead, en el capítulo sobre números imaginarios de su libro *Introduction to Mathematics*, escribió:

En este punto, puede ser útil observar que cierto tipo de intelecto se preocupa siempre y preocupa a otros sobre la aplicabilidad de los términos técnicos. ¿Es adecuado denominar números a los números inconmensurables? ¿Son realmente números los números positivos y negativos? ¿Son imaginarios los números imaginarios, y son números? Éstos son ejemplos de preguntas estériles. No puede entenderse con suficiente claridad que, en la ciencia, los términos técnicos son nombres asignados de manera arbitraria, como los nombres cristianos a los niños. No puede ponerse en duda si los nombres están bien o mal. Pueden ser o no prácticos o sensibles; en ocasiones puede ser sencillo recordarlos, o ser tales que sugieran ideas relevantes o importantes. Pero el principio esencial fue enunciado con mucha claridad en *Alicia en el país de las maravillas* por Humpty Dumpty, cuando le dijo a propósito de su uso de las palabras, "les pago más y las hago tener el significado que yo quiero". Así que no nos preocuparemos por si los números imaginarios son imaginarios o son números, tomaremos la frase como el nombre arbitrario de cierta idea matemática, que intentaremos ahora aclarar.

$$i = \sqrt{-1} \tag{3}$$

de manera que $i^2 = -1$. Entonces para $b^2 - 4c < 0$

$$\sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{(4c - b^2)(-1)} = \sqrt{4c - b^2}\, i$$

y las dos raíces de (1) están dadas por

$$\lambda_1 = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -\frac{b}{2} - \frac{\sqrt{4c - b^2}}{2} i$$

EJEMPLO 1 Encuentre las raíces de la ecuación cuadrática $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$.

Solución Se tiene $b = 2$, $c = 5$ y $b^2 - 4c = -16$. Entonces $\sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{-16} = \sqrt{16}\sqrt{-1} = 4i$ y las raíces son

$$\lambda_1 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = -1 - 2i$$

DEFINICIÓN 1 Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$z = \alpha + i\beta \tag{4}$$

donde α y β son números reales, α se denomina la **parte real** de z y se denota por Re z. β se denomina la **parte imaginaria** de z y se denota por Im z. En ocasiones la representación (4) recibe el nombre de **forma cartesiana o rectangular** del número complejo z.

Observación. Si $\beta = 0$ en la ecuación (4), entonces $z = \alpha$ es un número real. En este contexto se puede ver el conjunto de números reales como un subconjunto del conjunto de números complejos.

EJEMPLO 2 En el ejemplo 1, Re $\lambda_1 = -1$ e Im $\lambda_1 = 2$.

Los números complejos se pueden sumar y multiplicar usando las reglas normales de álgebra.

EJEMPLO 3 Sean $z = 2 + 3i$ y $w = 5 - 4i$. Calcule **i)** $z + w$, **ii)** $3w - 5z$ y **iii)** zw.

Solución

i) $z + w = (2 + 3i) + (5 - 4i) = (2 + 5) + (3 - 4)i = 7 - i$.

ii) $3w = 3(5 - 4i) = 15 - 12i$; $5z = 10 + 15i$, y $3w - 5z = (15 - 12i) - (10 + 15i) = (15 - 10) + i(-12 - 15) = 15 - 27i$

iii) $zw = (2 + 3i)(5 - 4i) = (2)(5) + 2(-4i) + (3i)(5) + (3i)(-4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 10 + 7i + 12 = 22 + 7i$. Aquí se usó el hecho de que $i^2 = -1$.

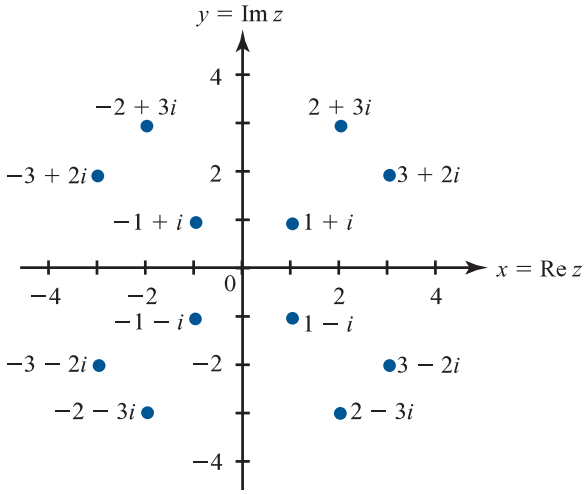


Figura 1.1
Doce puntos en el plano complejo.

PLANO COMPLEJO

Es posible graficar un número complejo z en el plano xy graficando Re z sobre el eje x e Im z sobre el eje y. Entonces se puede pensar que cada número complejo es un punto en el plano xy. Con esta representación el plano xy se denomina **plano complejo o de Argand**. En la figura 1.1 se graficaron algunos puntos representativos.

CONJUGADO

Si $z = \alpha + i\beta$, entonces se define el **conjugado** de z, denotado por $\overline{z}$, como

$$\overline{z} = \alpha - i\beta \tag{5}$$

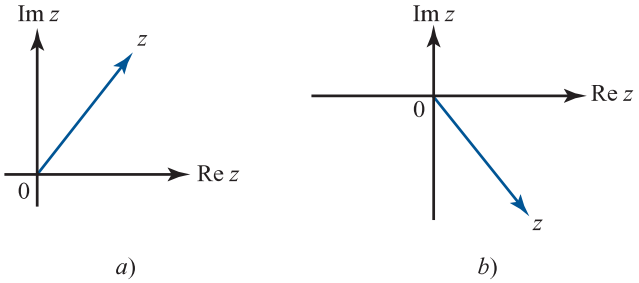
La figura 1.2 presenta un valor representativo de z y $\overline{z}$.

EJEMPLO 4

Calcule el conjugado de **i)** $1 + i$, **ii)** $3 - 4i$, **iii)** $-7 + 5i$ y **iv)** -3.

Solución

i) $\overline{1 + i} = 1 - i$; **ii)** $\overline{3 - 4i} = 3 + 4i$; **iii)** $\overline{-7 + 5i} = -7 - 5i$; **iv)** $\overline{-3} = -3$.



a) *b)*

Figura 1.2
$\overline{z}$ se obtiene reflejando z respecto al eje x.

No es difícil demostrar (vea el problema 46 de esta unidad) que

$$\overline{z} = z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es real} \tag{6}$$

NÚMERO IMAGINARIO

Si $z = \beta i$ con β real, entonces se dice que z es **imaginario**. Se puede entonces demostrar (vea el problema 47) que

$$\overline{z} = -z \quad \text{si y sólo si } z \text{ es imaginario} \tag{7}$$

Sea $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ un polinomio con coeficientes reales. Entonces se puede demostrar (vea el problema 41) que las raíces complejas de la ecuación $p_n(x) = 0$ ocurren en pares conjugados complejos. Esto es, si z es una raíz de $p_n(x) = 0$, entonces también lo es $\overline{z}$. Este hecho se ilustró en el ejemplo 1 para el caso de $n = 2$.

MAGNITUD

Para $z = \alpha + i\beta$ se define la **magnitud**[†] de z, denotada por $|z|$, como

$$\text{Magnitud de } z = |z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tag{8}$$

ARGUMENTO

y el **argumento** de z, denotado por arg z, se define como el ángulo θ entre la recta $0z$ y el lado positivo del eje x. Como convención se toma

$$-\pi < \arg z \leq \pi$$

En la figura 1.3 se puede ver que $r = |z|$ es la distancia de z al origen. Si $\alpha > 0$, entonces

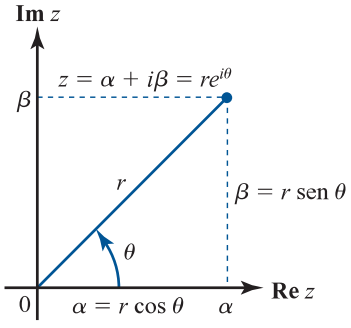


Figura 1.3
Si z = α + iβ, entonces α = r cos θ y β = r sen θ.

[†] La magnitud de un número complejo con frecuencia recibe el nombre de **módulo**.

donde se observa la convención de que $\tan^{-1} x$ toma valores en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si $\alpha = 0$ y $\beta > 0$, entonces $\theta = \arg z = \frac{\pi}{2}$ Si $\alpha = 0$ y $\beta < 0$, entonces $\theta = \arg z = -\frac{\pi}{2}$ Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$, entonces θ se encuentra en el segundo cuadrante y está dado por

$$\theta = \arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|$$

Por último, si $\alpha < 0$ y $\beta < 0$ entonces θ está en el tercer cuadrante y

$$\theta = \arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}$$

En suma, se tiene

Argumento de z

Sea $z = \alpha + \beta i$. Entonces

$$\arg z = \tan\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha > 0$$

$$\arg z = \frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\frac{\pi}{2} \text{ si } \alpha = 0 \text{ y } \beta < 0 \quad \textbf{(9)}$$

$$\arg z = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta > 0$$

$$\arg z = -\pi + \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha} \text{ si } \alpha < 0 \text{ y } \beta < 0 \quad \textbf{(10)}$$

arg 0 no está definido

De la figura 1.4 se ve que

$$|\bar{z}| = |z| \quad \textbf{(11)}$$

y

$$\arg \bar{z} = -\arg z \quad \textbf{(12)}$$

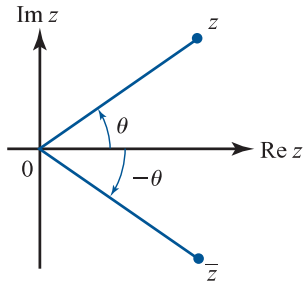


Figura 1.4
Arg $\bar{z} = -\arg z$.

Se pueden utilizar $|z|$ y $\arg z$ para describir lo que a menudo es una representación más conveniente para los números complejos.[†] De la figura 1.3 es evidente que si $z = \alpha + i\beta$, $r = |z|$ y $\theta = \arg z$, entonces

$$\alpha = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad \beta = r\,\text{sen}\,\theta \tag{13}$$

Se verá al final de este apéndice que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \tag{14}$$

Como $\cos(-\theta) = \cos\theta$ y $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\,\theta$, también se tiene

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta) = \cos\theta - i\,\text{sen}\,\theta \tag{14'}$$

La fórmula (14) se denomina **identidad de Euler**.[‡] Si se utiliza la identidad de Euler y la ecuación (13), se tiene

$$z = \alpha + i\beta = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

o sea,

$$z = re^{i\theta} \tag{15}$$

FORMA POLAR

La representación (15) se denomina **forma polar** del número complejo z.

[†] Al lector que haya estudiado coordenadas polares esta representación le parecerá familiar.
[‡] Recibe este nombre en honor del gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783).

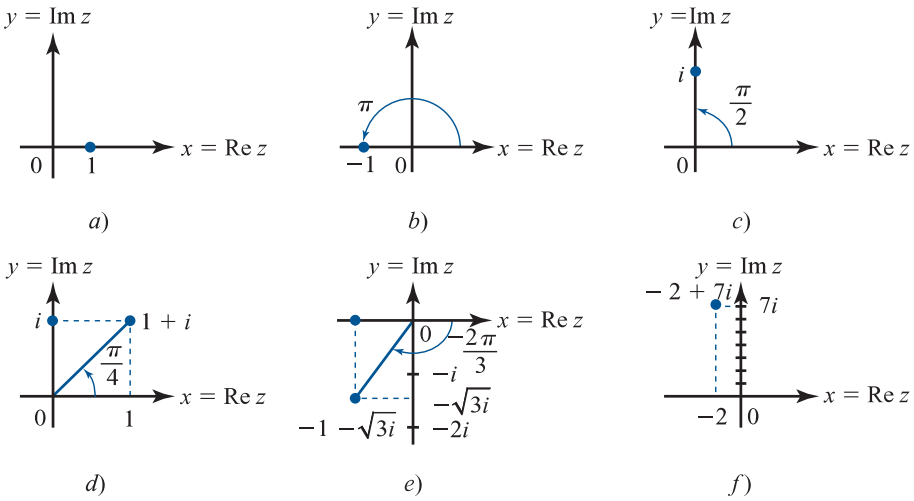


Figura 1.5
Seis puntos en el plano complejo

EJEMPLO 5

Determine las formas polares de los siguientes números complejos: **i)** 1, **ii)** -1, **iii)** i, **iv)** $1 + i$, **v)** $-1-\sqrt{3i}$ y **vi)** $-2 + 7i$.

Solución

Los seis puntos están graficados en la figura 1.5.

i) De la figura 1.5*a* es evidente que $\arg 1 = 0$. Como $\operatorname{Re} 1 = 1$, se ve que, en forma polar, $1 = 1e^{i0} = 1e^{0} = 1$.

ii) Como $\arg(-1) = \pi$ (figura 1.5*b*) y $|-1| = 1$, se tiene

$$-1 = 1e^{\pi i} = e^{i\pi}$$

iii) De la figura 1.5*c* se ve que $\arg i = \pi/2$. Puesto que $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, se sigue que

$$i = e^{i\pi/2}$$

iv) $\arg(1 + i) = \tan^{-1}(1/1) = (\pi/4)$ y $|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, de manera que

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

v) En este caso $\tan^{-1}(\beta/\alpha) = \tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$. Sin embargo, $\arg z$ se encuentra en el tercer cuadrante, de manera que $\theta = \pi/3 - \pi = -2\pi/3$. Además $\left|-1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$ por lo que

$$-1-\sqrt{3} = 2e^{-2\pi i/3}$$

vi) Para calcular esto se requiere una calculadora. Se encuentra que, en radianes,

$$\arg z = \tan^{-1}\left(-\tfrac{7}{2}\right) = \tan^{-1}(-3.5) \approx -1.2925$$

Pero $\tan^{-1} x$ está definida como un número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. De la figura 1.5*f*, θ está en el segundo cuadrante, por lo que se ve que $\arg z = \pi - \tan^{-1}(3.5) \approx 1.8491$. Después se ve que

$$|-2+7i| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2} = \sqrt{53}$$

Así,

$$-2 + 7i \approx \sqrt{53}\, e^{1.8491i}$$

EJEMPLO 6 Convierta los siguientes números complejos de la forma polar a la forma cartesiana **i)** $2e^{i\,\pi/3}$; **ii)** $4e^{3\pi i/2}$.

Solución

i) $e^{i\pi/3} = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3 = \frac{1}{2} + \left(\sqrt{3}/2\right)i$. Entonces $2e^{i\pi/3} = 1 + \sqrt{3}i$.

ii) $e^{3\pi i/2} = \cos 3\pi/2 + i \operatorname{sen} 3\pi/2 = 0 + i(-1) = -i$. Entonces $4e^{3\pi i/2} = -4i$.

Si $\theta = \arg z$, entonces por la ecuación (12), $\arg \bar{z} = -\theta$. Así, puesto que $|\bar{z}| = |z|$,

$$\text{Si } z = re^{i\theta}, \text{entonces } \bar{z} = re^{-i\theta} \tag{16}$$

Suponga que se escribe un número complejo en su forma polar $z = re^{i\theta}$. Entonces

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n(e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) \tag{17}$$

La fórmula (17) es útil para muchos cálculos. En particular, cuando $r = |z| = 1$, se obtiene la **fórmula de De Moivre**.[†]

fórmula de De Moivre

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \tag{18}$$

EJEMPLO 7 Calcule $(1 + i)^5$.

Solución

En el ejemplo 5*iv*) se mostró que $1 + i = \sqrt{2}e^{\pi i/4}$ Entonces

$$(1+i)^5 = \left(\sqrt{2}e^{\pi i/4}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^5 e^{5\pi i/4} = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -4 - 4i$$

[†] Abraham de Moivre (1667-1754) fue un matemático francés conocido por su trabajo sobre teoría de probabilidad, series infinitas y trigonometría. Su reconocimiento era tal que Newton con frecuencia decía a quienes le hacían preguntas sobre matemáticas, "vayan con De Moivre; él sabe esas cosas mejor que yo".

Esto se puede verificar mediante el cálculo directo. Si este cálculo directo no parece más difícil, intente calcular $(1 + i)^{20}$ directamente. Procediendo como antes, se obtiene

$$(1+i)^{20} = \left(\sqrt{2}\right)^{20} e^{20\pi i/4} = 2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi)$$

$$= 2^{10}(-1+0) = -1\,024$$

Demostración de la identidad de Euler

Se demostrará que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \tag{19}$$

usando las series de potencia. Si no está familiarizado con ellas, omita esta demostración. Se tiene

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \tag{20}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{21}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{22}$$

Aunque aquí no se demuestra, estas tres series convergen para todo número complejo x. Entonces

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots \tag{23}$$

Ahora bien, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Por lo tanto (23) se puede escribir como

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Con lo cual se completa la demostración.

Desarrollo de competencias. Unidad 1

De los problemas 1 al 7 realice las operaciones indicadas.

1. $(2 - 3i) + (7 - 4i)$

2. $3(4 + i) - 5(-3 + 6i)$

3. $5i(2 + 3i) + 4(6 - 2i)$

4. $(1 + i)(1 - i)$

5. $(2 - 3i)(4 + 7i)$

6. $(6 + 7i)(3 - 7i)$

7. $(-3 + 2i)(7 + 3i)$

De los problemas 8 al 20 convierta el número complejo a su forma polar.

8. $5i$ **9.** $-2i$ **10.** $5 + 5i$ **11.** $-2 - 2i$

12. $-1 - i$ **13.** $3 - 3i$ **14.** $2 + 2\sqrt{3}\,i$ **15.** $3\sqrt{3} + 3i$

16. $1 - \sqrt{3}\,i$ **17.** $\sqrt{3} - i$ **18.** $4\sqrt{3} - 4i$ **19.** $-1 + i\sqrt{3}$

20. $6\sqrt{3} - 6i$

De los problemas 21 al 33 convierta de la forma polar a la forma cartesiana.

21. $e^{3\pi i}$ **22.** $2e^{-7\pi i}$ **23.** $e^{2\pi i}$ **24.** $\frac{1}{2}e^{3\pi i/4}$

25. $\frac{1}{2}e^{-3\pi i/4}$ **26.** $5e^{\pi i/4}$ **27.** $6e^{\pi i/6}$ **28.** $4e^{5\pi i/6}$

29. $4e^{-5\pi i/6}$ **30.** $3e^{-3\pi i/4}$ **31.** $3e^{-2\pi i/3}$ **32.** $\sqrt{3}e^{23\pi i/4}$

33. $\sqrt{2}e^{-\pi i/4}$

En los problemas 34 al 45 calcule el conjugado del número dado.

34. $5 + 2i$ **35.** $3 - 4i$ **36.** $-3 + 8i$ **37.** $4 + 6i$

38. $-4 - 2i$ **39.** $-7i$ **40.** 16 **41.** $7e^{2\pi i/7}$

42. $2e^{\pi i/7}$ **43.** $7e^{-3\pi i/5}$ **44.** $3e^{-4\pi i/11}$ **45.** $e^{0.012i}$

46. Demuestre que $z = \alpha + i\beta$ es real si y sólo si $z = \overline{z}$ [*sugerencia:* si $z = \overline{z}$, demuestre que $\beta = 0$].

47. Demuestre que $z = \alpha + i\beta$ es imaginario si y sólo si $z = -\overline{z}$ [*sugerencia:* si $z = -\overline{z}$, demuestre que $\alpha = 0$].

48. Demuestre que para cualquier número complejo z, $z\overline{z} = |z|^2$.

49. Demuestre que la circunferencia de radio 1 centrado en el origen (la *circunferencia unitaria*) es el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen $|z| = 1$.

50. Para cualquier número complejo z_0 y cualquier número real positivo a. describa $\{z: |z - z_0| = a\}$.

51. Describa $\{z: |z - z_0| \leq a\}$, donde z_0 ya están definidos igual que en el problema 50.

52. Describa $\{z: a \leq |z - z_0| \leq A\}$, donde z_0 es cualquier número complejo y $a < A$.

***53.** Sea $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son números reales. Demuestre que si $p(z) = 0$, entonces $p(\overline{z}) = 0$. Esto es: *las raíces de polinomios con coeficientes reales ocurren en pares complejos conjugados* [*sugerencia:* $0 = \overline{0}$; calcule $\overline{p(z)}$].

54. Derive expresiones para $\cos 4\theta$ y $\operatorname{sen} 4\theta$ comparando la fórmula de De Moivre y la expansión de $(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^4$.

55. Demuestre la fórmula de De Moivre por inducción matemática [*sugerencia:* recuerde las identidades trigonométricas $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ y $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$].

Unidad

2

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Manejar las matrices, sus propiedades y operaciones a fin de expresar conceptos y problemas mediante ellas, en los sistemas de ecuaciones lineales; así como en otras áreas de las matemáticas y de la ingeniería, para una mejor comprensión y una solución más eficiente.

Utilizar el determinante y sus propiedades para probar la existencia y el cálculo de la inversa de una matriz.

2.1 INTRODUCCIÓN

Este libro trata del álgebra lineal. Al buscar la palabra "lineal" en el diccionario se encuentra, entre otras definiciones, la siguiente: lineal: (del lat. *linealis*). **1.** adj. Perteneciente o relativo a la línea.[†] Sin embargo, en matemáticas la palabra "lineal" tiene un significado mucho más amplio. Una gran parte de la teoría de álgebra lineal elemental es, de hecho, una generalización de las propiedades de la línea recta. A manera de repaso se darán algunos hechos fundamentales sobre las líneas rectas:

i) La **pendiente** m de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

ii) Si $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 \neq y_1$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es **indefinida**.[‡]

iii) Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir al escribir su ecuación en la forma pendiente-ordenada $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b es la ordenada (el valor de y en el punto en el que la recta cruza el eje y).

[†] *Diccionario de la Lengua Española*, vigésima segunda edición, Real Academia Española. Madrid: Espasa Calpe, 2001.
[‡] Indefinida o infinita, como también se le denomina en otros libros.

iv) Dos rectas distintas son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

v) Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by = c$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente, $m = -a/b$.

vi) Si m_1 es la pendiente de la recta L_1, m_2 es la pendiente de la recta L_2, $m_1 \neq 0$ y L_1 y L_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = -1/m_1$.

vii) Las rectas paralelas al eje x tienen una pendiente cero.

viii) Las rectas paralelas al eje y tienen una pendiente indefinida.

En la sección que sigue se ilustrará la relación que existe entre resolver sistemas de ecuaciones y encontrar los puntos de intersección entre pares de rectas.

2.2 DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{1}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1 y b_2 son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Una solución al sistema (1) es un par de números, denotados por (x,y), que satisface (1). Las preguntas que surgen en forma natural son: ¿tiene este sistema varias soluciones y, de ser así, cuántas? Se responderán estas preguntas después de ver algunos ejemplos, en los cuales se usarán dos hechos importantes del álgebra elemental:

Hecho A Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

Hecho B Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

El hecho A establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. El hecho B establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación válida. Se debe suponer que $c \neq 0$ ya que aunque la ecuación $0 = 0$ es correcta, no es muy útil.

EJEMPLO 1 Sistema con una solución única

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ x + y &= 5 \end{aligned} \tag{2}$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por el hecho A, la siguiente ecuación: $2x = 12$ (es decir, $x = 6$). Entonces, si se despeja de la segunda ecuación, $y = 5 - x = 5 - 6 =$ entonces $y = -1$. Así, el par $(6,-1)$ satisface el sistema (2) y la forma en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace. Es decir, el sistema (2) tiene una **solución única**.

EJEMPLO 2 Sistema con un número infinito de soluciones

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 14 \end{aligned} \tag{3}$$

Se puede ver que estas dos ecuaciones son equivalentes. Esto es, cualesquiera dos números, x y y, que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda, y viceversa. Para comprobar esto se multiplica la primera ecuación por 2. Esto está permitido por el hecho B. Entonces

$x - y = 7$ o $y = x - 7$. Así, el par $(x, x - 7)$ es una solución al sistema (3) para cualquier número real x. Es decir, el sistema (3) tiene un **número infinito de soluciones**. Para este ejemplo, los siguientes pares son soluciones: $(7, 0)$, $(0, -7)$, $(8, 1)$, $(1, -6)$, $(3, -4)$ y $(-2, -9)$.

EJEMPLO 3 **Sistema sin solución**

Considere el sistema

$$\begin{aligned} x - y &= 7 \\ 2x - 2y &= 13 \end{aligned} \tag{4}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 (que de nuevo está permitido por el hecho B) se obtiene $2x - 2y = 14$. Esto contradice la segunda ecuación. Por lo tanto, el sistema (4) **no tiene solución**.

Un sistema que no tiene solución se dice que es **inconsistente.**

Geométricamente es fácil explicar lo que sucede en los ejemplos anteriores. Primero, se repite que ambas ecuaciones del sistema (1) son de líneas rectas. Una solución a (1) es un punto (x, y) que se encuentra sobre las dos rectas. Si las dos rectas no son paralelas, entonces se intersecan en un solo punto. Si son paralelas, entonces nunca se intersecan (es decir, no tienen puntos en común) o son la misma recta (esto es, tienen un número infinito de puntos en común). En el ejemplo 1 las rectas tienen pendientes de 1 y -1, respectivamente, por lo que no son paralelas y tienen un solo punto en común $(6, -1)$. En el ejemplo 2, las rectas son paralelas (tienen pendiente 1) y coincidentes. En el ejemplo 3, las rectas son paralelas y distintas. Estas relaciones se ilustran en la figura 2.1.

Ahora se procederá a resolver el sistema (1) formalmente. Se tiene

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Si $a_{12} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ y se puede usar la segunda ecuación para despejar y.

Si $a_{22} = 0$, entonces $x = \dfrac{b_2}{a_{21}}$ y se puede usar la primera ecuación para despejar y.

Si $a_{12} = a_{22} = 0$, entonces el sistema (1) contiene sólo una incógnita, x.

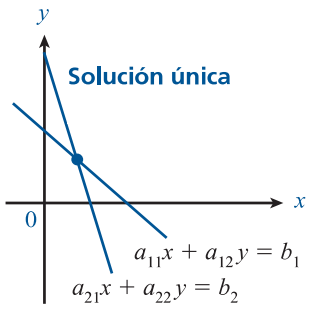
Así, se puede suponer que ni a_{12} ni a_{22} son cero.

Si se multiplica la primera ecuación por a_{22} y la segunda por a_{12} se tiene

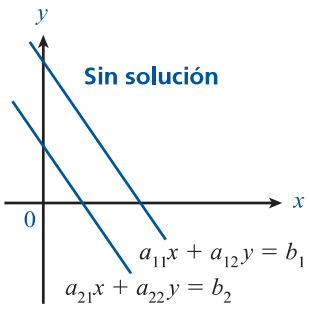
$$\begin{aligned} a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y &= a_{22}b_1 \\ a_{12}a_{21}x + a_{12}a_{22}y &= a_{12}b_2 \end{aligned} \tag{6}$$

Figura 2.1

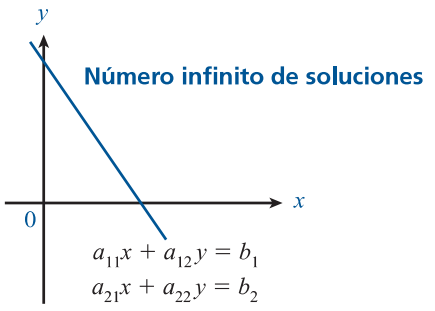
Dos rectas se intersecan en un punto, en ninguno o (si coinciden) en un número infinito de puntos.



a) Rectas no paralelas; un punto de intersección



b) Rectas paralelas; sin puntos de intersección



c) Rectas que coinciden; número infinito de puntos de intersección

SISTEMAS EQUIVALENTES

Antes de continuar se puede ver que los sistemas (1) y (6) son **equivalentes**. Esto quiere decir que cualquier solución del sistema (1) es una solución del sistema (6) y viceversa. Ello se concluye directamente del hecho B, suponiendo que c no es cero. Después, si en (6) se resta la segunda ecuación de la primera, se obtiene

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \qquad (7)$$

Es necesario hacer una pausa en este punto. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces se puede dividir entre este término para obtener

$$x = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Después se puede sustituir este valor de x en el sistema (1) para despejar y, y así se habrá encontrado la solución única del sistema.

Se ha demostrado lo siguiente:

Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, entonces el sistema (1) tiene una **solución única**

¿Cómo se relaciona esta afirmación con lo que se analizó anteriormente? En el sistema (1) se puede ver que la pendiente de la primera recta es $-a_{11}/a_{12}$ y que la pendiente de la segunda es $-a_{21}/a_{22}$. En los problemas 40, 41 y 42 se pide al lector que demuestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ si y sólo si las rectas son paralelas (es decir, tienen la misma pendiente). De esta manera se sabe que si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, las rectas no son paralelas y el sistema tiene una solución única.

Lo que se acaba de analizar puede formularse en un teorema. En secciones posteriores de este capítulo y los siguientes se harán generalizaciones de este teorema, y se hará referencia a él como el "teorema de resumen" conforme se avance en el tema. Una vez que se hayan demostrado todas sus partes, se podrá estudiar una relación asombrosa entre varios conceptos importantes de álgebra lineal.

TEOREMA 1

Teorema de resumen

El sistema

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x y y no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones. Esto es:

i) Tiene una solución única si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

ii) No tiene solución o tiene un número infinito de soluciones, si y sólo si

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.$$

Los sistemas de m ecuaciones con n incógnitas se estudian en la sección 2.3 y se verá que siempre ocurre que no tienen solución, o que tienen una o un número infinito de soluciones.

Autoevaluación

I) De las siguientes afirmaciones con respecto a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, ¿cuál de ellas no es verdadera?

a) Es un par ordenado que satisface ambas ecuaciones.

b) Su gráfica consiste en el(los) punto(s) de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

c) Su gráfica es la abscisa de las gráficas de las ecuaciones.

d) Si el sistema es inconsistente, no existe una solución.

II) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para un sistema inconsistente de dos ecuaciones lineales?

a) No existe una solución.

b) La gráfica del sistema está sobre el eje y.

c) La gráfica de la solución es una recta.

d) La gráfica de la solución es el punto de intersección de dos líneas.

III) ¿Cuál de las aseveraciones que siguen es cierta para el siguiente sistema de ecuaciones?

$$3x - 2y = 8$$
$$4x + y = 7$$

a) El sistema es inconsistente.

b) La solución es $(-1, 2)$.

c) La solución se encuentra sobre la recta $x = 2$.

d) Las ecuaciones son equivalentes.

IV) De las siguientes ecuaciones que se presentan, ¿cuál de ellas es una segunda ecuación para el sistema cuya primera ecuación es $x - 2y = -5$ si debe tener un número infinito de soluciones?

a) $6y = 3x + 15$ ***b)*** $6x - 3y = -15$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ***d)*** $\frac{3}{2}x = 3y + \frac{15}{2}$

V) ¿Cuál de las gráficas de los siguientes sistemas es un par de rectas paralelas?

a) $3x - 2y = 7$
$4y = 6x - 14$

b) $x - 2y = 7$
$3x = 4 + 6y$

c) $2x + 3y = 7$
$3x - 2y = 6$

d) $5x + y = 1$
$7y = 3x$

Desarrollo de competencias 2.2

En los problemas 1 a 16 encuentre las soluciones (si las hay) de los sistemas dados. En cada caso calcule el valor de $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

1. $x - 3y = 4$
$-4x + 2y = 6$

2. $5x - 7y = 4$
$-x + 2y = -3$

3. $2x - y = -3$
$5x + 7y = 4$

4. $2x - 8y = 5$
$-3x + 12y = 8$

5. $10x - 40y = 30$
$-3x + 12y = -90$

6. $2x - 8y = 6$
$-3x + 12y = -9$

7. $6x + y = 3$
$-4x - y = 8$

8. $5x + y = 0$
$7x + 3y = 0$

9. $3x + y = 0$
$2x - 3y = 0$

10. $4x - 6y = 0$
$-2x + 3y = 0$

11. $5x + 2y = 3$
$2x + 5y = 3$

12. $4x + 7y = 3$
$7x - 4y = 3$

13. $2x + 3y = 4$
$3x + 4y = 5$

14. $ax + by = c$
$ax - by = c$

15. $ax + by = c$
$bx + ay = c$

16. $ax - by = c$
$bx + ay = d$

17. Para el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema tiene solución única; justifique su solución.

$$\begin{aligned} Kx + y + z &= 1 \\ x + Ky + z &= 1 \\ x + y + Kz &= 1 \end{aligned}$$

18. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales determine para qué valores de K el sistema:

a) No tiene solución

b) Tiene soluciones infinitas

c) Tiene solución única

$$\begin{aligned} 2x - y - Kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2y &= K \end{aligned}$$

19. Encuentre las condiciones sobre a y b tales que el sistema en el problema 14 tenga una solución única.

20. Encuentre las condiciones sobre a, b y c tales que el sistema del problema 15 tenga un número infinito de soluciones.

21. Encuentre las condiciones sobre a, b, c y d tales que el problema 16 no tenga solución.

En los problemas 22 al 29 encuentre el punto de intersección (si hay uno) de las dos rectas.

22. $x - y = 7$; $2x + 3y = 1$

23. $2x - 2y = 3$; $3x + 7y = -1$

24. $y - 2x = 4$; $4x - 2y = 6$

25. $4x - 6y = 7$; $6x - 9y = 12$

26. $4x - 6y = 10$; $6x - 9y = 15$

27. $3x + y = 4$; $y - 5x = 2$

28. $2y - 3x = 0$; $7y - 5x = 9$

29. $3x + 4y = 5$; $6x - 7y = 8$

Sea L una recta y $L_\perp$ la recta perpendicular a L que pasa a través de un punto dado P. La **distancia** de L a P se define como la distancia[†] entre P y el punto de intersección de L y $L_\perp$. En los problemas 30 a 36 encuentre la distancia entre la recta dada y el punto.

30. $x - y = 6$; $(0, 0)$

31. $2x + 3y = -1$; $(0, 0)$

32. $3x + y = 7$; $(1, 2)$

33. $5x - 6y = 3$; $(2, \frac{16}{5})$

34. $2y - 5x = -2$; $(5, -3)$

35. $3y - 7x = 0$; $(-1, -5)$

36. $6y + 3x = 3$; $(8, -1)$

37. Encuentre la distancia entre la recta $2x - y = 6$ y el punto de intersección de las rectas $3x - 2y = 1$ y $6x + 3y = 12$.

[†] Recuerde que si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano xy, entonces la distancia d entre ellos está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

***38.** Pruebe que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $ax + by = c$ está dada por

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

39. En un zoológico hay aves (de dos patas) y bestias (de cuatro patas). Si el zoológico contiene 60 cabezas y 200 patas, ¿cuántas aves y bestias viven en él?

40. Suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Demuestre que las rectas dadas en el sistema de ecuaciones (1) son paralelas. Suponga que $a_{11} \neq 0$ o $a_{12} \neq 0$ y $a_{21} \neq 0$ o $a_{22} \neq 0$.

41. Si existe una solución única al sistema (1), muestre que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

42. Si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ demuestre que el sistema (1) tiene una solución única.

43. La compañía Sunrise Porcelain fabrica tazas y platos de cerámica. Para cada taza o plato un trabajador mide una cantidad fija de material y la pone en la máquina que los forma, de donde pasa al vidriado y secado automático. En promedio, un trabajador necesita tres minutos para iniciar el proceso de una taza y dos minutos para el de un plato. El material para una taza cuesta ¢25 y el material para un plato cuesta ¢20. Si se asignan $44 diarios para la producción de tazas y platos, ¿cuántos deben fabricarse de cada uno en un día de trabajo de 8 horas, si un trabajador se encuentra trabajando cada minuto y se gastan exactamente $44 en materiales?

44. Conteste la pregunta del problema 43 si los materiales para una taza y un plato cuestan ¢15 y ¢10, respectivamente, y se gastan $24 en 8 horas de trabajo.

45. Conteste la pregunta del problema 44 si se gastan $25 en 8 horas de trabajo.

46. Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 4 onzas de helado en un helado con soda, y 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado en una malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿cuántos helados con soda y cuántas malteadas vende? [*Sugerencia:* 1 cuarto = 32 onzas, 1 galón = 4 cuartos.]

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c)* II. *a)* III. *c)* IV. *a)* V. *b)*

2.3 *m* ECUACIONES CON *n* INCÓGNITAS: ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN Y GAUSSIANA

En esta sección se describe un método para encontrar todas las soluciones (si es que existen) de un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas. Al hacerlo se verá que, igual que en el caso de 2×2, tales sistemas o bien no tienen solución, tienen una solución o tienen un número infinito de soluciones. Antes de llegar al método general se verán algunos ejemplos sencillos. Como variables, se usarán x_1, x_2, x_3, etc., en lugar de $x, y, z, \ldots$ porque la generalización es más sencilla si se usa la notación con subíndices.

EJEMPLO 1 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: solución única**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Solución En este caso se buscan tres números x_1, x_2, x_3, tales que las tres ecuaciones en (1) se satisfagan. El método de solución que se estudiará será el de simplificar las ecuaciones como se hizo en la sección 2.2, de manera que las soluciones se puedan identificar de inmediato. Se comienza por dividir la primera ecuación entre 2. Esto da

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

Como se vio en la sección 2.2, al sumar dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación correcta. Esta nueva ecuación puede sustituir a cualquiera de las dos ecuaciones del sistema que se usaron para obtenerla. Primero se simplifica el sistema (2) multiplicando ambos lados de la primera ecuación de (2) por -4 y sumando esta nueva ecuación a la segunda. Esto da

$$\begin{aligned} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 &= -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 &= -12 \end{aligned}$$

La ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$ es la nueva segunda ecuación y el sistema ahora es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Nota. Como se puede ver por el desarrollo anterior, se ha *sustituido* la ecuación $4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$ por la ecuación $-3x_2 - 6x_3 = -12$. En este ejemplo y otros posteriores se sustituirán ecuaciones con otras más sencillas hasta obtener un sistema cuya solución se pueda identificar de inmediato.

Entonces, la primera ecuación se multiplica por -3 y se suma a la tercera, lo que da por resultado:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -12 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned} \tag{3}$$

Observe que en el sistema (3) se ha eliminado la variable x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Después se divide la segunda ecuación por -3:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -5x_2 - 11x_3 &= -23 \end{aligned}$$

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera; después se multiplica la segunda ecuación por 5 y se suma a la tercera:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Ahora se multiplica la tercera ecuación por -1:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - \quad x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Por último, se suma la tercera ecuación a la primera y después se multiplica la tercera ecuación por -2 y se suma a la segunda para obtener el siguiente sistema, el cual es equivalente al sistema (1):

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 4 \\ x_2 \quad &= -2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Ésta es la solución única para el sistema. Se escribe en la forma $(4, -2, 3)$. El método que se usó se conoce como **eliminación de Gauss-Jordan**.[†]

Antes de seguir con otro ejemplo es conveniente resumir lo que se hizo en éste:

i) Se dividió la primera ecuación, entre una constante, para hacer el coeficiente de x_1 igual a 1.

ii) Se "eliminaron" los términos en x_1 de la segunda y tercera ecuaciones. Esto es, los coeficientes de estos términos se hicieron cero al multiplicar la primera ecuación por las constantes adecuadas y sumándola a la segunda y tercera ecuaciones, respectivamente, de manera que al sumar las ecuaciones una de las incógnitas se eliminaba.

iii) Se dividió la segunda ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_2 igual a 1 y después se usó la segunda ecuación para "eliminar" los términos en x_2 de la primera y tercera ecuaciones, de manera parecida a como se hizo en el paso anterior.

iv) Se dividió la tercera ecuación entre una constante, para hacer el coeficiente de x_3 igual a 1 y después se usó esta tercera ecuación para "eliminar" los términos de x_3 de la primera y segunda ecuaciones.

Cabe resaltar el hecho de que, en cada paso, se obtuvieron sistemas equivalentes. Es decir, cada sistema tenía el mismo conjunto de soluciones que el precedente. Esto es una consecuencia de los hechos A y B de la sección 2.2.

MATRIZ

Antes de resolver otros sistemas de ecuaciones es conveniente introducir una notación que simplifica la escritura de cada paso del procedimiento mediante el concepto de **matriz**. Una matriz es un arreglo rectangular de números y éstas se estudiarán con gran detalle al inicio de la sección 1.5. Por ejemplo, los coeficientes de las variables x_1, x_2, x_3 en el sistema (1) se pueden escribir como los elementos de una matriz A, llamada **matriz de coeficientes** del sistema:

MATRIZ DE COEFICIENTES

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

[†] Recibe este nombre en honor del gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss (1777-1855) y del ingeniero alemán Wilhelm Jordan (1844-1899). Vea la semblanza bibliográfica de Gauss en la página 31. Jordan fue un experto en investigación geodésica tomando en cuenta la curvatura de la Tierra. Su trabajo sobre la solución de sistemas de ecuaciones apareció en 1888 en su libro *Handbuch der Vermessungskunde* (Manual de geodesia).

MATRIZ $m \times n$

Una matriz con m renglones y n columnas se llama una **matriz de $m \times n$**. El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". El estudio de matrices constituye gran parte de los capítulos restantes de este libro. Por la conveniencia de su notación para la resolución de sistemas de ecuaciones, las presentamos aquí.

MATRIZ AUMENTADA

Al usar la notación matricial, el sistema (1) se puede escribir como la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \tag{5}$$

Ahora es posible introducir cierta terminología. Se ha visto que multiplicar (o dividir) los dos lados de una ecuación por un número diferente de cero da por resultado una nueva ecuación equivalente. Más aún, si se suma un múltiplo de una ecuación a otra del sistema se obtiene otra ecuación equivalente. Por último, si se intercambian dos ecuaciones en un sistema de ecuaciones se obtiene un sistema equivalente. Estas tres operaciones, cuando se aplican a los renglones de la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones, se denominan **operaciones elementales con renglones**.

Para resumir, las tres operaciones elementales con renglones aplicadas a la matriz aumentada que representa un sistema de ecuaciones son:

Operaciones elementales con renglones

i) Multiplicar (o dividir) un renglón por un número diferente de cero.
ii) Sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón.
iii) Intercambiar dos renglones.

REDUCCIÓN POR RENGLONES

El proceso de aplicar las operaciones elementales con renglones para simplificar una matriz aumentada se llama **reducción por renglones**.

NOTACIÓN

1. $R_i \to cR_i$ quiere decir "reemplaza el i-ésimo renglón por ese mismo renglón multiplicado por c". [Para multiplicar el i-ésimo renglón por c se multiplica cada número en el i-ésimo renglón por c.]
2. $R_j \to R_j + cR_i$ significa sustituye el j-ésimo renglón por la suma del renglón j más el renglón i multiplicado por c.
3. $R_i \rightleftarrows R_j$ quiere decir "intercambiar los renglones i y j".
4. $A \to B$ indica que las matrices aumentadas A y B son equivalentes; es decir, que los sistemas que representan tienen la misma solución.

En el ejemplo 1 se vio que al usar las operaciones elementales con renglones *i*) y *ii*) varias veces, se puede obtener un sistema cuyas soluciones estén dadas en forma explícita. Ahora se repiten los pasos del ejemplo 1 usando la notación que se acaba de introducir:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 2R_3]{R_1 \to R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

De nuevo se puede "ver" de inmediato que la solución es $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: número infinito de soluciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 30 \end{aligned}$$

Solución Para resolver este sistema se procede como en el ejemplo 1, esto es, primero se escribe el sistema como una matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right)$$

Después se obtiene, sucesivamente,

$$\xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Hasta aquí se puede llegar. Se tienen sólo dos ecuaciones para las tres incógnitas x_1, x_2, x_3 y existe un número infinito de soluciones. Para comprobar esto se elige un valor de x_3. Entonces $x_2 = 4 - 2x_3$ y $x_1 = 1 + x_3$. Ésta será una solución para cualquier número x_3. Se escribe esta solución en la forma $(1 + x_3, 4 - 2x_3, x_3)$. Por ejemplo, si $x_3 = 0$, se obtiene la solución (1, 4, 0). Para $x_3 = 10$ se obtiene la solución (11, −16, 10), y por ello para cada valor de x_3 habrá una solución distinta.

EJEMPLO 3 **Sistema inconsistente**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad (6)$$

Solución La matriz aumentada para este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El elemento 1,1 de la matriz no se puede hacer 1 como antes porque al multiplicar 0 por cualquier número real el resultado es 0. En su lugar se puede usar la operación elemental con renglones *iii*) para obtener un número distinto a cero en la posición 1,1. Se puede intercambiar el renglón 1 con cualquiera de los otros dos; sin embargo, al intercambiar los renglones 1 y 3 queda un 1 en esa posición. Al hacerlo se obtiene lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 1 & -2 & 5 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 2 & -6 & 7 & 15 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Es necesario detenerse aquí porque, como se ve, las últimas dos ecuaciones son

$$\begin{aligned} -2x_2 - 3x_3 &= -5 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

lo cual es imposible (si $-2x_2 - 3x_3 = -5$, entonces $2x_2 + 3x_3 = 5$, no 4). Así no hay una solución. Se puede proceder como en los últimos dos ejemplos para obtener una forma más estándar:

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 15 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Ahora la última ecuación es $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$, lo cual también es imposible ya que $0 \neq -1$. Así, el sistema (6) no tiene solución. En este caso se dice que el sistema es **inconsistente**.

DEFINICIÓN 1 **Sistemas inconsistentes y consistentes**

Se dice que un sistema de ecuaciones lineales es **inconsistente** si no tiene solución. Se dice que un sistema que tiene al menos una solución es **consistente**.

Se analizarán de nuevo estos tres ejemplos. En el ejemplo 1 se comenzó con la matriz de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

En el proceso de reducción por renglones, A_1 se "redujo" a la matriz

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 2 se comenzó con

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el ejemplo 3 se comenzó con

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y se terminó con

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las matrices R_1, R_2, R_3 se llaman **formas escalonadas reducidas por renglones** de las matrices A_1, A_2 y A_3 respectivamente. En general, se tiene la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2 **Forma escalonada reducida por renglones y pivote**

Una matriz se encuentra en **la forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las siguientes condiciones:

i) Todos los renglones (si los hay) cuyos elementos son todos cero aparecen en la parte inferior de la matriz.

ii) El primer número diferente de cero (comenzando por la izquierda) en cualquier renglón cuyos elementos no todos son cero es 1.

iii) Si dos renglones sucesivos tienen elementos distintos de cero, entonces el primer 1 en el renglón de abajo está más hacia la derecha que el primer 1 en el renglón de arriba.

iv) Cualquier columna que contiene el primer 1 en un renglón tiene ceros en el resto de sus elementos. El primer número diferente de cero en un renglón (si lo hay) se llama **pivote** para ese renglón.

Nota. La condición *iii*) se puede reescribir como "el pivote en cualquier renglón está a la derecha del pivote del renglón anterior".

EJEMPLO 4 **Cinco matrices en la forma escalonada reducida por renglones**

Las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por renglones:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **ii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **iii)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **iv)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **v)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Las matrices *i*) y *ii*) tienen tres pivotes; las otras tres matrices tienen dos pivotes.

DEFINICIÓN 3 **Forma escalonada por renglones**

Una matriz está en la forma escalonada por renglones si se cumplen las condiciones *i*), *ii*) y *iii*) de la definición 2.

EJEMPLO 5 **Cinco matrices en la forma escalonada por renglones**

Las siguientes matrices se encuentran en la forma escalonada por renglones:

$$\text{i)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \text{ii)}\begin{pmatrix}1&-1&6&4\\0&1&2&-8\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\text{iii)}\begin{pmatrix}1&0&2&5\\0&0&1&2\end{pmatrix} \qquad \text{iv)}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} \qquad \text{v)}\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Nota. Por lo general, la forma escalonada por renglones de una matriz no es única. Es decir, una matriz puede ser equivalente, en sus renglones, a más de una matriz en forma escalonada por renglones. Por ejemplo

$$A=\begin{pmatrix}1&3&2&5\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&2&-1&-1\\0&1&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

muestra que las dos matrices anteriores, ambas en forma escalonada por renglones, son equivalentes por renglones. Así, cualquier matriz para la que A es una forma escalonada por renglones, también tiene a B como forma escalonada por renglones.

Observación 1. La diferencia entre estas dos formas debe ser evidente a partir de los ejemplos. En la forma escalonada por renglones, todos los números abajo del primer 1 en un renglón son cero. En la forma escalonada reducida por renglones, todos los números abajo y arriba del primer 1 de un renglón son cero. Así, la forma escalonada reducida por renglones es más exclusiva. Esto es, en toda matriz en forma escalonada reducida por renglones se encuentra también la forma escalonada por renglones, pero el inverso no es cierto.

Observación 2. Siempre se puede reducir una matriz a la forma escalonada reducida por renglones o a la forma escalonada por renglones realizando operaciones elementales con renglones. Esta reducción se vio al obtener la forma escalonada reducida por renglones en los ejemplos 1, 2 y 3.

Como se vio en los ejemplos 1, 2 y 3, existe una fuerte relación entre la forma escalonada reducida por renglones y la existencia de la solución única para el sistema. En el ejemplo 1 dicha forma para la matriz de coeficientes (es decir, en la primeras tres columnas de la matriz aumentada) tenían un 1 en cada renglón y existía una solución única. En los ejemplos 2 y 3 la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes tenía un renglón de ceros y el sistema no tenía solución o tenía un número infinito de soluciones. Esto siempre es cierto en cualquier sistema de ecuaciones con el mismo número de ecuaciones e incógnitas. Pero antes de estudiar el caso general se analizará la utilidad de la forma escalonada por renglones de una matriz. Es posible resolver el sistema en el ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a esta forma.

EJEMPLO 6 **Solución de un sistema mediante eliminación gaussiana**

Resuelva el sistema del ejemplo 1 reduciendo la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones.

Solución Se comienza como antes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -11 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -11 & -23 \end{array}\right)$$

Hasta aquí, este proceso es idéntico al anterior; pero ahora sólo se hace cero el número (-5) que está abajo del primer 1 en el segundo renglón:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

SUSTITUCIÓN HACIA ATRÁS

ELIMINACIÓN GAUSSIANA

La matriz aumentada del sistema (y los coeficientes de la matriz) se encuentran ahora en la forma escalonada por renglones y se puede ver de inmediato que $x_3 = 3$. Después se usa la **sustitución hacia atrás** para despejar primero x_2 y después x_1. La segunda ecuación queda $x_2 + 2x_3 = 4$. Entonces $x_2 + 2(3) = 4$ y $x_2 = -2$. De igual manera, de la primera ecuación se obtiene $x_1 + 2(-2) + 3(3) = 9$ o $x_1 = 4$. Así, de nuevo se obtiene la solución $(4, -2, 3)$. El método de solución que se acaba de emplear se llama **eliminación gaussiana**.

Se cuenta con dos métodos para resolver los ejemplos de sistemas de ecuaciones:

i) Eliminación de Gauss-Jordan
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones usando el procedimiento descrito en la página 9.

ii) Eliminación gaussiana
Se reduce por renglón la matriz de coeficientes a la forma escalonada por renglones, se despeja el valor de la última incógnita y después se usa la sustitución hacia atrás para las demás incógnitas.

¿Cuál método es más útil? Depende. Al resolver sistemas de ecuaciones en una computadora se prefiere el método de eliminación gaussiana porque significa menos operaciones elementales con renglones. De hecho, como se verá en el apéndice 3, para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas usando la eliminación de Gauss-Jordan se requieren aproximadamente $n^3/2$ sumas y multiplicaciones, mientras que la eliminación gaussiana requiere sólo $n^3/3$ sumas y multiplicaciones. La solución numérica de los sistemas de ecuaciones se estudiará en el apéndice 4. Por otro lado, a veces es esencial obtener la forma escalonada reducida por renglones de una matriz. En estos casos la eliminación de Gauss-Jordan es el método preferido.

Ahora se observa la solución de un sistema general de m ecuaciones con n incógnitas. La mayor parte de las soluciones de los sistemas se hará mediante la eliminación de Gauss-Jordan. Debe tenerse en mente, sin embargo, que la eliminación gaussiana suele ser un enfoque más conveniente.

El sistema general $m \times n$ de m ecuaciones con n incógnitas está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{7}$$

En el sistema (7) todos los coeficientes a y b son números reales dados. El problema es encontrar todos los conjuntos de n números, denotados por $(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$, que satisfacen cada una de las m ecuaciones en (7). El número a_{ij} es el coeficiente de la variable x_j en la i-ésima ecuación.

Es posible resolver un sistema de m ecuaciones con n incógnitas haciendo uso de la eliminación de Gauss-Jordan o gaussiana. En seguida se proporciona un ejemplo en el que el número de ecuaciones e incógnitas es diferente.

EJEMPLO 7 Solución de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se escribe como una matriz aumentada y se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 8 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 19 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -8 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz de coeficiente se encuentra en forma escalonada y reducida por renglones. Es evidente que existe un número infinito de soluciones. Los valores de las variables x_3 y x_4 se pueden escoger de manera arbitraria. Entonces $x_2 = 2 + 8x_3 + 2x_4$ y $x_1 = -2 - 19x_3 - 7x_4$. Por lo tanto, todas las soluciones se representan por $(-2 - 19x_3 - 7x_4, 2 + 8x_3 + 2x_4, x_3, x_4)$. Por ejemplo, si $x_3 = 1$ y $x_4 = 2$ se obtiene la solución $(-35, 14, 1, 2)$.

Al resolver muchos sistemas, es evidente que los cálculos se vuelven fastidiosos. Un buen método práctico es usar una calculadora o computadora siempre que las fracciones se compliquen. Debe hacerse notar, sin embargo, que si los cálculos se llevan a cabo en una computadora o calculadora pueden introducirse errores de "redondeo". Este problema se analiza en el apéndice 3.

EJEMPLO 8 Un problema de administración de recursos

Un departamento de pesca y caza del estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades del alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3.

Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25 000 unidades del alimento 1, 20 000 unidades del alimento 2 y 55 000 del 3. Si suponemos que los peces se comen todo el alimento ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 el número de peces de cada especie que hay en el ambiente del lago. Si utilizamos la información del problema, se observa que x_1 peces de la especie 1 consumen x_1 unidades del alimento 1, x_2 peces de la especie 2 consumen $3x_2$ unidades del alimento 1 y x_3 peces de la especie 3 consumen $2x_3$ unidades del alimento 1. Entonces, $x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25\,000$ = suministro total por semana de alimento 1. Si se obtiene una ecuación similar para los otros dos alimentos se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 25\,000 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 &= 20\,000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 55\,000 \end{aligned}$$

Después de resolver se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 1 & 4 & 1 & 20\,000 \\ 2 & 5 & 5 & 55\,000 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & -1 & 1 & 5\,000 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_2]{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 40\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por consiguiente, si x_3 se elige arbitrariamente, se tiene un número infinito de soluciones dada por $(40\,000 - 5x_3, x_3 - 5\,000, x_3)$. Por supuesto, se debe tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Como $x_2 = x_3 - 5\,000 \geq 0$, se tiene $x_3 \geq 5\,000$. Esto significa que $0 \leq x_1 \leq 40\,000 - 5(5\,000) = 15\,000$. Por último, como $40\,000 - 5x_3 \geq 0$, se tiene que $x_3 \leq 8\,000$. Esto significa que las poblaciones que pueden convivir en el lago con todo el alimento consumido son

$$\begin{aligned} x_1 &= 40\,000 - 5x_3 \\ x_2 &= x_3 - 5\,000 \\ 5\,000 &\leq x_3 \leq 8\,000 \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $x_3 = 6\,000$, entonces $x_1 = 10\,000$ y $x_2 = 1\,000$.

Nota. El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones. Sin embargo, el problema de administración de recursos tiene sólo un número finito de soluciones porque x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros positivos y existen nada más 3 001 enteros en el intervalo [5 000, 8 000]. (Por ejemplo, no puede haber 5 237.578 peces.)

Análisis de insumo y producto

Los siguientes dos ejemplos muestran la forma en la cual pueden surgir los sistemas de ecuaciones en el modelado económico.

EJEMPLO 9 El modelo de insumo-producto de Leontief

Un modelo que se usa con frecuencia en economía es el **modelo de insumo-producto de Leontief**.[†] Suponga un sistema económico que tiene n industrias. Existen dos tipos de demandas en cada industria: la primera, una demanda *externa* desde afuera del sistema. Por ejemplo, si el sistema es un país, la demanda externa puede provenir de otro país. Segunda, la demanda que hace una industria a otra industria en el mismo sistema. Por ejemplo, en Estados Unidos la industria automotriz demanda parte de la producción de la industria del acero.

Suponga que e_i representa la demanda externa ejercida sobre la i-ésima industria. Suponga que a_{ij} representa la demanda interna que la j-ésima industria ejerce sobre la i-ésima industria. De forma más concreta, a_{ij} representa el número de unidades de producción de la industria i que se necesitan para producir una unidad de la industria j. Sea x_1 la producción de la industria i. Ahora suponga que la producción de cada industria es igual a su demanda (es decir, no hay sobreproducción). La demanda total es igual a la suma de demandas internas y externas. Por ejemplo, para calcular la demanda interna de la industria 2 se observa que la industria 1 necesita a_{21} unidades de producción de la industria 2 para producir una unidad de su propia producción. Si la producción de la industria 1 es x_1, entonces $a_{21}x_1$ se trata de la cantidad total que necesita la industria 1 de la industria 2. De esta forma, la demanda interna total sobre la industria 2 es $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$.

Al igualar la demanda total a la producción de cada industria se llega al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned} \tag{8}$$

O bien, reescribiendo el sistema (8) en la forma del sistema (7) se obtiene

$$\begin{aligned} (1-a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n &= e_1 \\ -a_{21}x_1 + (1-a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n &= e_2 \\ \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1-a_{nn})x_n &= e_n \end{aligned} \tag{9}$$

El sistema (9) de n ecuaciones con n incógnitas es de fundamental importancia en el análisis económico.

EJEMPLO 10 El modelo de Leontief aplicado a un sistema económico con tres industrias

Suponga que las demandas externas en un sistema económico con tres industrias son 10, 25 y 20, respectivamente. Suponga que $a_{11} = 0.2$, $a_{12} = 0.5$, $a_{13} = 0.15$, $a_{21} = 0.4$, $a_{22} = 0.1$, $a_{23} = 0.3$, $a_{31} = 0.25$, $a_{32} = 0.5$ y $a_{33} = 0.15$. Encuentre la producción de cada industria de manera que la oferta sea exactamente igual a la demanda.

[†] Así llamado en honor al economista norteamericano Wassily W. Leontief, quien utilizó este modelo en su trabajo pionero "Quantitative Input and Output Relations in the Economic System of the United States" en *Review of Economic Statistics* 18(1936). Leontief ganó el Premio Nobel en Economía en 1973 por su desarrollo del análisis de insumo-producto.

Solución En este caso $n = 3$, $1 - a_{11} = 0.8$, $1 - a_{22} = 0.9$ y $1 - a_{33} = 0.85$ y el sistema (9) es

$$\begin{aligned} 0.8x_1 - 0.5x_2 - 0.15x_3 &= 10 \\ -0.4x_1 + 0.9x_2 - 0.3x_3 &= 25 \\ -0.25x_1 - 0.5x_2 + 0.85x_3 &= 20 \end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema por método de eliminación de Gauss-Jordan en una calculadora o computadora, trabajando con cinco decimales en todos los pasos se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 110.30442 \\ 0 & 1 & 0 & 118.74070 \\ 0 & 0 & 1 & 125.81787 \end{array}\right)$$

Se concluye que la producción necesaria para que la oferta sea (aproximadamente) igual a la demanda es $x_1 = 110$, $x_2 = 119$ y $x_3 = 126$.

La geometría de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

En la figura 2.1, se observó que se puede repesentar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas mediante dos líneas rectas. Si las rectas tienen un solo punto de intersección el sistema tiene una solución única; si coinciden, existe un número infinito de soluciones; si son paralelas, no existe una solución y el sistema es inconsistente.

Algo similar ocurre cuando se tienen tres ecuaciones con tres incógnitas.

Se verifica que la gráfica de la ecuación $ax + by + cz = d$ en el espacio de tres dimensiones es un plano.

Considere el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} ax - by - cz &= d \\ ex - fy - gz &= h \\ jx - ky - lz &= m \end{aligned} \qquad \textbf{(10)}$$

en donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k, l$ y m son constantes y al menos una de ellas en cada ecuación es diferente de cero.

Cada ecuación en (10) es la ecuación de un plano. *Cada* solución (x, y, z) al sistema de ecuaciones debe ser un punto en *cada uno* de los tres planos. Existen seis posibilidades:

1. Los tres planos se intersecan en un solo punto. Por lo que existe una solución única para el sistema (vea la figura 2.2).
2. Los tres planos se intersecan en la misma recta, por lo que cada punto sobre la recta es una solución y el sistema tiene un número infinito de soluciones (vea la figura 2.3).

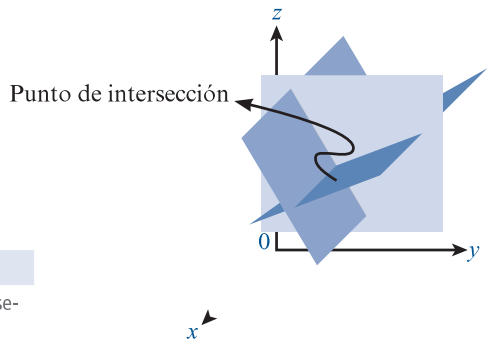


Figura 2.2
Los tres planos se intersecan en un solo punto.

3. Los tres planos coinciden. Entonces cada punto sobre el plano es una solución y se tiene un número infinito de soluciones.
4. Dos de los planos coinciden e intersecan a un tercer plano en la recta. Entonces cada punto sobre la recta es una solución y existe un número infinito de soluciones (vea la figura 2.4).
5. Al menos dos de los planos son paralelos y distintos. Por lo que ningún punto puede estar en ambos y no hay solución. El sistema es inconsistente (vea la figura 2.5).

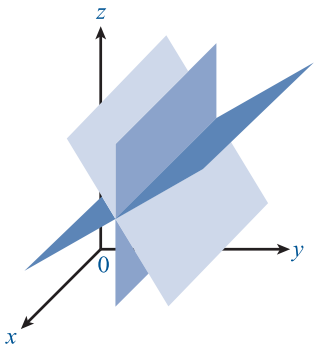


Figura 2.3
Los tres planos se intersecan en la misma recta.

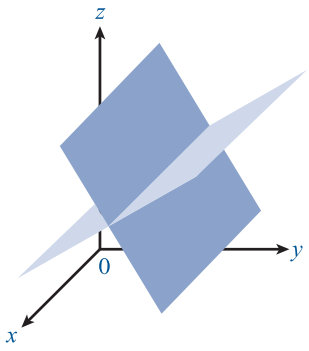


Figura 2.4
Dos planos se intersecan en una recta.

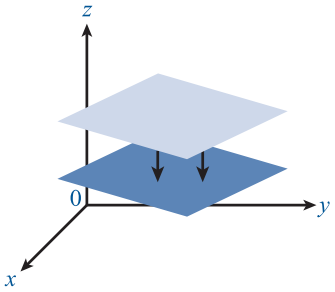


Figura 2.5
Los planos paralelos no tienen puntos en común.

6. Dos de los planos coinciden en una recta L. El tercer plano es paralelo a L (y no contiene a L), de manera que ningún punto del tercer plano se encuentra en los dos primeros. No existe una solución y el sistema es inconsistente (vea la figura 2.6).

En todos los casos el sistema tiene una solución única, un número infinito de soluciones o es inconsistente. Debido a la dificultad que representa dibujar planos con exactitud, no ahondaremos más en el tema. No obstante, es útil analizar cómo las ideas en el plano xy se pueden extender a espacios más complejos.

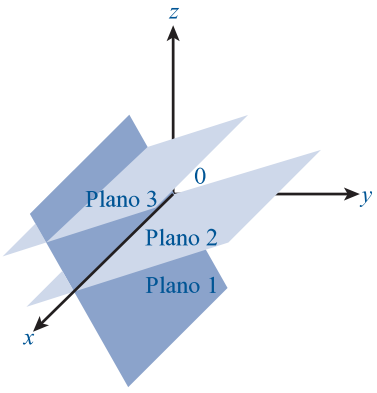


Figura 2.6
El plano 3 es paralelo a L, la recta de intersección de los planos 1 y 2.

Semblanza de...

Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Carl Friedrich Gauss
(Library of Congress)

Carl Friedrich Gauss es considerado el matemático más grande del siglo XIX, además de uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos (Arquímedes y Newton son los otros dos).

Gauss nació en Brunswick, Alemania, en 1777. Su padre, un obrero amante del trabajo, era excepcionalmente obstinado y no creía en la educación formal, e hizo todo lo que pudo para evitar que Gauss fuera a una buena escuela. Por fortuna para Carl (y para las matemáticas), su madre, a pesar de que tampoco contaba con educación, apoyó a su hijo en sus estudios y se mostró orgullosa de sus logros hasta el día de su muerte a la edad de 97 años.

Gauss era un niño prodigio. A los tres años encontró un error en la libreta de cuentas de su padre. Hay una anécdota famosa de Carl, cuando tenía apenas 10 años de edad y asistía a la escuela local de Brunswick. El profesor solía asignar tareas para mantener ocupados a los alumnos y un día les pidió que sumaran los números del 1 al 100. Casi al instante, Carl colocó su pizarra boca abajo con la palabra "listo". Después, el profesor descubrió que Gauss era el único con la respuesta correcta, 5050. Gauss había observado que los números se podían arreglar en 50 pares que sumaban cada uno 101 ($1 + 100, 2 + 99$, etc.), y $50 \times 101 = 5050$. Años más tarde, Gauss bromeaba diciendo que podía sumar más rápido de lo que podía hablar.

A la edad de 15 años, el Duque de Brunswick se fijó en él y lo convirtió en su protegido. El Duque lo ayudó a ingresar en el Brunswick College en 1795 y, tres años después, a entrar a la Universidad de Göttingen. Indeciso entre las carreras de matemáticas y filosofía, Gauss eligió las matemáticas después de dos descubrimientos asombrosos. Primero inventó el método de mínimos cuadrados una década antes de que Legendre publicara sus resultados. Segundo, un mes antes de cumplir 19 años, resolvió un problema cuya solución se había buscado durante más de dos mil años: Gauss demostró cómo construir, con tan sólo una regla y un compás, un polígono regular cuyo número de lados no es múltiplo de 2, 3 o 5.*

El 30 de marzo de 1796, fecha de este descubrimiento, comenzó un diario que contenía como primera nota las reglas de construcción de un polígono regular de 17 lados. El diario, que contiene los enunciados de 146 resultados en sólo 19 páginas, es unos de los documentos más importantes en la historia de las matemáticas.

Tras un corto periodo en Göttingen, Gauss fue a la Universidad de Helmstädt y, en 1798, a los 20 años, escribió su famosa disertación doctoral. En ella dio la primera demostración matemática rigurosa del teorema fundamental del álgebra que indica que todo polinomio de grado n tiene, contando multiplicidades, exactamente n raíces. Muchos matemáticos, incluyendo a Euler, Newton y Lagrange, habían intentado probar este resultado.

Gauss hizo un gran número de descubrimientos en física al igual que en matemáticas. Por ejemplo, en 1801 utilizó un nuevo procedimiento para calcular, a partir de unos cuantos datos, la órbita del asteroide Ceres. En 1833 inventó el telégrafo electromagnético junto con su colega Wilhelm Weber (1804-1891). Aunque realizó trabajos brillantes en astronomía y electricidad, la que resultó asombrosa fue la producción matemática de Gauss. Hizo contribuciones fundamentales al álgebra y la geometría y en 1811 descubrió un resultado que llevó a Cauchy a desarrollar la teoría de la variable compleja. En este libro se le encuentra en el método de eliminación de Gauss-Jordan. Los estudiantes de análisis numérico aprenden la cuadratura gaussiana: una técnica de integración numérica.

Gauss fue nombrado catedrático de matemáticas de Göttingen en 1807 e impartió clase hasta su muerte en 1855. Aún después de su muerte, su espíritu matemático siguió acosando a los matemáticos del siglo XIX. Con frecuencia, un importante resultado nuevo ya había sido descubierto por Gauss y se podía encontrar en sus notas inéditas.

En sus escritos matemáticos Gauss era un perfeccionista y tal vez sea el último gran matemático que conocía prácticamente todo acerca de su área. Al afirmar que una catedral no era una catedral hasta que se quitara el último de los andamios, ponía todo su empeño para que cada uno de sus trabajos publicados fuera completo, conciso y elegante. Usaba un sello en el que se veía un árbol con unas cuantas frutas y la leyenda *pauca sed matura* (pocas pero maduras). Gauss creía también que las matemáticas debían reflejar el mundo real. A su muerte, Gauss fue honrado con una medalla conmemorativa que llevaba la inscripción "George V, Rey de Hanover, al príncipe de los matemáticos".

* De manera más general, Gauss probó que un polígono regular de n lados se puede construir con regla y compás si y sólo si n es de la forma $n = 2^k p_2 \cdot p_3 \ldots p_m$ donde $k \geq 0$ y las p_i son números primos de Fermat distintos. Los números primos de Fermat son aquellos que toman la forma $2^{2^n} + 1$. Los primeros cinco números primos de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65 537.

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuál de los siguientes sistemas tiene la matriz de coeficientes dada a la derecha?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $3x + 2y = -1$
$y = 5$
$2x = 1$

b) $3x + 2z = 10$
$2x + y = 0$
$-x + 5y + z = 5$

c) $3x = 2$
$2x + y = 0$
$-x + 5y = 1$

d) $3x + 2y - z = -3$
$y + 5z = 15$
$2x + z = 3$

II. ¿Cuál de las siguientes es una operación elemental con renglones?

a) Reemplazar un renglón con un múltiplo diferente de cero de ese renglón.

b) Sumar una constante diferente de cero a cada elemento en un renglón.

c) Intercambiar dos columnas.

d) Reemplazar un renglón con una suma de renglones y una constante diferente de cero.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre la matriz dada?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Está en la forma escalonada por renglón.

b) No está en la forma escalonada por renglón porque el cuarto número en el renglón 1 no es 1.

c) No está en la forma escalonada por renglón porque el primer elemento diferente de cero en el renglón 1 es 3.

d) No está en la forma escalonada por renglón porque la última columna contiene un cero.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema dado?

$$x + y + z = 3$$
$$2x + 2y + 2z = 6$$
$$3x + 3y + 3z = 10$$

a) Tiene una solución única $x = 1, y = 1, z = 1$.

b) Es inconsistente.

c) Tiene un número infinito de soluciones.

Desarrollo de competencias 2.3

En los problemas del 1 al 26 utilice el método de eliminación de Gauss-Jordan para encontrar, si existen, todas las soluciones para los sistemas dados.

1.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 5x_1 + 8x_3 &= -16 \\ 3x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -3 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} -1x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 5x_1 + 28x_2 - 26x_3 &= -8 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} -2x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 2x_2 + 5x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -2 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -8 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= -9 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 21 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 9x_4 &= 12 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

21. $$\begin{aligned} -2x_1 + \quad & \quad x_4 = 1 \\ 4x_2 - x_3 \quad & = -1 \\ x_1 + x_2 \quad & = -3 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + \quad & x_4 = 2 \\ 3x_1 + \quad 2x_3 - \quad & 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - \quad & x_4 = 1 \\ 5x_1 + \quad 3x_3 - \quad & x_4 = -3 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + \quad & x_4 = 2 \\ 3x_1 + \quad 2x_3 - \quad & 2x_4 = -8 \\ 4x_2 - x_3 - \quad & x_4 = 1 \\ 5x_1 + \quad 3x_3 - \quad & x_4 = 0 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 11 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$$

En los problemas 27 a 38 determine si la matriz dada se encuentra en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

27. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **29.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **32.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **33.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **34.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **36.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **37.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

En los problemas 39 a 46 utilice las operaciones elementales con renglones para reducir las matrices dadas a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

39. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ **41.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ **45.** $\begin{pmatrix} 3 & -6 & -3 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ **46.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 5 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

47. En el modelo de insumo-producto de Leontief del ejemplo 9 suponga que se tienen tres industrias. Más aún, suponga que $e_1 = 10, e_2 = 15, e_3 = 30, a_{11} = \frac{1}{3}, a_{12} = \frac{1}{2}, a_{13} = \frac{1}{6}, a_{21} = \frac{1}{4}, a_{22} = \frac{1}{4}, a_{23} = \frac{1}{8}, a_{31} = \frac{1}{12}, a_{32} = \frac{1}{3}, a_{33} = \frac{1}{6}$. Encuentre la producción de cada industria tal que la oferta sea igual a la demanda.

48. En el ejemplo 8 suponga que cada semana se suministran al lago 15 000 unidades del primer alimento, 10 000 del segundo y 35 000 del tercero. Considerando que todo alimento se consume, ¿qué población de las tres especies puede coexistir en el lago? ¿Existe una solución única?

49. Un viajero que acaba de regresar de Europa gastó $30 diarios en Inglaterra, $20 diarios en Francia y $20 diarios en España por concepto de hospedaje. En comida gastó $20 diarios en Inglaterra, $30 diarios en Francia y $20 diarios en España. Sus gastos adicionales fueron de $10 diarios en cada país. Los registros del viajero indican que gastó un total de $340 en hospedaje, $320 en comida y $140 en gastos adicionales durante su viaje por estos tres países. Calcule el número de días que pasó el viajero en cada país o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles una con la otra.

50. Una inversionista le afirma a su corredor de bolsa que todas sus acciones pertenecen a tres compañías: Delta Airlines, Hilton Hotels y McDonald's, y que hace dos días su valor bajó $350 pero que ayer aumentó $600. El corredor recuerda que hace dos días el precio de las acciones de Delta Airlines bajó $1 por cada una, mientras que las de Hilton Hotels bajaron $1.50, pero que el precio de las acciones de McDonald's subió $0.50. También recuerda que ayer el precio de las acciones de Delta subió $1.50 por acción, el de las de Hilton Hotels bajó otros $0.50 por acción y las de McDonald's subieron $1. Demuestre que el corredor no cuenta con la información suficiente para calcular el número de acciones que posee la inversionista en cada compañía, pero que si ella dice tener 200 acciones de McDonald's, el corredor pueda calcular el número de acciones que posee en Delta y en Hilton.

51. Un agente secreto sabe que 60 equipos aéreos, que consisten en aviones de combate y bombarderos, se encuentran estacionados en cierto campo aéreo secreto. El agente quiere determinar cuántos de los 60 equipos son aviones de combate y cuántos son bombarderos. Existe, además, un tipo de cohete que llevan ambos aviones; el de combate lleva 6 de ellos y el bombardero sólo 2. El agente averigua que se requieren 250 cohetes para armar a todos los aviones del campo aéreo. Aún más, escucha que se tiene el doble de aviones de combate que de bombarderos en la base (es decir, el número de aviones de combate menos dos veces el número de bombarderos es igual a cero). Calcule el número de aviones de combate y bombarderos presentes en el campo aéreo o muestre que la información del agente es incorrecta debido a su inconsistencia.

52. Una embotelladora de refrescos desea cotizar la publicidad de sus productos en televisión, radio y revista, se tienen tres propuestas del plan de medios de acuerdo con el presupuesto asignado acerca de la cantidad de anuncios por medio en el transcurso de un mes. En el primer presupuesto cada anuncio en televisión tiene un coste de $250 000, en radio $5 000 y en revista $30 000. En el segundo presupuesto $310 000, $4 000 y $15 000 y en el último presupuesto $560 000, $10 000 y $35 000. Los totales por presupuesto son los siguientes: $21 795 000, $31 767 000 y $61 225 000. Determine la cantidad de anuncios cotizados por cada medio.

53. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= a \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= b \\ -5x_1 - 5x_2 + 21x_3 &= c \end{aligned}$$

Muestre que es inconsistente si $c \neq 2a - 3b$.

54. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= a \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= b \\ 3x_1 - 7x_2 - 5x_3 &= c \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre a, b y c para que el sistema sea inconsistente.

***55.** Considere el sistema general de las tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Encuentre las condiciones sobre los coeficientes a_{ij} para que el sistema tenga una solución única.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d*) **II.** *a*) **III.** *c*) **IV.** *b*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

La calculadora HP50g puede resolver en forma numérica sistemas de m ecuaciones con n incógnitas. Cuando el sistema tiene infinitas soluciones, la solución reportada es la solución de norma mínima. Cuando el sistema es inconsistente la solución reportada es la solución de mínimos cuadrados.

Una posible secuencia de pasos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones se observa en el siguiente procedimiento (no es el único, en el capítulo 11 del manual del usuario se incluyen otros procedimientos).

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 14 \\ 3x - 2y + z &= -3 \\ 4x + 2y - z &= -4 \end{aligned}$$

1. Existen diferentes formas de introducir una matriz aumentada, la más sencilla es la siguiente:

```
[[2, 4, 6, 14], [3, -2, 1, -3], [4, 2, -1, -4]]
```

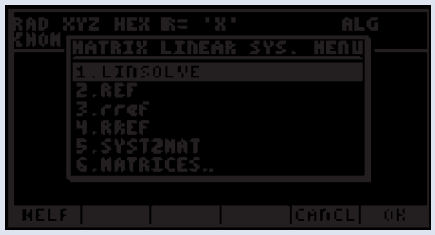
ENTER ENTER

Guardamos la matriz aumentada en la variable AAUG utilizando la siguente secuencia

' ALPHA ALPHA A A U G ENTER STO

2. Se encuentra la forma escalonada reducida por renglones de AAUG.

← MATRICES



seguido de las teclas [5] para seleccionar sistemas lineales y [4] para encontrar la forma escalonada reducida por renglones (RREF).
El resultado es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así, $x_1 = -1$, etcétera.

En los problemas 56 a 60 utilice una calculadora para resolver cada sistema.

56.
$$\begin{aligned} 2.6x_1 - 4.3x_2 + 9.6x_3 &= 21.62 \\ -8.5x_1 + 3.6x_2 + 9.1x_3 &= 14.23 \\ 12.3x_1 - 8.4x_2 - 0.6x_3 &= 12.61 \end{aligned}$$

57.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 3x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 &= 4 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

58.
$$\begin{aligned} 1.247x_1 - 2.583x_2 + 7.161x_3 + 8.275x_4 &= -1.205 \\ 3.472x_1 + 9.283x_2 + 11.275x_3 + 3.606x_4 &= 2.374 \\ -5.216x_1 - 12.816x_2 - 6.298x_3 + 1.877x_4 &= 21.206 \\ 6.812x_1 + 5.223x_2 + 9.725x_3 - 2.306x_4 &= -11.466 \end{aligned}$$

59.
$$\begin{aligned} 23.42x_1 - 16.89x_2 + 57.31x_3 + 82.6x_4 &= 2\,158.36 \\ -14.77x_1 - 38.29x_2 + 92.36x_3 - 4.36x_4 &= -1\,123.02 \\ -77.21x_1 + 71.26x_2 - 16.55x_3 + 43.09x_4 &= 3\,248.71 \\ 91.82x_1 + 81.43x_2 + 33.94x_3 + 57.22x_4 &= 235.25 \end{aligned}$$

60.
$$\begin{aligned} 6.1x_1 - 2.4x_2 + 23.3x_3 - 16.4x_4 - 8.9x_5 &= 121.7 \\ -14.2x_1 - 31.6x_2 - 5.8x_3 + 9.6x_4 + 23.1x_5 &= -87.7 \\ 10.5x_1 + 46.1x_2 - 19.6x_3 - 8.8x_4 - 41.2x_5 &= 10.8 \\ 37.3x_1 - 14.2x_2 + 62.0x_3 + 14.7x_4 - 9.6x_5 &= 61.3 \\ 0.8x_1 + 17.7x_2 - 47.5x_3 - 50.2x_4 + 29.8x_5 &= -27.8 \end{aligned}$$

Más ejercicios

En los problemas 61 a 65 calcule la forma escalonada por renglones (REF en lugar de RREF) para cada matriz aumentada.

61. La matriz del problema 57

62. La matriz del problema 56

63. La matriz del problema 59

64. La matriz del problema 58

65. La matriz del problema 60

En los problemas 66 a 71 encuentre todas las soluciones, si las hay, para cada sistema. Redondee todas las respuestas a tres lugares decimales. [*Sugerencia*: Primero obtenga la forma escalonada reducida por renglones de la matriz aumentada.]

66.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 12.9 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 9.8x_3 &= -1.6 \end{aligned}$$

67.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= -19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 34.3 \end{aligned}$$

68.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 19.5 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 46.4 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 35.3 \end{aligned}$$

69.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \end{aligned}$$

70.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= -63 \end{aligned}$$

71.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 105 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= -62 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 53 \\ -15x_1 + 42x_2 + 21x_3 - 17x_4 + 42x_5 &= 63 \end{aligned}$$

2.4 SISTEMAS HOMOGÉNEOS DE ECUACIONES

Un sistema general de $m \times n$ ecuaciones lineales se llama **homogéneo** si todas las constantes b_1, b_2, … b_m, son cero. Es decir, el sistema general homogéneo está dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Los sistemas homogéneos surgen de diferentes formas. Se estudiará un sistema homogéneo en la unidad 4. En dicha sección se resolverán algunos sistemas homogéneos, de nueva cuenta, mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.

Para dicho sistema lineal general existen tres posibilidades: que no tenga soluciones, que tenga una solución o que tenga un número infinito de soluciones. Para el sistema general homogéneo la situación es más sencilla.

Solución trivial o solución cero

Como $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ es siempre una solución (llamada **solución trivial** o **solución cero**), sólo se tienen dos posibilidades: la solución trivial es la única solución o existe un número infinito de soluciones además de ésta. Las soluciones distintas a la solución cero se llaman **soluciones no triviales**.

Soluciones no triviales

EJEMPLO 1 Sistema homogéneo que tiene únicamente la solución trivial

Resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Ésta es la versión homogénea del sistema del ejemplo 2.3.1. Al reducir en forma sucesiva, se obtiene (después de dividir la primera ecuación entre 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to R_1 + R_3 \atop R_2 \to R_2 - 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Así, el sistema tiene una solución única (0, 0, 0). Esto es, la única solución al sistema es la trivial.

EJEMPLO 2 Un sistema homogéneo con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución Al hacer uso de la eliminación de Gauss-Jordan se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -11 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{9}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -9 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 9R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ahora la matriz aumentada está en la forma escalonada reducida por renglones y, evidentemente, existe un número infinito de soluciones dadas por $(-1/9x_3, 5/9x_3, x_3)$. Si, por ejemplo, $x_3 = 0$, se obtiene la solución trivial. Si $x_3 = 1$ se obtiene la solución $(-1/9, 5/9, 1)$. Si $x_3 = 9\pi$ se obtiene la solución $(-\pi, 5\pi, 9\pi)$.

EJEMPLO 3 **Un sistema homogéneo con más incógnitas que ecuaciones tiene un número infinito de soluciones**

Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Solución Al reducir por renglones se obtiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 4 & -2 & 7 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -6 & 11 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{6}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{6} & | & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{6} & | & 0 \end{pmatrix}$$

Así, hay un número infinito de soluciones dadas por $(-5/6x_3, 11/6x_3, x_3)$. Esto puede no sorprender porque el sistema (2) contiene tres incógnitas y únicamente dos ecuaciones.

En términos generales, si hay más incógnitas que ecuaciones, el sistema homogéneo (1) siempre tendrá un número infinito de soluciones. Para ver esto observe que si sólo tuviera la solución trivial, la reducción por renglones conduciría al sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ x_n &= 0 \end{aligned}$$

y, posiblemente, algunas ecuaciones adicionales de la forma $0 = 0$. Pero este sistema tiene al menos tantas ecuaciones como incógnitas. Puesto que la reducción por renglones no cambia ni el número de ecuaciones ni el número de incógnitas, se tiene una contradicción en la suposición de que había más incógnitas que ecuaciones. Entonces se tiene el teorema 1.

TEOREMA 1

El sistema homogéneo (1) tiene un número infinito de soluciones si $n > m$.

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuáles de los siguientes sistemas *deben* tener soluciones no triviales?

a) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$

II. ¿Para qué valores de k tendrá soluciones no triviales el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 2x + 3y - 4z &= 0 \\ 3x + 4y + kz &= 0 \end{aligned}$$

***a*)** 1 ***b*)** 2 ***c*)** 3 ***d*)** 4 ***e*)** 5 ***f*)** 0

Desarrollo de competencias 2.4

En los problemas 1 a 17 encuentre todas las soluciones a los sistemas homogéneos.

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= 0 \\ -x_1 + 5x_2 &= 0 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 7x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 13x_2 - 10x_3 &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ 6x_1 - 5x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 0 \\ -8x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} -2x_1 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 0 \\ 7x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ 4x_1 - 12x_2 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= 0 \\ -7x_1 + 21x_2 &= 0 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

18. Muestre que el sistema homogéneo de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

19. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 11x_2 + kx_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Para qué valor de k tendrá soluciones no triviales?

***20.** Considere el sistema homogéneo de 3×3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Encuentre condiciones sobre los coeficientes a_{ij} tales que la solución trivial sea la única solución.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c)* II. *e)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Los sistemas homogéneos se pueden resolver con la calculadora HP50g al utilizar la forma escalonada reducida por renglones de la matriz de coeficientes (RREF).

En los problemas 21 al 24 encuentre todas las soluciones para cada sistema.

21.
$$\begin{aligned} 2.1x_1 + 4.2x_2 - 3.5x_3 &= 0 \\ -5.9x_1 + 2.7x_2 + 8.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} -13.6x_1 + 71.8x_2 + 46.3x_3 &= 0 \\ 41.3x_1 - 75.0x_2 - 82.9x_3 &= 0 \\ 41.8x_1 + 65.4x_2 - 26.9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} 25x_1 - 16x_2 + 13x_3 + 33x_4 - 57x_5 &= 0 \\ -16x_1 + 3x_2 + x_3 + 12x_5 &= 0 \\ -18x_2 + 16x_4 - 26x_5 &= 0 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 11x_3 - 16x_4 + 12x_5 &= 0 \\ -6x_1 + 8x_2 - 14x_3 - 9x_4 + 26x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 18x_2 - 12x_3 + 21x_4 - 2x_5 &= 0 \\ -x_1 + 11x_2 - 9x_3 + 13x_4 - 20x_5 &= 0 \end{aligned}$$

RESUMEN

- La **matriz de coeficientes** de un sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

  es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- El sistema lineal anterior se puede escribir utilizando la **matriz aumentada**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

  También se puede escribir como $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, donde

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- Una matriz está en la **forma escalonada reducida por renglones** si se cumplen las cuatro condiciones dadas en la definición 2.3.2
- Una matriz está en la **forma escalonada por renglones** si se cumplen las primeras tres condiciones de la definición 2.3.2
- Un **pivote** es el primer componente diferente de cero en el renglón de una matriz
- Las tres **operaciones elementales con renglones** son

  Multiplicar el renglón i de una matriz por c: $R_i \rightarrow cR_i$, donde $c \neq 0$.

Multiplicar el renglón i por c y sumarlo al renglón j: $R_j \rightarrow R_j + cR_i$.

Permutar los renglones i y j: $R_i \rightleftarrows R_j$.

- El proceso de aplicación de operaciones elementales con renglones a una matriz se denomina **reducción por renglones.**
- La **eliminación de Gauss-Jordan** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante la reducción por renglones de la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por renglones, usando el proceso descrito en la sección 2.3.
- La **eliminación de Gauss** es el proceso de resolución de un sistema de ecuaciones reduciendo por renglones la matriz aumentada a la forma escalonada por renglones y utilizando la **sustitución hacia atrás.**
- Un sistema lineal que tiene una o más soluciones se denomina **consistente.**
- Un sistema lineal que no tiene solución se denomina **inconsistente.**
- Un sistema lineal que tiene soluciones cuenta con, ya sea, una solución única o un número infinito de soluciones.
- Un sistema **homogéneo** de m ecuaciones con n incógnitas es un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

- Un sistema lineal homogéneo siempre tiene la **solución trivial** (o **solución cero**)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

- Las soluciones para un sistema lineal homogéneo diferentes de la trivial se denominan **soluciones no triviales.**
- El sistema lineal homogéneo anterior tiene un número infinito de soluciones si tiene más incógnitas que ecuaciones ($n > m$).

COMPETENCIAS FINALES. UNIDAD 2

De los ejercicios 1 a 18 encuentre las soluciones (si existen) a los sistemas dados:

1.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

3. $\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &= 5 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 15 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 5 \\ -x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 5x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 4 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -6x_1 - 13x_2 + x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 24x_2 - 2x_3 + 20x_4 &= 0 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

De los ejercicios 19 a 23 determine si la matriz dada está en la forma escalonada por renglones (pero no en la forma escalonada reducida por renglones), en la forma escalonada reducida por renglones o en ninguna de las dos.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 24 a 26 reduzca la matriz a la forma escalonada por renglones y a la forma escalonada reducida por renglones.

24. $\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Unidad

3

MATRICES Y DETERMINANTES

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Modelar y resolver diferentes problemas de aplicaciones de sistemas de ecuaciones lineales en el área de las matemáticas y de la ingeniería por los métodos de Gauss, Gauss-Jordan, matriz inversa y regla de Cramer.

3.1 VECTORES Y MATRICES

El estudio de vectores y matrices es la médula del álgebra lineal. El estudio de vectores comenzó esencialmente con el trabajo del gran matemático irlandés Sir William Hamilton (1805-1865)[†]. Su deseo de encontrar una forma de representar un cierto tipo de objetos en el plano y el espacio lo llevó a descubrir lo que él llamó los *cuaterniones*. Esta noción condujo al desarrollo de lo que ahora se conoce como *vectores*. A lo largo de toda su vida y del resto del siglo XIX hubo un debate considerable sobre la utilidad de los cuaterniones y de los vectores. Al final del siglo el gran físico inglés Lord Kelvin escribió que los cuaterniones, "aun cuando son bellamente ingeniosos, han sido un mal peculiar para todos aquellos que los han manejado de alguna manera y los vectores… nunca han sido de menor utilidad para ninguna criatura."

Pero Kelvin estaba equivocado. En la actualidad casi todas las ramas de la física clásica y moderna se representan mediante el lenguaje de vectores. Los vectores también se usan, cada vez más, en las ciencias biológicas y sociales.[‡]

Anteriormente se describió la solución, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas como un par de números (x, y). En el ejemplo 2.3.1 se escribió la solución a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas como la terna de números $(4, -2, 3)$. Tanto (x, y) como $(4, -2, 3)$ son **vectores**.

[†] Vea la semblanza bibliográfica de Hamilton.

[‡] Un análisis interesante sobre el desarrollo del análisis vectorial moderno se puede consultar en el libro de M.J. Crowe, *A History of Vector Analisis* (Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1967) o en el excelente libro de Morris Kilne, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 32).

DEFINICIÓN 1 **Vector renglón de *n* componentes**

Un vector de n componentes se define como un conjunto **ordenado** de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

DEFINICIÓN 2 **Vector columna de *n* componentes**

Un **vector columna de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

COMPONENTES DE UN VECTOR

En (1) o (2), x_1 se denomina la **primera componente** del vector, x_2 es la **segunda componente**, y así sucesivamente. En términos generales, x_k se denomina la ***k*-ésima componente** del vector.

VECTOR CERO

Con el objeto de simplificar, con frecuencia se hará referencia a un vector renglón de n componentes como un **vector renglón** o un ***n*-vector**. Del mismo modo, se usará el término **vector columna** (o n-vector) para denotar a un vector columna de n componentes. Cualquier vector cuyos elementos sean todos cero se denomina un **vector cero**.

EJEMPLO 1 **Cuatro vectores**

Los siguientes son vectores:

i) (3, 6) es un vector renglón (o un 2-vector)

ii) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ es un vector columna (o un 3-vector)

iii) (2, −1, 0, 4)) es un vector renglón (o un 4-vector)

iv) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector columna y un vector cero.

ADVERTENCIA La palabra "ordenado" contenida en la definición de un vector es de fundamental importancia. Dos vectores con las mismas componentes escritas en diferente orden *no* son iguales. De esta forma, por ejemplo, los vectores renglón (1, 2) y (2, 1) no son iguales.

A lo largo del libro se resaltarán los vectores con letras minúsculas negritas como **u**, **v**, **a**, **b**, **c**, y así sucesivamente. Un vector cero se denota por **0**. Más aún, como en términos generales resultará obvio cuando se trate de un vector renglón o de un vector columna, se hará referencia a ellos simplemente como "vectores".

Los vectores surgen de diversas maneras. Suponga que el jefe de compras de una fábrica debe ordenar cantidades diferentes de acero, aluminio, aceite y papel. Él puede mantener el control de las unidades a ordenar con un solo vector. El vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ indica que ordenará 10 unidades de acero, 30 unidades de aluminio, etcétera.

Observación. Se puede observar aquí por qué el orden en que se escriben las componentes de un vector es sumamente importante. Es evidente que los vectores $\begin{pmatrix} 30 \\ 15 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ tienen significados muy distintos para el comprador.

En seguida se describirán algunas propiedades de los vectores. Puesto que sería repetitivo hacerlo primero para los vectores renglón y después para los vectores columna, se presentarán todas las definiciones en términos de vectores columna. Los vectores renglón tienen definiciones similares.

Las componentes de todos los vectores en este texto son números reales o complejos.[†] Se denota al conjunto de todos los números reales por símbolo $\mathbb{R}$ y al conjunto de números complejos por símbolo $\mathbb{C}$.

$\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$

El espacio símbolo $\mathbb{R}^n$

Se usa el símbolo $\mathbb{R}^n$ para denotar al conjunto de todos los *n*-vectores

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \text{ donde cada } a_i \text{ es un número real.}$$

$\mathbb{C}^n$ De manera similar, se usa el símbolo $\mathbb{C}^n$ para denotar al conjunto de todos los *n*-vectores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, donde cada c_i es un número complejo.

[†] Un número complejo es un número de la forma $a + ib$, en donde a y b son números reales e $i = \sqrt{-1}$. En la unidad 1 se dio una descripción de los números complejos. No se habla de vectores complejos otra vez hasta la unidad 4; serán útiles en especial en el apéndice A. Por lo tanto, a menos que se establezca de otra manera, por el momento se supondrá que todos los vectores tienen componentes reales.

En términos reales los vectores son tipos especiales de matrices. Por lo tanto, en lugar de estudiar las propiedades de los vectores se analizarán las propiedades de las matrices.

DEFINICIÓN 3 **Matriz**

Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

RENGLONES Y COLUMNAS DE UNA MATRIZ

El símbolo $m \times n$ se lee "m por n". A menos que se establezca lo contrario, se supondrá siempre que los números en una matriz o vector son reales. El vector renglón $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots a_{in})$ se llama **renglón *i*** y el vector columna $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ se llama **columna *j***. La **componente o elemento *ij*** de A, denotado por a_{ij}, es el número que aparece en el renglón i y la columnas j de A. En ocasiones se escribirá la matriz A como $A = (a_{ij})$. Por lo general, las matrices se denotarán con letras mayúsculas.

COMPONENTE O ELEMENTO

MATRIZ CUADRADA

Si A es una matriz $m \times n$ con $m = n$, entonces A se llama **matriz cuadrada**. Una matriz $m \times n$ con todos los elementos iguales a cero se denomina **matriz cero** de $m \times n$.

MATRIZ CERO

TAMAÑO DE UNA MATRIZ

Se dice que una matriz $m \times n$ tiene **tamaño** $m \times n$.

Nota histórica. El matemático inglés James Joseph Silvester (1814-1897) fue el primero que utilizó el término "matriz" en 1850, para distinguir las matrices de los determinantes (que se estudiarán más adelante). La idea era que el término "matriz" tuviera el significado de "madre de los determinantes".

EJEMPLO 2 **Cinco matrices**

En seguida se presentan cinco matrices de diferentes tamaños:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×2 (cuadrada).

ii) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×2.

iii) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz de 2×3.

iv) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz de 3×3 (cuadrada).

v) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz cero de 2×4.

Notación con paréntesis cuadrados. En algunos libros las matrices se presentan dentro de paréntesis cuadrados en lugar de paréntesis redondos. Por ejemplo, las primeras dos matrices del ejemplo 2 se pueden escribir como

i) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **ii)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

En este texto se utilizarán exclusivamente paréntesis redondos.

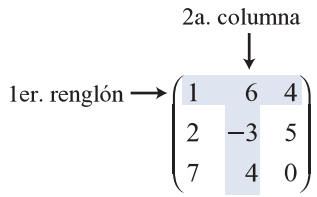
A través del libro se hace referencia al renglón i, la columna j y la componente ij de una matriz para diferentes valores de i y j. Estas ideas se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 **Localización de las componentes de una matriz**

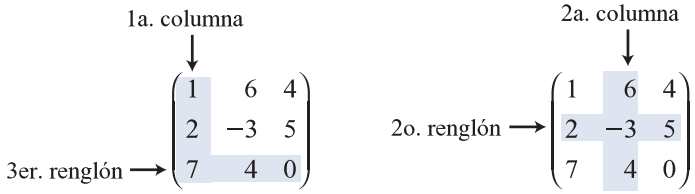
Encuentre las componentes (1, 2), (3, 1) y (2, 2) de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución La componente (1, 2) es el número que se encuentra en el primer renglón y la segunda columna, que se han sombreado; la componente (1, 2) es 6:



En las siguientes matrices sombreadas se puede ver que la componente (3, 1) es 7 y la componente (2, 2) es -3:



DEFINICIÓN 4 **Igualdad de matrices**

Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si (1) son del mismo tamaño y (2) las componentes correspondientes son iguales.

EJEMPLO 4 **Matrices iguales y matrices distintas**

¿Son iguales las siguientes matrices?

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1+3 & 1 & 2+3 \\ 1+1 & 1-4 & 6-6 \end{pmatrix}$

ii) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solución

i) Sí; ambas matrices son de 2×3 y $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$, $1 - 4 = -3$ y $6 - 6 = 0$.

ii) No; $-2 \neq 0$, por lo que las matrices son distintas ya que, por ejemplo, las componentes (1, 1) son diferentes. Esto es cierto aun cuando las dos matrices contienen los mismos números. Las componentes *correspondientes* deben ser iguales. Esto significa que la componente (1, 1) en A debe ser igual a la componente (1, 1) en B, etcétera.

iii) No; la primera matriz es de 2×2 y la segunda es de 2×3, de manera que no tienen el mismo tamaño.

Los vectores son matrices de un renglón o de una columna

Cada vector es un tipo especial de matriz. Así, por ejemplo, el vector renglón de n componentes $(a_1, a_2, \ldots c_n)$ es una matriz de $1 \times n$, mientras que el vector columna de n componentes $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ es una matriz de $n \times 1$.

Las matrices, al igual que los vectores, surgen en un gran número de situaciones prácticas. Por ejemplo, anteriormente se analizó la manera en que el vector $\begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 15 \\ 60 \end{pmatrix}$ puede representar las cantidades ordenadas de cuatro productos distintos utilizados por un fabricante. Suponga que se

tienen cinco plantas diferentes, entonces la matriz de 4×5 podría representar las órdenes de los cuatro productos en cada una de las cinco plantas.

$$Q = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 15 & 16 & 25 \\ 30 & 10 & 20 & 25 & 22 \\ 15 & 22 & 18 & 20 & 13 \\ 60 & 40 & 50 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Se puede apreciar, a manera de ejemplo, que la planta 4 ordena 25 unidades del segundo producto mientras que la planta 2 ordena 40 unidades del cuarto producto.

Las matrices se pueden sumar y multiplicar por números reales.

DEFINICIÓN 5 **Suma de matrices**

Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices $m \times n$. Entonces la suma de A y B es la matriz $m \times n$, $A + B$ dada por

$$A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Es decir, $A + B$ es la matriz $m \times n$ que se obtiene al sumar las componentes correspondientes de A y B.

ADVERTENCIA

La suma de dos matrices se define únicamente cuando las matrices son del mismo tamaño. Así, por ejemplo, no es posible sumar las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ o las matrices (vectores) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es decir, son incompatibles bajo la suma.

EJEMPLO 5 **Suma de dos matrices**

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & -5 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 6 & 6 & 4 \\ -6 & 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

ESCALARES

Al manejar vectores se hace referencia a los números como **escalares** (que pueden ser reales o complejos dependiendo de si los vectores en cuestión son reales o complejos).

Nota histórica. El término "escalar" encuentra su origen con Hamilton. Su definición de cuaternión incluía lo que él definió una "parte real" y una "parte imaginaria". En su artículo "On Quartenions, or on a New System of Imagineries in Algebra", en *Philosophical Magazine*, 3a. serie, 25(1844):26-

27, escribió: "La parte real algebraicamente puede tomar . . . todos los valores contenidos en la *escala* de la progresión de números desde el infinito negativo al infinito positivo; la llamaremos, entonces, la *parte escalar* o simplemente el *escalar* del cuaternión…" En el mismo artículo Hamilton definió la parte imaginaria de su cuaternión como la parte *vectorial*. Aunque éste no fue el primer uso que se dio a la palabra "vector", sí fue la primera vez que se usó en el contexto de las definiciones contenidas en esta sección. Es importante mencionar que el artículo del que se tomó la cita anterior marca el inicio del análisis vectorial moderno.

DEFINICIÓN 6 **Multiplicación de una matriz por un escalar**

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz de $m \times n$ y si α es un escalar, entonces la matriz $m \times n$, αA, está dada por

$$\alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Esto es $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ es la matriz obtenida al multiplicar cada componente de A por α. Si $\alpha A = B = (b_{ij})$, entonces $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

EJEMPLO 6 **Múltiplos escalares de matrices**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 12 \\ -4 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

$-\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}$ y $0A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

EJEMPLO 7 **Suma de múltiplos escalares de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule $2a - 3b$.

Solución $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$

El teorema que se presenta a continuación proporciona los hechos básicos sobre la suma de matrices y la multiplicación por escalares. Se demuestra la parte *iii*) y se deja el resto de la prueba como ejercicio para el lector (vea los problemas 41 a 43).

TEOREMA 1

Sean A, B y C tres matrices de $m \times n$ y sean α y β dos escalares. Entonces:

i) $A + 0 = A$
ii) $0A = 0$
iii) $A + B = B + A$ **(ley conmutativa para la suma de matrices)**
iv) $(A + B) + C = A + (B + C)$ **(ley asociativa para la suma de matrices)**
v) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ **(ley distributiva para la multiplicación por un escalar)**
vi) $1A = A$
vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

Nota. El cero en la parte *i*) del teorema es la matriz cero de $m \times n$. En la parte *ii*) el cero a la izquierda es un escalar mientras que el cero a la derecha es la matriz cero de $m \times n$.

Demostración de iii.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$

Por ende

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$a + b = b + a$ para cualesquiera dos números reales a y b

$$= \begin{pmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{pmatrix} = B + A$$

EJEMPLO 8 **Ilustración de la ley asociativa para la suma de matrices**

Para ilustrar la ley asociativa se observa que

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

De igual manera

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

El ejemplo 7 ilustra la importancia de la ley asociativa de la suma de vectores ya que si se desea sumar tres matrices o más, únicamente se podrá hacerlo sumándolas de dos en dos. La ley asociativa indica que esto se puede llevar a cabo de dos maneras diferentes obteniendo el mismo resultado. Si no fuera así, sería más difícil definir la suma de tres o más matrices ya que tendría que especificarse si se quiere definir la suma de $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$.

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuál de las siguientes aseveraciones es cierta para la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) Es una matriz cuadrada.

b) Si se multiplica por el escalar -1, el producto es $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Es una matriz de 3×2.

d) Es la suma de $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

II. ¿Cuál de los incisos es $2A - 4B$ si $A = (2\ \ 0\ \ 0)$ y $B = (3\ \ 1)$?

a) $(-8\ \ -4)$

b) $(5\ 0\ 1)$

c) $(16\ \ -4\ 0)$

d) Esta operación no se puede realizar.

III. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta cuando se encuentra a diferencias (restas) de dos matrices?

a) Las matrices deben ser del mismo tamaño.

b) Las matrices deben ser cuadradas.

c) Las matrices deben ser ambas vectores renglón o vectores columna.

d) Una matriz debe ser un vector renglón y la otra un vector columna.

IV. ¿Cuáles serían los elementos de la segunda columna de la matriz B si

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

a) $-2, -8, 1$ ***b)*** $4, -8$

c) $2, 8, -1$ ***d)*** $-4, 8$

V. ¿Cuál de las siguientes debe ser el segundo renglón de la matriz B si $3A - B = 2C$ para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

SEMBLANZA DE...

Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865

Sir William Rowan Hamilton
(The Granger collection)

Sir William Rowan Hamilton nació en Dublín en 1805, en donde pasó la mayor parte de su vida, y fue sin duda el más grande matemático irlandés. El padre (un abogado) y la madre de Hamilton murieron cuando era apenas un niño. Su tío, un lingüista, se hizo cargo de su educación. A la edad de cinco años, Hamilton podía leer inglés, hebreo, latín y griego. Cuando cumplió los 13 dominaba, además de los idiomas del continente europeo, sánscrito, chino, persa, árabe, malasio, hindú, bengalí y varios otros. Hamilton disfrutaba escribir poesía, tanto en su infancia como en la vida adulta, y entre sus amigos se contaban los grandes poetas ingleses Samuel Taylor Coleridge y William Wordsworth. Sin embargo, la poesía de Hamilton se consideraba tan mala que resultó una bendición que desarrollara otros intereses, especialmente aquellos relacionados con las matemáticas.

Aunque disfrutó las matemáticas desde niño, el interés de Hamilton creció de manera importante después de un encuentro casual a la edad de 15 años con Zerah Colburn, el americano que calculó las descargas eléctricas de los rayos. Poco después, Hamilton comenzó a leer los libros importantes de matemáticas de su tiempo. En 1823, a los 18 años, descubrió un error en la *Mécanique céleste* de Simon Laplace y escribió un artículo impresionante sobre el tema. Un año más tarde entró al Trinity College en Dublín.

La carrera universitaria de Hamilton fue sobresaliente. A los 21 años, siendo todavía estudiante de licenciatura, había impresionado a tal grado a sus maestros que fue nombrado Astrónomo Real de Irlanda y profesor de Astronomía en la universidad. Poco después escribió lo que ahora se considera un trabajo clásico en óptica. Haciendo uso únicamente de la teoría matemática, predijo la refracción cónica en cierto tipo de cristales. Más tarde los físicos confirmaron esta teoría. En parte debido a este trabajo, Hamilton fue armado caballero en 1835.

El primer artículo puramente matemático de Hamilton apareció en 1833. En él describió una manera algebraica de manipular pares de números reales. Este trabajo sienta las reglas que se usan hoy en día para sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos. No obstante, en un principio, Hamilton no pudo desarrollar una multiplicación para ternas o n-eadas ordenadas de números para $n > 2$. Durante 10 años estudió este problema, y se dice que lo resolvió en un rato de inspiración mientras caminaba por el Puente de Brougham en Dublín en 1843. La clave era descartar la conocida propiedad conmutativa de la multiplicación. Los nuevos objetos que creó se llamaron cuaterniones, que fueron los precursores de lo que ahora se conoce como vectores. En la actualidad, una placa incrustada en el puente cuenta la historia.

Aquí, mientras caminaba
el 16 de octubre de 1843,
Sir William Rowan Hamilton
descubrió, en un instante de
genialidad, la fórmula fundamental
para la multiplicación de cuaterniones
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
y la grabó en una piedra de este puente.

Durante el resto de su vida, Hamilton pasó la mayor parte del tiempo desarrollando el álgebra de cuaterniones. Él suponía que tendrían un significado revolucionario en la física matemática. Su trabajo monumental sobre este tema, *Treatise on Quaternions*, fue publicado en 1853. Más tarde trabajó en una extensión del tema, *Elements of quaternions*. Aunque Hamilton murió en 1865 antes de terminar esta obra, su hijo publicó el trabajo en 1866.

Los estudiantes de matemáticas y física conocen a Hamilton dentro de muchos otros contextos. En física matemática, por ejemplo, se encuentra la función hamiltoniana que con frecuencia representa la energía total de un sistema, y las ecuaciones diferenciales de dinámica de Hamilton-Jacobi. En la teoría de matrices, el teorema de Hamilton-Cayley establece que toda matriz satisface su propia ecuación característica. Esto se estudiará en el capítulo 6.

A pesar del gran trabajo desarrollado, los últimos años de Hamilton fueron un tormento. Su esposa estaba semiinválida y él fue atacado por el alcoholismo. Es gratificante, por lo tanto, señalar que durante esos últimos años la recién formada American Nacional Academy of Sciences eligió a Sir William Rowan Hamilton como su primer miembro extranjero.

a) $-3, 2, 6$ *b)* $0, -2, 9$

c) $3, -2, 6$ *d)* $0, 2, -9$

Desarrollo de competencias 3.1

En los problemas 1 a 13 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **2.** $3\mathbf{b}$ **3.** $5\mathbf{a}$

4. $-2\mathbf{c}$ **5.** $\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ **6.** $2\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$

7. $-3\mathbf{b} + 2\mathbf{c}$ **8.** $-5\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ **9.** $0\mathbf{c}$

10. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ **11.** $2\mathbf{a} + 4\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ **12.** $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

13. $3\mathbf{b} - 7\mathbf{c} + 2\mathbf{a}$

En los problemas 14 a 26 realice los cálculos indicados con $\mathbf{a} = (3, -1, 4, 2)$, $\mathbf{b} = (6, 0, -1, 4)$ y $\mathbf{c} = (-1, 3, 1, 5)$.

14. $\mathbf{a} + \mathbf{c}$ **15.** $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **16.** $\mathbf{c} - \mathbf{a}$

17. $4\mathbf{c}$ **18.** $-2\mathbf{b}$ **19.** $7\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

20. $2\mathbf{a} - \mathbf{c}$ **21.** $4\mathbf{b} - 7\mathbf{a}$ **22.** $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$

23. $\mathbf{c} - \mathbf{b} + 2\mathbf{a}$ **24.** $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} - 4\mathbf{c}$ **25.** $3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

26. $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$

En los problemas 27 a 44 realice las operaciones indicadas con $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

27. $3A$ **28.** $A + B$ **29.** $C - A$

30. $A - C$ **31.** $2C - 5A$ **32.** $0B$ (0 es el cero escalar)

33. $-7A + 3B$ **34.** $6B - 7A + 0C$ **35.** $A + B + C$

36. $C - A - B$ **37.** $B - A - 2C$ **38.** $2A - 3B + 4C$

39. $7C - B + 2A$

40. Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ es la matriz cero de 3×2.

41. Encuentre la matriz E tal que $A + 2B - 3C + E$ es la matriz cero de 3×2.

42. Encuentre una matriz D tal que $2A + B - D$ sea la matriz cero de 3×2.

43. Encuentre una matriz E tal que $A + 2B + 3E$ sea la matriz de 3×2 cuyos elementos todos son uno.

44. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, resuelva la siguiente ecuación para X:

$3(2A + B + X) = 5(X - A + B)$

En los problemas 45 a 54 realice los cálculos indicados con $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

45. $A - 2B$ **46.** $3A - C$ **47.** $3B - 2A$

48. $A + B + C$ **49.** $2A - B + 2C$ **50.** $3A + 2B - 4C$

51. $C - A - B$ **52.** $4C - 2B + 3A$

53. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ es la matriz cero de 3×3.

54. Encuentre una matriz E tal que $3C - 2B + 8A - 4E$ es la matriz cero de 3×3.

55. Encuentre una matriz D tal que $A + B + C + D$ sea la matriz de 3×3 cuyos elementos todos son uno.

56. Encuentre una matriz E tal que $A + 2B + E - 3C$ sea la matriz de 3×3 cuyos elementos todos son uno.

57. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcular $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$

58. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ y sea $\overline{0}$ la matriz cero de $m \times n$. Utilice las definiciones 5 y 6 para demostrar que $0A = \overline{0}$ y que $\overline{0} + A = A$. De igual manera, muestre que $1A = A$.

59. Si $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ son tres matrices de $m \times n$, calcule $(A + B) + C$ y $A + (B + C)$ y muestre que son iguales.

60. Si α y β son escalares y A y B son matrices de $m \times n$, calcule $\alpha(A + B)$ y $\alpha A + \alpha B$ y muestre que son iguales. Calcule además $(\alpha + \beta)A$ y $\alpha A + \beta A$ y muestre que son iguales.

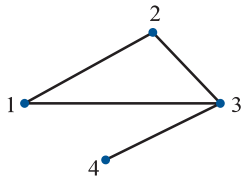


Figura 3.1

61. Considere la "gráfica" que une los cuatro puntos de la figura 3.1. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por una línea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j.

62. Haga lo mismo (construyendo una matriz de 5×5) para la gráfica de la figura 3.2.

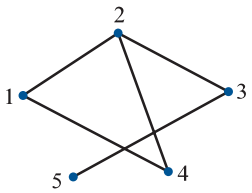


Figura 3.2

63. En la fabricación de cierto producto se necesitan cuatro materias primas. El vector $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$ representa una demanda dada de la fábrica para cada una de las cuatro materias primas para producir una unidad del producto. Si $\mathbf{d}$ es el vector demanda de la fábrica 1 y $\mathbf{e}$ es el vector demanda de la fábrica 2, ¿qué representan los vectores $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ y $2\mathbf{d}$?

Respuestas a la autoevaluación

I. *b*) II. *d*) III. *a*) IV. *b*) V. *b*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

Suma y multiplicación por un escalar en la HP50g

La manera más sencilla de sumar dos matrices del mismo tamaño es introducir primero cada matriz y dar a cada una un nombre (como *A22* y *B22*).

(2, 2) ENTER RANM ´ 22 ´ STO▸ (2, 2) ENTER RANM ´ B22 ´ STO▸

La función RANM produce una matriz de dimensión {n,m} con elementos aleatorios. Después, para obtener $A22 + B22$ o $A22 - B22$ se oprime

A22 ENTER B22 ENTER + A22 ENTER B22 ENTER −

Para obtener $\alpha A22$, primero gurdamos el valor de alpha utilizando la siguiente secuencia

. 2 5 +/− ENTER ' ALPHA ↱ A ENTER

La multiplicación se obtiene utilizando la siguiente secuencia

ALPHA ↱ A ENTER A22 ENTER ×

3.2 PRODUCTOS VECTORIAL Y MATRICIAL

En esta sección se analizará la forma en la cual se pueden multiplicar dos matrices. Es obvio que se puede definir el producto de dos matrices de $m \times n$, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ como la matriz $m \times n$ cuya componente ij es $a_{ij}b_{ij}$. Sin embargo, para casi todas las aplicaciones importantes que usan matrices, se requiere de otro tipo de producto. Explicaremos las razones de esto.

EJEMPLO 1 Producto de un vector de demanda y un vector de precios

Suponga que un fabricante produce cuatro artículos. Su demanda está dada por el **vector de demanda** $\mathbf{d} = (30 \quad 20 \quad 40 \quad 10)$ (una matriz de 1×4). El precio por unidad que recibe el fabricante por los artículos está dado por el **vector de precios** $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \$20 \\ \$15 \\ \$18 \\ \$40 \end{pmatrix}$ (una matriz de 4×1). Si se cumple la demanda, ¿cuánto dinero recibirá el fabricante?

Solución La demanda del primer artículo es 30, y el fabricante recibe \$20 por cada artículo vendido. Por consiguiente recibe (30)(20) = \$600 de las ventas del primer artículo. Si se sigue este razonamiento, se ve que la cantidad total de dinero que recibe es

$$(30)(20) + (20)(15) + (40)(18) + (10)(40) = 600 + 300 + 720 + 400 = \$2\,020$$

Este resultado se escribe como

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{pmatrix} = 2\,020$$

Es decir, se multiplicó un vector renglón de 4 componentes y un vector columna de 4 componentes para obtener un escalar (un número real).

En el último ejemplo se multiplicó un vector renglón por un vector columna y se obtuvo un escalar. En términos generales se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1 **Producto escalar**

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores. Entonces el **producto escalar** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ denotado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, está dado por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \qquad (1)$$

Debido a la notación en (1), el producto escalar se llama con frecuencia **producto punto** o **producto interno** de los vectores. Observe que el producto escalar de dos n-vectores es un escalar (es decir, es un número).

ADVERTENCIA Al tomar el producto escalar de a y b es necesario que a y b tengan el mismo número de componentes.

A menudo se tomará el producto escalar de un vector renglón y un vector columna. En este caso se tiene

Producto escalar

vector renglón $1 \times n$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \qquad (2)$$

Éste es un número real (un escalar)

vector columna $n \times 1$

EJEMPLO 2 **Producto escalar de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(3) + (-2)(-2) + (3)(4) = 3 + 4 + 12 = 19.$

EJEMPLO 3 **Producto escalar de dos vectores**

Sea $\mathbf{a} = (2, -3, 4, -6)$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Solución Aquí $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(1) + (-3)(2) + (4)(0) + (-6)(3) = 2 - 6 + 0 - 18 = -22.$

El teorema se presenta a continuación y se deduce directamente de la definición del producto escalar. Se demuestra la parte *ii*) y se deja el resto como ejercicio.

TEOREMA 1 Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ tres n-vectores y sean α y β dos escalares. Entonces

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0$

ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ **(ley conmutativa del producto escalar)**

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ **(ley distributiva del producto escalar)**

iv) $(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

Prueba de ii) Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Entonces

$ab = ba$ para cualesquiera dos números a y b

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

Observe que *no* existe una ley asociativa para el producto escalar. La expresión $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ no tiene sentido porque ninguno de los dos lados de la ecuación está definido. Para el lado izquierdo, esto se concluye a partir de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ es un escalar y el producto escalar del escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y el vector $\mathbf{c}$ no está definido.

Ahora se define el producto de dos matrices.

DEFINICIÓN 2 **Producto de dos matrices**

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$, y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times p$. Entonces el **producto** de A y B es una matriz $m \times p$, $C = (c_{ij})$, en donde

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B) \tag{3}$$

Es decir, el elemento ij de AB es el producto punto del renglón i de A y la columna j de B. Si esto se extiende, se obtiene

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \tag{4}$$

Si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B, entonces se dice que A y B son **compatibles bajo la multiplicación**.

ADVERTENCIA

Dos matrices se pueden multiplicar únicamente si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda. De otro modo, los vectores que forman el renglón i en A y la columna j de B no tendrán el mismo número de componentes y el producto punto en la ecuación (3) no estará definido. Dicho de otro modo, las matrices A y B serán **incompatibles** bajo la multiplicación. Para ilustrar esto se consideran las siguientes matrices de A y B:

columna j de B

renglón i de A →

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Los vectores renglón y columna sombreados deben tener el mismo número de componentes.

EJEMPLO 4 **Producto de dos matrices de 2 × 2**

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, calcule AB y BA.

Solución A es una matriz de 2×2 y B es una matriz de 2×2, entonces $C = AB = (2 \times 2) \times (2 \times 2)$ también es una matriz de 2×2. Si $C = (c_{ij})$, ¿cuál es el valor de c_{11}? Se sabe que

$$c_{11} = (\text{1er. renglón de } A) \cdot (\text{1a. columna de } B)$$

Reescribiendo las matrices se tiene

$$\text{1er. renglón de } A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(1a. columna de } B\text{)}$$

Así,

$$c_{11} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 + 15 = 18$$

De manera similar, para calcular c_{12} se tiene

$$\text{1er. renglón de } A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{(2a. columna de } B\text{)}$$

y

$$c_{12} = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = -2 + 18 = 16$$

Siguiendo el procedimiento se encuentra que

$$c_{21} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 20 = 14$$

y

$$c_{22} = (-2 \quad 4)\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 + 24 = 28$$

Entonces

$$C = AB = \begin{pmatrix} 18 & 16 \\ 14 & 28 \end{pmatrix}$$

De manera similar, sin escribir los pasos intermedios, se ve que

$$C' = BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 9-8 \\ 5-12 & 15+24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -7 & 39 \end{pmatrix}$$

Observación. El ejemplo 4 ilustra un hecho sumamente importante: *en términos generales, el producto de matrices no es conmutativo.* Es decir, $AB \neq BA$. En ocasiones ocurre que $AB = BA$, pero se trata de una excepción, no de una regla. Si $AB = BA$ se dice que A y B **conmutan**. De hecho, como lo ilustra el siguiente ejemplo, puede ocurrir que AB esté definida y BA no lo esté. Así, debe tenerse cuidado en el *orden* de la multiplicación de dos matrices.

EJEMPLO 5 **El producto de una matriz de 2 × 3 y una de 3 × 4 está definido pero el producto de una matriz 3 × 4 y una de 2 × 3 no lo está**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule AB.

Solución Primero observe que A es una matriz de 2×3 y B es una matriz de 3×4. Por lo que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Por lo tanto, el producto AB está definido y es una matriz de 2×4. Sea $AB = C = (c_{ij})$. Entonces

$$c_{11} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 23 \qquad c_{12} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = -5$$

$$c_{13} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \qquad c_{14} = (2 \quad 0 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$$

$$c_{21} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 15 \qquad c_{22} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$c_{23} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 26 \qquad c_{24} = (4 \quad 1 \quad 5) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = 39$$

Así, $AB = \begin{pmatrix} 23 & -5 & 2 & 5 \\ 15 & 6 & 26 & 39 \end{pmatrix}$. Esto completa el problema. Observe que el producto BA no está definido ya que el número de columnas de B (cuatro) no es igual al número de renglones de A (dos).

EJEMPLO 6 Contacto directo e indirecto con una enfermedad contagiosa

En el siguiente ejemplo se muestra la forma en la cual se puede usar la multiplicación de matrices para modelar la manera en que se extiende una enfermedad contagiosa. Suponga que cuatro individuos han contraído esta enfermedad. Este grupo entra en contacto con seis personas de un segundo grupo. Estos contactos, llamados *contactos directos*, se pueden representar por una matriz de 4×6. En seguida se da un ejemplo de este tipo de matrices.

Matriz de contacto directo: primero y segundo grupos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso se hace $a_{ij} = 1$ si la i-ésima persona del primer grupo entra en contacto con la j-ésima persona del segundo grupo. Por ejemplo, el 1 en la posición (2,4) significa que la segunda persona del primer grupo (infectada) entró en contacto con la cuarta persona del segundo grupo. Ahora suponga que un tercer grupo de cinco personas tiene varios contactos directos con individuos del segundo grupo. Esto también se puede representar mediante una matriz.

Matriz de contacto directo: segundo grupo y tercer grupo

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que $b_{64} = 0$, lo que quiere decir que la sexta persona del segundo grupo no tiene contacto con la cuarta persona del tercer grupo.

Los contactos *indirectos* o *de segundo orden* entre individuos del primero y tercer grupos se representan mediante la matriz de 4×5 $C = AB$. Para ver esto, observe que una persona del grupo 3 puede quedar contagiada por alguien del grupo 2, quien a su vez fue contagiada por alguien del grupo 1. Por ejemplo, como $a_{24} = 1$ y $b_{45} = 1$ se ve que, indirectamente, la quinta persona del grupo 3 tuvo contacto (a través de la cuarta persona del grupo 2) con la segunda persona del grupo 1. El número total de contactos indirectos entre la segunda persona del grupo 1 y la quinta persona del grupo 3 está dado por

$$\begin{aligned} c_{25} &= a_{21}b_{15} + a_{22}b_{25} + a_{23}b_{35} + a_{24}b_{45} + a_{25}b_{55} + a_{26}b_{65} \\ &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

Ahora se calcula.

Matriz de contacto indirecto: primero y tercer grupos

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observe que únicamente la segunda persona del grupo 3 no tiene contactos indirectos con la enfermedad. La quinta persona de este grupo tiene 2+1+1=4 contactos indirectos.

Se ha visto que las matrices, en general, no conmutan. El siguiente teorema muestra que la ley asociativa sí se cumple.

TEOREMA 2 **Ley asociativa para la multiplicación de matrices**

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times m$, $B = (b_{ij})$ una matriz de $m \times p$ y $C = (c_{ij})$ una matriz de $p \times q$. Entonces la **ley asociativa**

$$A(BC) = (AB)C \qquad (5)$$

se cumple y ABC, definida por cualesquiera de los lados de la ecuación (5), es una matriz de $n \times q$.

La prueba de este teorema no es difícil, pero es laboriosa. Se desarrolla mejor usando la notación de sumatoria. Por esta razón se pospone hasta el final de esta sección.

De aquí en adelante se escribirá el producto de tres matrices simplemente como ABC. Se puede hacer esto porque $(AB)C = A(BC)$; entonces se obtiene la misma respuesta independientemente de cómo se lleve a cabo la multiplicación (siempre y cuando no se conmute ninguna de las matrices).

La ley asociativa se puede extender a productos de más matrices. Por ejemplo, suponga que AB, BC y CD están definidas. Entonces

$$ABCD = A(B(CD)) = ((AB)C)D = A(BC)D = (AB)(CD) \tag{6}$$

Existen dos leyes distributivas para la multiplicación de matrices.

TEOREMA 3 **Leyes distributivas para la multiplicación de matrices**

Si todas las sumas y todos los productos siguientes están definidos, entonces

$$A(B + C) = AB + AC \tag{7}$$

y

$$(A + B)C = AC + BC \tag{8}$$

Las demostraciones se presentan al final de la sección.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES COMO UNA COMBINACIÓN LINEAL DE LAS COLUMNAS DE A

Sea A una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{x}$ un vector de $n \times 1$. Considere el producto

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Observe que $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ es la primera columna de A, $\mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$ es la segunda columna de A, y así sucesivamente. Entonces (9) se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n \qquad (10)$$

El lado derecho de la expresión (10) se llama **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$. Las combinaciones lineales se estudiarán con detalle en la unidad 4. Aquí simplemente se observa el siguiente hecho de interés:

El producto de la matriz A de $m \times n$ y el vector columna $\mathbf{x}$ es una combinación lineal de las columnas de A.

Suponga ahora que B es una matriz de $n \times p$. Sea $C = AB$ y sea $\mathbf{c}_1$ la primera columna de C. Entonces

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + b_{21}\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + b_{n1}\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

es igual a la combinación lineal de las columnas de A. Lo mismo se cumple para todas las columnas de $C = AB$, donde se ve que

Cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A.

EJEMPLO 7 **Cómo escribir las columnas de *AB* como combinación lineal de las columnas de *A***

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

Entonces $AB = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 10 & 26 \\ 13 & 32 \end{pmatrix}$. Ahora bien

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A$$

y

$$\begin{pmatrix} -15 \\ 26 \\ 32 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \text{una combinación lineal de las columnas de } A.$$

Multiplicación de matrices por bloques

En ciertas situaciones es prudente manejar las matrices como bloques de matrices más pequeñas, llamadas **submatrices**, y después multiplicar bloque por bloque en lugar de componente por componente. La multiplicación en bloques es muy similar a la multiplicación normal de matrices.

EJEMPLO 8 **Multiplicación por bloques**

Considere el producto $AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

El lector debe verificar que este producto esté definido. Ahora se realiza una partición de estas matrices mediante líneas punteadas.

$$AB = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C & D \\ \hline E & F \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline J & K \end{array}\right)$$

Existen otras maneras de formar la partición. En este caso $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y así sucesivamente. Si suponemos que todos los productos y las sumas de matrices están definidos, se puede multiplicar de manera normal para obtener

$$AB = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & H \\ J & K \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right)$$

Ahora

$$CG = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad DJ = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -12 & 13 \end{pmatrix}$$

y

$$CG + DJ = \begin{pmatrix} -7 & 13 \\ -10 & 21 \end{pmatrix}.$$

De manera similar

$$EH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad FK = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

y

$$EH + FK = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

El lector debe verificar que $CH + DK = \begin{pmatrix} 13 \\ 20 \end{pmatrix}$ y $EG + FJ = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -11 & -1 \end{pmatrix}$ de manera que

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} CG + DJ & CH + DK \\ \hline EG + FJ & EH + FK \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ \hline -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -7 & 13 & 13 \\ -10 & 21 & 20 \\ -3 & 4 & -1 \\ -11 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la misma respuesta que se obtiene si se multiplica AB directamente.

Cuando se hace una partición de dos matrices y, al igual que en el ejemplo 8, todos los productos de submatrices están definidos, se dice que la partición es **conformante**.

EJEMPLO 9 Dos matrices que son conmutativas

Suponga que las matrices A y B son cuadradas y que se hacen particiones conformantes de $C = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}$. Muestre que C y D son conmutativas. Aquí O denota la matriz cero e I es una matriz cuadrada que tiene la propiedad de que $AI = IA = A$ siempre que estos productos estén definidos (vea la página 89).

Solución

$$CD = \begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + A \cdot O & IB + AI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot B + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B + A \\ O & I \end{pmatrix}$$

en donde $I^2 = \mathrm{I} \cdot \mathrm{I}$. Del mismo modo

$$DC = \begin{pmatrix} I & B \\ O & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & A \\ O & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^2 + B \cdot O & IA + BI \\ O \cdot I + I \cdot O & O \cdot A + I^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A + B \\ O & I \end{pmatrix}$$

Como $B + A = A + B$, $CD = DC$, es decir, las matrices son conmutativas.

Para poder probar los teoremas 2 y 3 y para estudiar muchas otras partes del material de este libro es necesario utilizar la *notación de sumatoria*. Si el lector no está familiarizado con ella, conforme avance en el libro obtendrá suficiente información al respecto. De otra manera puede ir directamente a las demostraciones de los teoremas 2 y 3.

La notación con $\sum$

Una suma se puede escribir[†] de la siguiente manera, si $N \geq M$.

$$a_M + a_{M+1} + a_{M+2} + \cdots + a_N = \sum_{k=M}^{N} a_k \tag{11}$$

Signo de sumatoria
Índice de la suma

que se lee "suma de los términos a_k cuando el valor de k va de M a N". En este contexto $\sum$ se llama **signo de sumatoria** y k se conoce como **índice de la suma**.

EJEMPLO 10 Interpretación de la notación de sumatoria

Extienda la suma $\sum_{k=1}^{5} b_k$.

Solución Comenzando con $k = 1$ y terminando con $k = 5$ se obtiene

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

EJEMPLO 11 Interpretación de la notación de sumatoria

Extienda la suma $\sum_{k=3}^{6} c_k$.

Solución Comenzando con $k = 3$ y terminando con $k = 6$ se obtiene

$$\sum_{k=3}^{6} c_k = c_3 + c_4 + c_5 + c_6$$

EJEMPLO 12 Interpretación de la notación de sumatoria

Calcule $\sum_{k=-2}^{3} k^2$.

Solución En este caso $a_k = k^2$ y k va de -2 a 3.

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^{3} k^2 &= (-2)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ &= 4+1+0+1+4+9 = 19\end{aligned}$$

Nota. Al igual que en el ejemplo 12, el índice de la sumatoria puede tomar valores enteros negativos o cero.

[†] El matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) fue el primero en usar la letra griega Σ (sigma) para denotar una suma.

EJEMPLO 13 **Cómo escribir una suma usando la notación de sumatoria**

Escriba la suma $S_8 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$ usando el signo de sumatoria.

Solución Como $1 = (-1)^2$, $-2=(-1)^3 \cdot 2$, $3=(-1)^4 \cdot 3$…, se tiene

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} (-1)^{k+1} k$$

EJEMPLO 14 **Cómo escribir el producto escalar haciendo uso de la notación de sumatoria**

La ecuación (1) para el producto escalar se puede escribir de manera compacta usando la notación de sumatoria:

Solución $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$

La fórmula (4) para la componente ij del producto AB se puede escribir

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{12}$$

La notación de sumatoria tiene propiedades útiles. Por ejemplo,

$$\sum_{k=1}^{n} c a_k = c a_1 + c a_2 + c a_3 + \cdots + c a_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

A continuación se resumen éste y otros hechos.

Hechos sobre la notación de sumatoria

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones reales y c un número real. Entonces

$$\sum_{k=M}^{N} c a_k = c \sum_{k=M}^{N} a_k \tag{13}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k + b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{14}$$

$$\sum_{k=M}^{N} (a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k \tag{15}$$

$$\sum_{k=M}^{N} a_k = \sum_{k=M}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{N} a_k \qquad \text{si } M < m < N \tag{16}$$

Las pruebas de estos hechos se dejan como ejercicios (vea los problemas 104 a 106).

Ahora se usará la notación de sumatoria para probar la ley asociativa y la ley distributiva.

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS 2 Y 3

Ley asociativa

Como A es de $n \times m$ y B es de $m \times p$, AB es de $n \times p$. Entonces $(AB)C = (n \times p) \times (p \times q)$ es una matriz de $n \times q$. De manera similar, BC es de $m \times q$ y $A(BC)$ es de $n \times q$ de manera que $(AB)C$ y $A(BC)$ son ambas del mismo tamaño. Debe demostrarse que la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Si se define $D = (d_{ij}) = AB$, entonces

$$\text{de (12)} \downarrow \quad d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

La componente ij de $(AB)C = DC$ es

$$\sum_{l=1}^{p} d_{il} c_{lj} = \sum_{l=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Ahora se define $E = (e_{ij}) = BC$. Entonces

$$e_{kj} = \sum_{l=1}^{p} b_{kl} c_{lj}$$

y la componente ij de $A(BC) = AE$ es

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} e_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

Así, la componente ij de $(AB)C$ es igual a la componente ij de $A(BC)$. Esto demuestra la ley asociativa.

Leyes distributivas

Se demuestra la primera ley distributiva [ecuación (7)]. La demostración de la segunda [ecuación (8)] es idéntica y por lo mismo se omite. Sea A una matriz de $n \times m$ y sean B y C matrices de $m \times p$. La componente kj de $B + C$ es $b_{kj} + c_{kj}$ y la componente ij de $A(B + C)$ es

$$\text{de (12)} \downarrow \quad \sum_{k=1}^{m} a_{ik} (b_{kj} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik} c_{kj} = \text{componente } ij \text{ de } AB \text{ más la componente } ij \text{ de } AC$$

y esto demuestra la ecuación (7).

SEMBLANZA DE...

Arthur Cayley y el álgebra de matrices

Arthur Cayley
(Library of Congress)

Arthur Cayley (1821-1895), un matemático inglés, desarrolló en 1857 el álgebra de matrices, es decir, las reglas que ilustran la forma en la cual se suman y multiplican las matrices. Cayley nació en Richmond, en Surrey (cerca de Londres) y fue educado en el Trinity College, Cambridge, donde se graduó en 1842. Ese mismo año obtuvo el primer lugar en la difícil prueba para el premio Smith. Durante varios años estudió y ejerció la carrera de leyes, pero nunca dejó que su práctica en la abogacía interfiriera con su trabajo en las matemáticas. Siendo estudiante de la comisión viajó a Dublín y asistió a las conferencias de Hamilton sobre cuaterniones. Cuando se estableció la cátedra Sadlerian en Cambridge en 1863, le ofrecieron el puesto a Cayley y él lo aceptó, renunciando a un lucrativo futuro como abogado a cambio de la modesta remuneración de la vida académica. Pero fue entonces que pudo dedicar *todo* su tiempo a las matemáticas.

Cayley está clasificado como el tercer matemático más prolífico en la historia; lo sobrepasan sólo Euler y Cauchy. Comenzó a publicar siendo todavía estudiante de la Universidad en Cambridge. Durante sus años de abogado publicó entre 200 y 300 artículos y continuó su copioso trabajo a lo largo de toda su vida. La colección masiva *Collected Mathematical Papers* de Cayley contiene 966 artículos y consta de 13 grandes volúmenes con un promedio de 600 páginas por cada uno. Es casi imposible hallar un área dentro de las matemáticas puras que Cayley no haya estudiado y enriquecido.

Además de desarrollar la teoría de matrices, Cayley fue pionero en sus contribuciones a la geometría analítica, la teoría de determinantes, la geometría de n dimensiones, la teoría de curvas y superficies, el estudio de formas binarias, la teoría de funciones elípticas y el desarrollo de la teoría de invariantes.

El estilo matemático de Cayley refleja su formación legal ya que sus artículos son severos, directos, metódicos y claros. Poseía una memoria fenomenal y parecía nunca olvidar nada que hubiera visto o leído alguna vez. Tenía además un temperamento singularmente sereno, calmado y amable. Se le llamaba "el matemático de los matemáticos".

Cayley desarrolló un interés poco común por la lectura de novelas. Las leía mientras viajaba, mientras esperaba que una junta comenzara y en cualquier momento que considerara oportuno. Durante su vida leyó miles de novelas, no sólo en inglés, sino también en griego, francés, alemán e italiano. Disfrutaba mucho pintar, en especial con acuarela y mostraba un marcado talento como especialista de esta técnica. También era un estudiante apasionado de la botánica y la naturaleza en general.

Cayley era, en el verdadero sentido de la tradición inglesa, un alpinista amateur e hizo viajes frecuentes al continente para realizar caminatas y escalar montañas. Cuenta la historia que decía que la razón por la que se unió al alpinismo fue que, aunque sentía que el ascenso era arduo y cansado, la gloriosa sensación de goce que lograba cuando conquistaba una cima era como el que experimentaba cuando resolvía un problema difícil de matemáticas o cuando completaba una teoría matemática intrincada.

Las matrices surgieron con Cayley, relacionadas con las transformaciones lineales del tipo

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{aligned} \qquad \textbf{(17)}$$

donde a, b, c, d son números reales, y donde puede pensarse que son funciones que convierten al vector (x, y) en el vector (x', y'). Las transformaciones se estudiarán con detalle en el capítulo 5. Aquí se observa que la transformación (17) está completamente determinada por los cuatro coeficientes a, b, c, d y por lo tanto puede simbolizarse por el arreglo matricial cuadrado

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

al que se ha dado el nombre de matriz 2×2. Como dos transformaciones del tipo de (17) son idénticas si y sólo si tienen los mismos coeficientes, Cayley definió que dos matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

eran iguales si y sólo si $a = e$, $b = f$, $c = g$ y $d = h$.

Ahora suponga que la transformación (17) va seguida de la transformación

$$\begin{aligned} x'' &= ex' + fy' \\ y'' &= gx' + hy' \end{aligned} \qquad \textbf{(18)}$$

Entonces

$$x'' = e(ax + by) + f(cx + dy) = (ea + fc)x + (eb + fd)y$$

y

$$y'' = g(ax + by) + h(cx + dy) = (ga + hc)x + (gb + hd)y$$

Esto llevó a Cayley a la siguiente definición para el producto de dos matrices:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{pmatrix}$$

que es, por supuesto, un caso especial de la definición general del producto de matrices dado en la definición 3.2.2.

Es interesante recalcar cómo, en matemáticas, observaciones muy sencillas pueden llevar a definiciones y teoremas importantes.

Autoevaluación

I. ¿De las siguientes afirmaciones, cuál es cierta para la multiplicación de las matrices A y B?

a) Se puede realizar sólo si A y B son matrices cuadradas.

b) Cada elemento c_{ij} es el producto de a_{ij} y b_{ij}.

c) $AB = BA$.

d) Se puede realizar sólo si el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

II. ¿Cuál de los siguientes sería el tamaño de la matriz producto AB si se multiplica la matriz A de 2×4 por la matriz B de 4×3?

a) 2×3 ***b)*** 3×2 ***c)*** 4×4

d) Este producto no se puede calcular.

III. Indique cuál de los siguientes enunciados es correcto para las matrices A y B si AB es un vector columna.

a) B es un vector columna.

b) A es un vector renglón.

c) A y B son matrices cuadradas.

d) El número de renglones de A debe ser igual al número de columnas de B.

IV. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre el producto AB es cierta si A es una matriz de 4×5?

a) B debe tener cuatro renglones y el resultado tendrá cinco columnas.

b) B debe tener cinco columnas y el resultado será una matriz cuadrada.

c) B debe tener cuatro columnas y el resultado tendrá cinco renglones.

d) B debe tener cinco renglones y el resultado tendrá cuatro renglones.

Desarrollo de competencias 3.2

En los problemas 1 a 8 calcule el producto escalar de los dos vectores.

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. $(1, 2, -1, 0); (3, -7, 4, -2)$

3. $(7, 4); (-1, -4)$

4. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. $(8, 3, 1); (7, -4, 3)$

6. $(a, b); (c, d)$

7. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$

8. $(-1, -3, 4, 5); (-1, -3, 4, 5)$

9. Sea $\mathbf{a}$ un n-vector. Pruebe que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$.

10. Encuentre las condiciones sobre un vector $\mathbf{a}$ tales que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$.

En los problemas 11 a 17 realice las operaciones indicadas con $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

11. $(2\mathbf{a}) \cdot (3\mathbf{b})$

12. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

13. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

14. $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$

15. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c} - 5\mathbf{a})$

16. $(\mathbf{a} - \mathbf{c}) \cdot (3\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$

17. $(3\mathbf{b} - 4\,\mathbf{a}) \cdot (4\mathbf{c} + 2\mathbf{b} - \mathbf{a})$

En los problemas 18 a 34 realice los cálculos indicados.

18. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a, b, c, d, e, f, g, h, j$, son números reales.

35. Encuentre una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

36. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ encuentre un vector no nulo $b = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $Ab = 6b$.

37. Encuentre B tal que $AB = C$. Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

38. Sea $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 2 & \alpha\end{pmatrix}$ determine el valor de α para el cual A es una raíz del polinomio $f(x)=x^2-25$.

39. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ encuentre las condiciones para a, b, c y d tal que $AB=BA$.

40. Sean $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 8 & -2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}$, pruebe que $A^2+B^2=(A+B)^2$.

41. Demuestre que $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{pmatrix}$.

42. Una matriz A de $n\times n$ tal que $A^2=I_n$ se llama involutiva. Pruebe que la siguiente matriz es involutiva:

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}.$$

43. Dada la siguiente matriz pruebe que $A^2=A$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

44. Sean a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} números reales dados tales que $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

Encuentre los números b_{11}, b_{12}, b_{21} y b_{22} tales que $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

45. Verifique la ley asociativa para la multiplicación de las matrices $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.

46. De la misma forma que en el ejemplo 6 suponga que un grupo de personas ha contraído una enfermedad contagiosa. Estas personas tienen contacto con un segundo grupo que, a su vez, tiene contacto con un tercer grupo. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ representa los contactos entre el grupo contagioso y los miembros del grupo 2, y si $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ representa

los contactos entre los grupos 2 y 3, *A*) ¿Cuántas personas hay en cada grupo? *B*) Encuentre la matriz de contactos indirectos entre los grupos 1 y 3.

47. Conteste las preguntas del problema 46 para $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{pmatrix}$ y

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&1\\0&1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

VECTORES ORTOGONALES

Se dice que dos vectores **a** y **b** son **ortogonales** si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. En los problemas 48 a 53 determine cuáles pares de vectores son ortogonales.†

48. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix}1\\4\\-7\end{pmatrix};\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$

51. (1, 0, 1, 0); (0, 1, 0, 1)

52. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix}a\\0\\b\\0\\c\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\d\\0\\e\\0\end{pmatrix}$

54. Determine el número α tal que $(1,-2,3,5)$ es ortogonal a $(-4,\alpha,6,-1)$.

55. Determine todos los números α y β tales que los vectores $\begin{pmatrix}1\\-\alpha\\2\\3\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}4\\5\\-2\beta\\3\end{pmatrix}$ son ortogonales.

56. Demuestre el teorema 1 usando la definición de producto escalar.

57. Un fabricante de joyería de diseño tiene órdenes por dos anillos, tres pares de aretes, cinco prendedores y un collar. El fabricante estima que le llevará 1 hora de mano de obra hacer un anillo, 1½ horas hacer un par de aretes, ½ hora para un prendedor y 2 horas para un collar.

a) Exprese las órdenes del fabricante como un vector renglón.

b) Exprese los requerimientos en horas para los distintos tipos de joyas como un vector columna.

c) Utilice el producto escalar para calcular el número total de horas que requerirá para terminar las órdenes.

58. Un turista regresó de un viaje por América del Sur con divisa extranjera de las siguientes denominaciones: 1 000 pesos argentinos, 20 reales del Brasil, 100 pesos colombianos, 5 000

† Los vectores ortogonales se manejarán extensamente en la unidad 4.

pesos chilenos y 50 colones de Costa Rica. En dólares, un peso argentino valía \$0.3174, los reales brasileños \$0.4962, los pesos colombianos \$0.000471, los pesos chilenos \$0.00191 y los colones \$0.001928.

a) Exprese la cantidad de cada tipo de moneda por medio de un vector renglón.

b) Exprese el valor de cada tipo de moneda en dólares por medio de un vector columna.

c) Utilice el producto escalar para calcular cuántos dólares valía el dinero extranjero del turista.

59. Una compañía paga un salario a sus ejecutivos y les da un porcentaje de sus acciones como un bono anual. El año pasado el presidente de la compañía recibió \$80 000 y 50 acciones, se pagó a cada uno de los vicepresidentes \$45 000 y 20 acciones y el tesorero recibió \$40 000 y 10 acciones.

a) Exprese los pagos a los ejecutivos en dinero y acciones como una matriz de 2×3.

b) Exprese el número de ejecutivos de cada nivel como un vector columna.

c) Utilice la multiplicación de matrices para calcular la cantidad total de dinero y el número total de acciones que pagó la compañía a los ejecutivos el año pasado.

60. La siguiente tabla contiene ventas, utilidades brutas por unidad y los impuestos por unidad sobre las ventas de una compañía grande:

	Producto					
Mes	**Artículo vendido**			**Artículo**	**Utilidad unitaria (en cientos de dólares)**	**Impuestos unitarios (en cientos de dólares)**
	I	**II**	**III**			
Enero	4	2	20	I	3.5	1.5
Febrero	6	1	9	II	2.75	2
Marzo	5	3	12	III	1.5	0.6
Abril	8	2.5	20			

Elabore una matriz que muestre las utilidades y los impuestos totales para cada mes.

61. Sea A una matriz cuadrada. Entonces A^2 se define simplemente como AA. Calcule

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^2.$$

62. Calcule A^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

63. Calcule A^3 si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

64. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

65. Calcule A^2, A^3, A^4 y A^5 donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

66. Una matriz A de $n \times n$ tiene la propiedad de que AB es la matriz cero para cualquier matriz B de $n \times n$. Pruebe que A es la matriz cero.

67. Una **matriz de probabilidades** es una matriz cuadrada que tiene dos propiedades: *i*) todos sus elementos son no negativos (≥ 0) y *ii*) la suma de los elementos en cada renglón es 1. Las siguientes matrices son matrices de probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

***68.** Sea P una matriz de probabilidades. Pruebe que P^2 es una matriz de probabilidades.

****69.** Sean P y Q dos matrices de probabilidades del mismo tamaño. Pruebe que PQ es una matriz de probabilidades.

70. Pruebe la fórmula (6) usando la ley asociativa [ecuación (5)].

***71.** Se puede organizar un torneo de tenis de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz R de $n \times n$ de la siguiente forma:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde contra el tenista } j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} R_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (R^2)_{ij}^{\dagger}$$

† $(R^2)ij$ es la componente ij de la matriz R^2.

a) Para un torneo entre cuatro tenistas

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Clasifique a los tenistas según sus calificaciones.

b) Interprete el significado de la calificación.

72. Sea O una matriz cero de $m \times n$ y sea A una matriz de $n \times p$. Demuestre que $OA = O_1$, donde O_1 es la matriz cero de $m \times p$.

73. Verifique la ley distributiva [ecuación (7)] para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

En los problemas 74 a 78 multiplique las matrices usando los bloques indicados.

74.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{array}\right)$$

75.
$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline 6 \\ \hline 2 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

76.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 5 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

77.
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

78.
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

79. Sea $A = \begin{pmatrix} I & O \\ C & I \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} I & O \\ D & I \end{pmatrix}$. Si se hace una partición conformante de A y B demuestre que A y B conmutan. Para esto I está definida en el ejemplo 9.

En los problemas 80 a 89 evalúe las sumas dadas.

80. $\sum_{k=1}^{4} 2k$ **81.** $\sum_{i=1}^{3} i^3$ **82.** $\sum_{k=0}^{6} 1$ **83.** $\sum_{n=1}^{3} 5n$

84. $\sum_{k=1}^{8} 3^k$ **85.** $\sum_{i=2}^{5} \frac{1}{1+i}$ **86.** $\sum_{m=-2}^{3} \frac{m+1}{m+10}$ **87.** $\sum_{j=5}^{7} \frac{2j+3}{j-2}$

88. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} ij$ **89.** $\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=2}^{4} k^2 j^3$

En los problemas 90 a 103 escriba cada suma haciendo uso de la notación de sumatoria.

90. $1+2+4+8+16$

91. $1-3+9-27+81-243$

92. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{n}{n+1}$

93. $1+2^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{3}}+4^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{5}}+\cdots+n^{\frac{1}{n}}$

94. $1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+x^{15}+x^{18}+x^{21}$

95. $-x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}$

96. $-1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}-\frac{1}{a^6}+\frac{1}{a^7}-\frac{1}{a^8}+\frac{1}{a^9}$

97. $1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+9\cdot 11+11\cdot 13+13\cdot 15+15\cdot 17$

98. $2^2\cdot 4+3^2\cdot 6+4^2\cdot 8+5^2\cdot 10+6^2\cdot 12+7^2\cdot 14$

99. $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{21}+a_{22}+a_{23}$

100. $a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}+a_{31}+a_{32}$

101. $a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}$

102. $a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}+a_{34}b_{42}+a_{35}b_{52}$

103. $a_{21}b_{11}c_{15}+a_{21}b_{12}c_{25}+a_{21}b_{13}c_{35}+a_{21}b_{14}c_{45}$
$+a_{22}b_{21}c_{15}+a_{22}b_{12}c_{25}+a_{22}b_{23}c_{35}+a_{22}b_{24}c_{45}$
$+a_{23}b_{31}c_{15}+a_{23}b_{32}c_{25}+a_{23}b_{33}c_{35}+a_{23}b_{34}c_{45}$

104. Pruebe la fórmula (14) extendiendo los términos de

$$\sum_{k=M}^{N}(a_k+b_k)$$

105. Pruebe la fórmula (15)

[*Sugerencia*: Utilice (13) para demostrar que $\sum_{k=M}^{N}(-a_k)=-\sum_{k=M}^{N}a_n$. Luego use (14).]

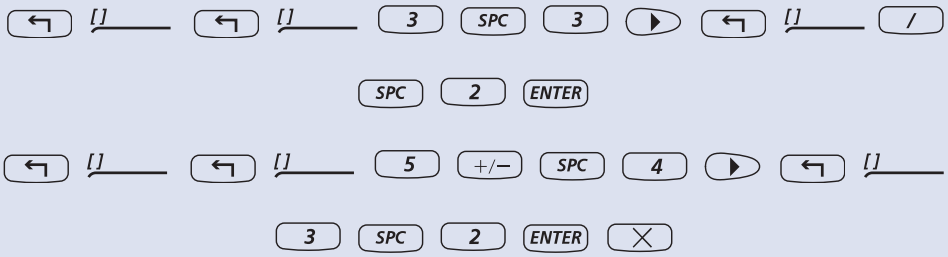
106. Pruebe la fórmula (16).

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d*) **II.** *a*) **III.** *a*) **IV.** *d*)

MANEJO DE LA CALCULADORA

La multiplicación de matrices de dimensiones compatibles es transparente al usuario, únicamente hay que tener a las matrices en la pila y oprimir la tecla de la multiplicación, por ejemplo, si se quiere multiplicar las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ la secuencia de teclas a oprimir es la siguiente (observación: se considera que se esta utilizando el modo RPN de la calculadora)



En los problemas 107 a 109 utilice la calculadora para obtener cada producto.

107. $\begin{pmatrix} 1.23 & 4.69 & 5.21 \\ -1.08 & -3.96 & 8.57 \\ 6.28 & -5.31 & -4.27 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9.61 & -2.30 \\ -8.06 & 0.69 \\ 2.67 & -5.23 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} 125 & 216 & 419 \\ 383 & 516 & 237 \\ 209 & 855 & 601 \\ 403 & 237 & 506 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 73 & 36 \\ 21 & 28 \\ 49 & 67 \end{pmatrix}$

109. $\begin{pmatrix} 23.2 & 56.3 & 19.6 & -31.4 \\ 18.9 & -9.6 & 17.4 & 51.2 \\ 30.8 & -17.9 & -14.4 & 28.6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.071 & 0.068 \\ 0.051 & -0.023 \\ -0.011 & -0.082 \\ 0.053 & 0.065 \end{pmatrix}$

110. En el problema 69 se le pidió que demostrara que el producto de dos matrices de probabilidades es una matriz de probabilidades. Sea

$$P = \begin{pmatrix} 0.23 & 0.16 & 0.57 & 0.04 \\ 0.15 & 0.09 & 0.34 & 0.42 \\ 0.66 & 0.22 & 0.11 & 0.01 \\ 0.07 & 0.51 & 0.20 & 0.22 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 0.112 & 0.304 & 0.081 & 0.503 \\ 0.263 & 0.015 & 0.629 & 0.093 \\ 0.402 & 0.168 & 0.039 & 0.391 \\ 0.355 & 0.409 & 0.006 & 0.230 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que P y Q son matrices de probabilidades.

b) Calcule PQ y muestre que es una matriz de probabilidades.

111. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calcule A^2, A^5, A^{10}, A^{50} y A^{100}.

[*Sugerencia*: Utilice la tecla Y^x para el cálculo de la potencia de la matriz, la sintaxis es la base, en este caso la matriz, seguida de ENTER después el exponente seguido de Y^x.]

112. Sea $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Con base en los cálculos del problema 111 deduzca la forma de las componentes de la diagonal A^n. Aquí, x, y y z denotan números reales.

3.3 MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En la sección 2.3 se estudiaron los siguientes sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes, $\mathbf{x}$ el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b}$ el vector $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de $m \times n$ y x es una matriz de $n \times 1$ el producto matricial $A\mathbf{x}$ es una matriz de $m \times 1$. No es difícil ver que el sistema (1) se puede escribir como

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Cómo escribir un sistema mediante su representación matricial

Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + \ x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{3}$$

(Vea el ejemplo 2.3.1.) Esto se puede escribir como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es mucho más sencillo escribir el sistema (1) en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además existen otras ventajas. En la sección 3.4 se observará la rapidez con que se puede resolver un sistema cuadrado si se conoce una matriz llamada la *inversa* de A. Aun sin ella, como ya se vio en la sección 2.3, es mucho más sencillo escribir los cálculos usando una matriz aumentada.

Si $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ es el vector cero de $m \times 1$, entonces el sistema (1) es homogéneo (vea la sección 2.4) y se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{(forma matricial de un sistema de ecuaciones homogéneo).}$$

Existe una relación fundamental entre los sistemas homogéneos y los no homogéneos. Sea A una matriz $m \times n$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ y } \overset{m \text{ ceros}}{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema lineal no homogéneo general se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4}$$

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

Con A y $\mathbf{x}$ dados en (4) y $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un **sistema homogéneo asociado** se define como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

TEOREMA 1 Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ soluciones al sistema no homogéneo (4). Entonces su diferencia $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución al sistema homogéneo relacionado (5).

DEMOSTRACIÓN

por la ley distributiva (7)

$$A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

COROLARIO Sea $\mathbf{x}$ una solución particular al sistema no homogéneo (4) y sea $\mathbf{y}$ otra solución a (4). Entonces existe una solución $\mathbf{h}$ al sistema homogéneo (5) tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h} \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{h}$ está definida por $\mathbf{h} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, entonces $\mathbf{h}$ es una solución de (5) por el teorema 1 y $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$.

El teorema 1 y su corolario son muy útiles. Establecen que

> Con el objeto de encontrar todas las soluciones al sistema no homogéneo (4), basta con encontrar una solución a (4) y todas las soluciones al sistema homogéneo asociado (5).

Observación. Un resultado muy similar se cumple para las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas (vea los problemas 29 y 30). Una de las bondades de las matemáticas es que temas en apariencia muy diferentes tienen una fuerte interrelación.

EJEMPLO 2 **Cómo escribir un número infinito de soluciones como una solución particular a un sistema no homogéneo más las soluciones al sistema homogéneo**

Encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 &= -1 \end{aligned}$$

usando el resultado anterior.

Solución Primero, se encuentra una solución mediante la reducción por renglones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 5 & | & 5 \\ -1 & -3 & 8 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 7 & | & 1 \\ 0 & -1 & 7 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{R_1 \to R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & | & 4 \\ 0 & -1 & 7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones correspondientes a los primeros dos renglones del último sistema son

$$x_1 = 4 - 13x_3 \quad \text{y} \quad x_2 = -1 + 7x_3$$

con lo que las soluciones son

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (4 - 13x_3, -1 + 7x_3, x_3) = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

donde $\mathbf{x}_p = (4, -1, 0)$ es una solución particular y $\mathbf{x}_h = x_3(-13, 7, 1)$, donde x_3 es un número real, es una solución al sistema homogéneo asociado. Por ejemplo, $x_3 = 0$ lleva a la solución $(4, -1, 0)$ mientras que $x_3 = 2$ da la solución $(-22, 13, 2)$.

AUTOEVALUACIÓN

I. Si el sistema $\begin{pmatrix} x & - z = 2 \\ & y + z = 3 \\ x + 2y & = 4 \end{pmatrix}$ se escribe en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces $A =$ _____.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 3.3

En los problemas 1 a 8 escriba el sistema dado en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \\ 7x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -7 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + 6x_4 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -5 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 7 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 2 \end{aligned}$

En los problemas 9 a 19 escriba el sistema de ecuaciones representado por la matriz aumentada correspondiente.

9. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & -1 & 5 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 20 \end{array}\right)$ **10.** $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$ **11.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \end{array}\right)$

12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ **13.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$ **14.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & -7 & 0 \end{array}\right)$

15. $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \end{array}\right)$ **16.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ **17.** $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right)$

18. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ **19.** $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$

20. Encuentre la matriz A y los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ tales que el sistema representado por la siguiente matriz aumentada se escriba en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y resuelva el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}\right)$$

En los problemas 21 a 28 encuentre todas las soluciones al sistema no homogéneo dado encontrando primero una solución (si es posible) y después todas las soluciones al sistema homogéneo asociado.

21.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ -2x_1 + 6x_2 &= -4 \end{aligned}$$

22.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - 4x_2 - 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_5 &= 1 \\ x_1 - 2x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

27.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 5 \end{aligned}$$

28.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

CÁLCULO †**29.** Considere la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas y se supone que la función desconocida y tiene una segunda derivada. Muestre que si y_1 y y_2 son soluciones a (7), entonces $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución para cualesquiera constantes c_1 y c_2.

CÁLCULO **30.** Suponga que y_p y y_q son soluciones a la ecuación no homogénea

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x) \qquad \textbf{(8)}$$

Demuestre que $y_p - y_q$ es una solución a (7). Suponga aquí que $f(x)$ no es la función cero.

CÁLCULO **31.** Si $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\text{sen}(x)$ encuentre los valores de c_1 y c_2 tales que $y(0) = 1$ y $y'(0) = -1$.

RESPUESTA A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d)*

† El símbolo CÁLCULO indica que se necesita el cálculo para resolver el problema.

3.4 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

En esta sección se definen dos tipos de matrices que son básicas en la teoría de matrices. En primer lugar se presenta un ejemplo sencillo. Sea $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$. Un cálculo sencillo muestra que $AB = BA = I_2$, donde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. La matriz I_2 se llama *matriz identidad* de 2×2. La matriz B se llama *matriz inversa* de A y se denota por A^{-1}.

DEFINICIÓN 1 **Matriz identidad**

La **matriz identidad** I_n de $n \times n$ es una matriz de $n \times n$ cuyos elementos de la **diagonal principal**[†] son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es,

$$I_n = (b_{ij}) \quad \text{donde} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

EJEMPLO 1 **Dos matrices identidad**

$$I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_5=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

TEOREMA 1

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Entonces

$$AI_n = I_nA = A$$

Es decir, I_n, conmuta con toda matriz de $n \times n$ y la deja sin cambio después de la multiplicación por la derecha o por la izquierda.

Nota. I_n funciona para las matrices de $n \times n$ de la misma manera que el número 1 funciona para los números reales ($1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todo número real a).

DEMOSTRACIÓN

Sea c_{ij} el elemento ij de AI_n. Entonces

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ij}b_{jj} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

[†] La diagonal de $A = (a_{ij})$ consiste en las componentes a_{11}, a_{22}, a_{33}, etc. A menos que se establezca de otra manera, se hará referencia a la diagonal principal simplemente como la **diagonal**.

Pero por (1), esta suma es igual a a_{ij}. Así $AI_n = A$. De una manera similar se puede demostrar que $I_nA = A$ y esto demuestra el teorema.

Notación. De aquí en adelante se escribirá la matriz identidad únicamente como I ya que si A es de $n \times n$ los productos IA y AI están definidos sólo si I es también de $n \times n$.

DEFINICIÓN 2 **La inversa de una matriz**

Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$AB = BA = I$$

Entonces B se llama la **inversa** de A y se denota por A^{-1}. Entonces se tiene

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Si A tiene inversa, entonces se dice que A es **invertible**.

Una matriz cuadrada que no es invertible se denomina **singular** y una matriz invertible se llama **no singular**.

Observación 1. A partir de esta definición se deduce inmediatamente que $(A^{-1})^{-1} = A$ si A es invertible.

Observación 2. Esta definición *no* establece que toda matriz cuadrada tiene inversa. De hecho, existen muchas matrices cuadradas que no tienen inversa (ejemplo 3).

En la definición 2 se establece *la* inversa de una matriz. Esta definición sugiere que la inversa es única. Y esta declaración es cierta, como lo dice el siguiente teorema.

TEOREMA 2 Si una matriz A es invertible, entonces su inversa es única.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que B y C son dos inversas de A. Se puede demostrar que $B = C$. Por definición se tiene $AB = BA = I$ y $AC = CA = I$. $B(AC) = (BA)C$ por la ley asociativa de la multiplicación de matrices. Entonces

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Entonces $B = C$ y el teorema queda demostrado.

A continuación se presenta otro fenómeno importante sobre las inversas.

TEOREMA 3 Sean A y B dos matrices invertibles de $n \times n$. Entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN Para probar este resultado es necesaria la definición 2. Es decir, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ si y sólo si $B^{-1}A^{-1}(AB) = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$. Se trata, únicamente, de una consecuencia ya que

ecuación (6), página 67 ↓

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$$

y

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$$

Nota. Del teorema 3 se concluye que $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$. Vea el problema 22. Considere el sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Y suponga que A es invertible. Entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && \text{se multiplicó por la izquierda por } A^{-1} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && A^{-1}A = I \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} && I\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Ésta es una solución al sistema porque

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

Si $\mathbf{y}$ es un vector tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, entonces los cálculos anteriores demuestran que $\mathbf{y} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Es decir, $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se ha demostrado lo siguiente:

Si A es invertible, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ **(2)**

Ésta es una de las razones por la que se estudian las matrices inversas.

Ya que se ha definido la inversa de una matriz, surgen dos preguntas básicas.

Pregunta 1. ¿Qué matrices tienen inversa?

Pregunta 2. Si una matriz tiene inversa ¿cómo se puede calcular?

En la presente sección se contestan ambas preguntas. Se comenzará por analizar lo que ocurre en el caso 2×2.

EJEMPLO 2 **Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Suponga que A^{-1} existe. Se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ y se usa el hecho de que $AA^{-1} = I$. Entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3z & 2y - 3w \\ -4x + 5z & -4y + 5w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas matrices pueden ser iguales únicamente si cada una de sus componentes correspondientes son iguales. Esto significa que

$$2x - 3z = 1 \quad \textbf{(3)}$$

$$2y - 3w = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$$-4x + 5z = 0 \quad \textbf{(5)}$$

$$-4y + 5w = 1 \quad \textbf{(6)}$$

Éste es un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas. Observe que hay dos ecuaciones que involucran únicamente a x y a z [las ecuaciones (3) y (5)] y dos que incluyen sólo a y y w [las ecuaciones (4) y (6)]. Se escriben estos dos sistemas en la forma aumentada:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{array}\right) \quad \textbf{(7)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & 1 \end{array}\right) \quad \textbf{(8)}$$

De la sección 2.3 se sabe que si el sistema (7) (con las variables x y z) tiene una solución única, la eliminación de Gauss-Jordan en (7) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{array}\right)$$

en donde (x,z) es el único par de números que satisface $2x - 3z = 1$ y $-4x + 5z = 0$. De igual manera, la reducción por renglones de (8) dará como resultado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & w \end{array}\right)$$

donde (y,w) es el único par de números que satisface $2y - 3w = 0$ y $-4y + 5w = 1$.

Como las matrices de coeficientes en (7) y (8) son iguales se puede realizar la reducción por renglones sobre las dos matrices aumentadas al mismo tiempo, considerando la nueva matriz aumentada.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \textbf{(9)}$$

Si A es invertible, entonces el sistema definido por (3), (4), (5) y (6) tiene una solución única y, por lo que acaba de decirse, la reducción de renglones da

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & z & w \end{array}\right)$$

Ahora se llevan a cabo los cálculos, observando que la matriz de la izquierda en (9) es A y la matriz de la derecha es I:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 + 4R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -R_1 + \frac{3}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

Así, $x = -\frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, $w = -1$ y $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Se calcula

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces A es invertible y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3 **Una matriz de 2 × 2 que no es invertible**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y si es así, calcule su inversa.

Solución Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ existe, entonces

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2w \\ -2x - 4z & -2y - 4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{aligned} x \qquad\quad + 2z \qquad\quad &= 1 \\ \qquad y \qquad\quad + 2w &= 0 \\ -2x \qquad\quad - 4z \qquad\quad &= 0 \\ \qquad -2y \qquad\quad - 4w &= 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Si se aplica la misma lógica que en el ejemplo 1 se puede escribir este sistema en la forma de matriz aumentada $(A \mid I)$ y reducir por renglones:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La última línea se lee $0 = 2$ o $0 = 1$, dependiendo de cuál de los dos sistemas de ecuaciones (en x y z o en y y w) se esté resolviendo. Entonces el sistema (10) es inconsistente y A no es invertible.

Los últimos dos ejemplos ilustran un procedimiento que siempre funciona cuando se quiere encontrar la inversa de una matriz.

Procedimiento para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A

Paso 1. Se escribe la matriz aumentada $(A|I)$.

Paso 2. Se utiliza la reducción por renglones para poner la matriz A a su forma escalonada reducida por renglones.

Paso 3. Se decide si A es invertible.

a) Si la forma escalonada reducida por renglones de A es la matriz identidad I, entonces A^{-1} es la matriz que se tiene a la derecha de la barra vertical.

b) Si la reducción de A conduce a un renglón de ceros a la izquierda de la barra vertical, entonces A no es invertible.

Observación. *a*) y *b*) se pueden expresar de otra manera:

Una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones es la matriz identidad; es decir, si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces se define

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ 2 × 2

$$\text{Determinante de } A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{11}$$

El determinante de A se denota por $\det A$.

TEOREMA 4

Sea $A =$ una matriz de 2×2. Entonces

i) A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

ii) Si $\det A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{12}$$

DEMOSTRACIÓN

Primero, suponga que $\det A \neq 0$ y sea $B = (1/\det A)\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$. Entonces

$$BA = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\begin{pmatrix} a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & -a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

De manera similar, $AB = I$, lo que muestra que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Todavía debe demostrarse que si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$. Para esto, se considera el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{13}$$

Se lleva a cabo de esta forma porque del teorema de resumen (teorema 2.2) se sabe que si este sistema tiene una solución única, entonces $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. El sistema se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{14}$$

con $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Entonces, como A es invertible, se ve de (2) que el sistema (14) tiene una solución única dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Pero como se mostrará en el teorema 3.2.1, el hecho de que el sistema (13) tenga una solución única implica que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A \neq 0$. Esto completa la prueba.

Nota. La fórmula (12) se puede obtener directamente aplicando el procedimiento para calcular una inversa (ver el problema 54).

EJEMPLO 4 **Cálculo de la inversa de una matriz de 2 × 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Se encuentra que $\det A = (2)(3) - (-4)(1) = 10$; por lo tanto A^{-1} existe. De la ecuación (12) se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&4\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10&0\\0&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

y

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}2&-4\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{10}&\frac{4}{10}\\-\frac{1}{10}&\frac{2}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5 Una matriz de 2 × 2 que no es invertible

Sea $A=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-4\end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución Se encuentra que $\det A = (1)(-4) - (2)(-2) = -4 + 4 = 0$, de manera que A^{-1} no existe, como se observó en el ejemplo 3.

El procedimiento descrito para encontrar la inversa (si existe) de una matriz de 2×2 funciona para matrices de $n \times n$ donde $n > 2$. Se ilustra con varios ejemplos.

EJEMPLO 6 Cálculo de la inversa de una matriz de 3 × 3

Sea $A=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&5&6\\3&1&-2\end{pmatrix}$ (Ver ejemplo 2.3.1.) Calcule A^{-1} si existe.

Solución Primero se pone A seguido de I en la forma de matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&4&6&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\3&1&-2&0&0&1\end{array}\right)$$

y después se lleva a cabo la reducción por renglones.

$$\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&\frac{1}{2}&0&0\\4&5&6&0&1&0\\3&1&-2&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-4R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&-\frac{1}{2}&0&0\\0&-3&-6&-2&1&0\\0&-5&-11&-\frac{3}{2}&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\to-\frac{1}{3}R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&2&\frac{3}{2}&-\frac{1}{3}&0\\0&-5&-11&-\frac{3}{2}&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+5R_2]{R_1\to R_1-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{6}&\frac{3}{2}&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&-1&\frac{11}{6}&-\frac{5}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-\frac{5}{6}&\frac{2}{3}&0\\0&1&2&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-\frac{11}{6}&\frac{5}{3}&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2-2R_3]{R_1\to R_1+R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{8}{3}&\frac{7}{3}&-1\\0&1&0&\frac{13}{3}&-\frac{11}{3}&2\\0&0&1&-\frac{11}{6}&\frac{5}{3}&-1\end{array}\right)$$

Como A se redujo a I se tiene

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{7}{3} & -1 \\ \frac{13}{3} & -\frac{11}{3} & 2 \\ -\frac{11}{6} & \frac{5}{3} & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

se factoriza $\frac{1}{6}$ para que los cálculos sean más sencillos.

Verificación

$$A^{-1}A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -16 & 14 & -6 \\ 26 & -22 & 12 \\ -11 & 10 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}=I.$$

También se puede verificar que $AA^{-1}=I$.

ADVERTENCIA

Cuando se calcula A^{-1} es fácil cometer errores numéricos. Por ello es importante verificar los cálculos viendo que $A^{-1}A=I$.

EJEMPLO 7 **Una matriz de 3 × 3 que no es invertible**

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule A^{-1} si existe.

Solución De acuerdo con el procedimiento anterior se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3+R_2]{R_1\to R_1+3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Hasta aquí se puede llegar. La matriz A no puede reducirse a la matriz identidad, por lo que se puede concluir que A no es invertible.

Hay otra forma de ver el resultado del último ejemplo. Sea $\mathbf{b}$ cualquier vector de 3×1 y considere el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Si se trata de resolver esto por el método de eliminación gaussiana, se terminaría con una ecuación que se lee $0=c\neq 0$ como en el ejemplo 3, o $0=0$. Es decir, el sistema no tiene solución o bien, tiene un número infinito de soluciones. La posibilidad que se elimina es que el sistema tenga una solución única. Pero si A^{-1} existiera, entonces habría una solución única dada por $x=A^{-1}\mathbf{b}$. La conclusión que se obtiene es

Si la reducción por renglones de A produce un renglón de ceros, entonces A no es invertible.

DEFINICIÓN 3 **Matrices equivalentes por renglones**

Suponga que la matriz A se puede transformar en la matriz B mediante operaciones con renglones. Entonces se dice que A y B son **equivalentes por renglones**.

El razonamiento anterior se puede usar para probar el siguiente teorema (vea el problema 55).

TEOREMA 5

Sea A una matriz de $n \times n$.

i) A es invertible si y sólo si A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n; esto es, si la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

ii) A es invertible si y sólo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iii) Si A es invertible, entonces la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

iv) A es invertible si y sólo si su forma escalonada reducida por renglones tiene n pivotes.

EJEMPLO 8 **Uso de la inversa de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones**

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 - x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Solución Este sistema se puede escribir como $Ax = \mathbf{b}$, donde $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Así, la solución única está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

EJEMPLO 9 **La tecnología y las matrices de Leontief: modelo de la economía estadounidense en 1958**

En el modelo de insumo-producto de Leontief, descrito en el ejemplo 2.3.9, se obtuvo el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 &= x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + e_2 &= x_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + e_n &= x_n \end{aligned}$$

que se puede escribir como

$$A\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{x} = I\mathbf{x}$$

o

$$(I - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{e} \qquad \textbf{(16)}$$

La matriz A de demandas internas se llama **matriz tecnológica**, y la matriz $I - A$ se llama **matriz de Leontief**. Si la matriz de Leontief es invertible, entonces los sistemas (15) y (16) tienen soluciones únicas.

Leontief utilizó su modelo para analizar la economía de Estados Unidos en 1958.[†] Dividió la economía en 81 sectores y los agrupó en seis familias de sectores relacionados. Con el objeto de simplificar se tratará cada familia de sectores como un solo sector, de manera que se pueda ver la economía estadounidense como una economía con seis industrias. Estas industrias se enumeran en la tabla 3.1.

Tabla 3.1

Sector	Ejemplos
No metales terminados (NMT)	Muebles, alimentos procesados
Metales terminados (MT)	Electrodomésticos, vehículos automotores
Metales básicos (MB)	Herramientas (producción intermitente), minería
No metales básicos (NMB)	Agricultura, imprenta
Energía (E)	Petróleo, carbón
Servicio (s)	Diversiones, bienes raíces

La tabla de insumo-producto, tabla 3.2, presenta las demandas internas durante 1958 sobre la base de las cifras de Leontief. Las unidades en la tabla están expresadas en millones de dólares. Así, por ejemplo, el número 0.173 en la posición 6,5 significa que para producir energía equivalente a $1 millón, es necesario proporcionar $0.173 millones = $173 000 en servicios. De forma similar, 0.037 en la posición 4,2 significa que con el fin de producir artículos metálicos terminados, es necesario gastar $0.037 millones = $37 000 en productos no metálicos básicos.

Tabla 3.2 Demandas internas en 1958 en la economía de Estados Unidos

	NMT	MT	MB	NMB	E	S
NMT	0.170	0.004	0	0.029	0	0.008
MT	0.003	0.295	0.018	0.002	0.004	0.016
MB	0.025	0.173	0.460	0.007	0.011	0.007
NMB	0.348	0.037	0.021	0.403	0.011	0.048
E	0.007	0.001	0.029	0.025	0.358	0.025
S	0.120	0.074	0.104	0.123	0.173	0.234

[†] *Scientific American* (abril de 1965): 26-27.

Por último, las demandas externas estimadas por Leontief sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares) se presentan en la tabla 3.3.

Tabla 3.3 Demandas externas sobre la economía de Estados Unidos en 1958 (en millones de dólares)

NMT	99 640
MT	75 548
MB	14 444
NMB	33 501
E	23 527
S	263 985

Con el fin de manejar la economía de Estados Unidos en 1958 para satisfacer todas las demandas externas, ¿cuántas unidades deben producirse en cada uno de los seis sectores?

Solución La matriz tecnológica está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 99\,640 \\ 75\,548 \\ 14\,444 \\ 33\,501 \\ 23\,527 \\ 263\,985 \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de Leontief, se resta

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.170 & 0.004 & 0 & 0.029 & 0 & 0.008 \\ 0.003 & 0.295 & 0.018 & 0.002 & 0.004 & 0.016 \\ 0.025 & 0.173 & 0.460 & 0.007 & 0.011 & 0.007 \\ 0.348 & 0.037 & 0.021 & 0.403 & 0.011 & 0.048 \\ 0.007 & 0.001 & 0.039 & 0.025 & 0.358 & 0.025 \\ 0.120 & 0.074 & 0.104 & 0.123 & 0.173 & 0.234 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la inversa de una matriz de 6×6 es una actividad laboriosa. Los siguientes resultados (redondeados a tres cifras decimales) se obtuvieron usando MATLAB:

$$(I - A)^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1.234 & 0.014 & 0.007 & 0.064 & 0.006 & 0.017 \\ 0.017 & 1.436 & 0.056 & 0.014 & 0.019 & 0.032 \\ 0.078 & 0.467 & 1.878 & 0.036 & 0.044 & 0.031 \\ 0.752 & 0.133 & 0.101 & 1.741 & 0.065 & 0.123 \\ 0.061 & 0.045 & 0.130 & 0.083 & 1.578 & 0.059 \\ 0.340 & 0.236 & 0.307 & 0.315 & 0.376 & 1.349 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto el vector de la salida "ideal" está dado por

$$\mathbf{x} = (I - A)^{-1}\mathbf{e} \approx \begin{pmatrix} 131\,033.21 \\ 120\,458.90 \\ 80\,680.56 \\ 178\,732.04 \\ 66\,929.26 \\ 431\,562.04 \end{pmatrix}$$

Esto significa que se requería aproximadamente de 131 033 unidades (equivalentes a $131 033 millones) de productos no metálicos terminados, 120 459 unidades de productos metálicos terminados, 80 681 unidades de productos metálicos básicos, 178 732 unidades de productos no metálicos básicos, 66 929 unidades de energía y 431 562 unidades de servicios, para manejar la economía de Estados Unidos y cumplir con las demandas externas en 1958.

En la sección 2.2 se encontró la primera forma del teorema de resumen (teorema 2.2.1). Ahora se puede mejorar. El siguiente teorema establece que varias afirmaciones sobre la inversa, la unicidad de las soluciones, la equivalencia por renglones y los determinantes son equivalentes. En este momento, se puede probar la equivalencia de los incisos *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *v*). La prueba concluirá después de desarrollar cierta teoría básica sobre determinantes (vea el teorema 3.11.1).

TEOREMA 6

Teorema de resumen

Sea A una matriz de $n \times n$. Por lo que las seis afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n, de $n \times n$; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vi) $\det A \neq 0$ (hasta ahora sólo se ha definido $\det A$ si A es una matriz de 2×2).

DEMOSTRACIÓN

Ya se ha visto que las afirmaciones *i*), *iii*), *iv*) y *vi*) son equivalentes [teorema 5]. Se demostrará que *ii*) y *iv*) son equivalentes. Suponga que *ii*) se cumple. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes; de otra manera al menos una columna de esta forma no tendría pivote y entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tendría un número infinito de soluciones porque se podría dar un valor arbitrario a la variable correspondiente a esa columna (los coeficientes en la columna son cero). Pero si la forma escalonada reducida por renglones de A tiene n pivotes, entonces se trata de I_n.

Inversamente, suponga que *iv*) se cumple; esto es, suponga que A es equivalente por renglones a I_n. Entonces por el teorema 5, inciso *i*), A es invertible y, por el teorema 5, inciso *iii*), la solución única de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Así, *ii*) y *iv*) son equivalentes. En el teorema 2.2.1 se demostró que *i*) y *vi*) son equivalentes en el caso de 2×2. Se probará la equivalencia de *i*) y *vi*) en la sección 3.10.

Observación. Si la forma escalonada por renglones de A tiene n-pivotes, entonces tiene la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & & r_{1n} \\ 0 & 1 & r_{23} & & r_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & & r_{3n} \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Es decir, R es una matriz con unos en la diagonal y ceros debajo de ella.

Para verificar que $B = A^{-1}$ se debe comprobar que $AB = BA = I$. Resulta que sólo se tiene que hacer la mitad de este trabajo.

TEOREMA 7

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces A es invertible y $B = A^{-1}$ ya sea si *i*) $BA = I$ o si *ii*) $AB = I$.

DEMOSTRACIÓN

i) Se supone que $BA = I$. Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si se multiplican por la izquierda ambos lados de esta ecuación por B, se obtiene

$$BA\mathbf{x} = B\mathbf{0} \tag{18}$$

Pero $BA = I$ y $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que (18) se convierte en $I\mathbf{x} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto muestra que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por el teorema 6, incisos *i*) y *ii*), esto quiere decir que A es invertible. Todavía debe demostrarse que $B = A^{-1}$. Sea $A^{-1} = C$. Entonces, $AC = I$. Así

$$BAC = B(AC) = BI = B \quad \text{y} \quad BAC = (BA)C = IC = C$$

Por lo tanto, $B = C$ y el inciso *i*) queda demostrado.

ii) Sea $AB = I$. Entonces del inciso *i*), $A = B^{-1}$. De la definición 2 esto significa que $AB = BA = I$, lo que prueba que A es invertible y que $B = A^{-1}$. Esto completa la demostración.

AUTOEVALUACIÓN

I. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es correcta

a) Toda matriz cuadrada tiene inversa.

b) Una matriz cuadrada tiene inversa si su reducción por renglones lleva a un renglón de ceros.

c) Una matriz cuadrada es invertible si tiene inversa.

d) Una matriz cuadrada B es la inversa de A si $AI = B$.

II. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre un sistema de ecuaciones en forma de matriz?

a) Es de la forma $A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Si tiene una solución única, la solución será $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

c) Tiene solución si A no es invertible.

d) Tiene una solución única.

III. ¿Cuál de las siguientes matrices es invertible?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

IV. Considere una matriz invertible A y señale cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

a) El producto de A por I es A^{-1}.

b) A es una matriz de 2×3.

c) $A = A^{-1}$.

d) A es una matriz cuadrada.

V. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta sobre el sistema?

$$4x - 5y = 3$$
$$6x + 7y = 4$$

a) No tiene solución porque $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ no es invertible.

b) Tiene solución $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

c) Si tuviera una solución se encontraría resolviendo $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) Su solución es $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Desarrollo de competencias 3.4

En los problemas 1 a 21 determine si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -12 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

22. Muestre que si A, B y C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

23. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son matrices invertibles de $n \times n$, muestre que $A_1 \cdot A_2, \cdots, A_m$ es invertible y calcule su inversa.

24. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ es su propia inversa.

25. Muestre que la matriz $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es su propia inversa si $A = \pm I$ o si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a_{11}^2$.

26. Encuentre el vector de producción $\mathbf{x}$ en el modelo de insumo-producto de Leontief si $n = 3$, $\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

***27.** Asuma que A es de $n \times m$ y B es de $m \times n$, de manera que AB es de $n \times n$. Demuestre que AB no es invertible si $n > m$. [*Sugerencia:* Muestre que existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y luego aplique el teorema 6.]

***28.** Utilice los métodos de esta sección para encontrar las inversas de las siguientes matrices con elementos complejos:

a) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$

29. Demuestre que para todo número real θ la matriz $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

30. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

31. Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ se llama **diagonal** si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son cero. Esto es $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ (la matriz del problema 30 es diagonal). Demuestre que una matriz diagonal es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

32. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal tal que sus componentes en la diagonal principal son todas diferentes de cero. Calcule A^{-1}.

33. Calcule la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

34. Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible.

***35.** Una matriz cuadrada se llama **triangular superior (inferior)** si todos sus elementos abajo (arriba) de la diagonal principal son cero (la matriz en el problema 33 es triangular superior y la matriz en el problema 34 es triangular inferior). Demuestre que una matriz triangular superior o triangular inferior es invertible si y sólo si cada uno de los elementos de la diagonal es diferente de cero.

36. Demuestre que la inversa de una matriz invertible es triangular superior. [*Sugerencia*: Primero demuestre el resultado para una matriz de 3×3.]

En los problemas 37 y 38 se da una matriz. En cada caso demuestre que la matriz no es invertible encontrando un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

37. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix}$

39. Sean A, B, F, y M matrices invertibles de $m \times n$. Si $M = I + F(\lambda I - A_F) - 1\ B$ y $A_F = A + BF$.

Demuestre que $M^{-1} = B^{-1}\,(\lambda I - A_F)\,(\lambda I - A)^{-1}B$.

40. Sean A, B, C, D, F y N matrices invertibles de $m \times n$. Si $N = D + C_F(\lambda I - A_F)^{-1}B$, $M^{-1} = B^{-1}\,(\lambda I - A_F)\,(\lambda I - A)^{-1}B$, $\quad \mathrm{CF} = \mathrm{C} + DF$ y $A_F = A + BF$.

Demuestre que $NM^{-1} = D + C(\lambda I - A)^{-1}B$.

41. Una fábrica de muebles de calidad tiene dos divisiones: un taller de máquinas herramienta donde se fabrican las partes de los muebles, y una división de ensamble y terminado en la que se unen las partes para obtener el producto final. Suponga que se tienen 12 empleados en el taller y 20 en la división y que cada empleado trabaja 8 horas. Suponga también que se producen únicamente dos artículos: sillas y mesas. Una silla requiere $\frac{384}{17}$ horas de maquinado y $\frac{480}{17}$ horas de ensamble y terminado. Una mesa requiere $\frac{240}{17}$ horas de maquinado y $\frac{640}{17}$ horas de ensamble y terminado. Suponiendo que se tiene una demanda ilimitada de estos productos y que el fabricante desea mantener ocupados a todos sus empleados, ¿cuántas sillas y cuántas mesas puede producir esta fábrica al día?

42. La alacena de ingredientes mágicos de una hechicera contiene 10 onzas de tréboles de cuatro hojas molidos y 14 onzas de raíz de mandrágora en polvo. La alacena se resurte en forma automática siempre y cuando ella termine con todo lo que tiene. Una poción de amor requiere $\frac{1}{13}$ onzas de tréboles y $2\frac{2}{13}$ onzas de mandrágora. Una receta de un conocido tratamiento para el resfriado común requiere $5\frac{5}{13}$ onzas de tréboles y $10\frac{10}{13}$ onzas de mandrágora. ¿Qué cantidad de la poción de amor y del remedio para resfriado debe combinar la hechicera para usar toda la reserva en su alacena?

43. Un granjero nutre a su ganado con una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10% del requerimiento diario de proteína y 15% del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100% de los requerimientos mínimos diarios de proteínas y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe recibir un novillo al día?

44. Una versión muy simplificada de una tabla de insumo-producto para la economía de Israel en 1958 divide dicha economía en tres sectores —agricultura, manufactura y energía— con los siguientes resultados.[†]

	Agricultura	Manufactura	Energía
Agricultura	0.293	0	0
Manufactura	0.014	0.207	0.017
Energía	0.044	0.010	0.216

a) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener una unidad de producto agrícola?

b) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 200 000 unidades de productos de esta naturaleza?

c) ¿Cuántas unidades de producción agrícola se requieren para obtener 50 000 unidades de energía?

d) ¿Cuántas unidades de energía se requieren para obtener 50 000 unidades de productos agrícolas?

45. Si se continúa con el problema 44, las exportaciones (en miles de libras israelíes) en 1958 fueron las siguientes:

Agricultura	13 213
Manufactura	17 597
Energía	1 786

a) Calcule la matriz tecnológica y la de Leontief.

b) Determine el valor en libras israelíes de los productos agrícolas, la energía y los artículos manufacturados necesarios para hacer funcionar este modelo y exportar el valor establecido de cada producto.

[†] Wassily Leontief, *Input-output Economics* (Nueva York: Oxford University Press, 1966), 54-57.

En los problemas 46 a 53 calcule la forma escalonada por renglones de la matriz dada y utilícela para determinar en forma directa si es invertible.

46. La matriz del problema 4.

47. La matriz del problema 1.

48. La matriz del problema 5.

49. La matriz del problema 10.

50. La matriz del problema 13.

51. La matriz del problema 16.

52. La matriz del problema 18.

53. La matriz del problema 19.

54. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y suponga que $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$. Derive la fórmula (12) mediante reducción por renglones de la matriz aumentada $\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 1 \end{array}\right)$.

55. Demuestre los incisos *i*), *ii*) y *iv*) del teorema 5.

56. Calcule la inversa de $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ donde A es una matriz cuadrada. (*Sugerencia:* Revise la multiplicación de matrices por bloques en la sección 3.2.)†

57. Considere que A_{11} y A_{22} son invertibles y encuentre la inversa de $\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

58. Si A y B son matrices invertibles, resuelva para X:

a) $BXA = B$

b) $A^{-1}X = A$

Respuestas a la autoevaluación

I. *c)* **II.** *b)* **III.** *c)* **IV.** *d)* **V.** *c)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Para obtener la inversa de una inversa se procede de la forma siguiente. Una vez que se tiene a la matriz en la pila, se oprime la tecla [1/x]. Si la matriz no es invertible aparecerán símbolos de infinito en alguna(s) posición(es) de la matriz resultante.

De los problemas 59 a 62 utilice la calculadora para calcular la inversa de la matriz dada.

59. $\begin{pmatrix} 1.6 & 2.3 & 7.5 \\ -4.2 & 3.9 & 5.7 \\ -6.8 & -0.9 & 4.1 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} 20 & 37 & 11 \\ 26 & 49 & 10 \\ 57 & 98 & 36 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} -0.03 & 0.21 & 0.46 & -0.33 \\ -0.27 & 0.79 & 0.16 & 0.22 \\ 0.33 & 0.02 & 0 & -0.88 \\ 0.44 & -0.68 & 0.37 & 0.79 \end{pmatrix}$

† David Carlson presentó este problema y el siguiente en su artículo "Teaching Linear Álgebra: Must the Fog Always Roll in?" En *The Collage Mathematics Journal*, 24(1), enero de 1993, 29-40.

62. $\begin{pmatrix} 23.46 & -59.62 & 38.36 & -44.21 \\ -59.32 & 77.01 & 91.38 & 50.02 \\ 36.38 & 67.92 & -81.31 & 15.06 \\ -61.31 & -70.80 & 43.59 & 71.22 \end{pmatrix}$

63. Demuestre que la inversa de

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 & 4 \\ 0 & 8 & 13 & 22 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

tiene ceros debajo de la diagonal.

64. Haga lo mismo para la matriz

$$\begin{pmatrix} 23.1 & -42.1 & -63.7 & -19.4 & 23.8 \\ 0 & -14.5 & 36.2 & -15.9 & 61.3 \\ 0 & 0 & -37.2 & 64.8 & 23.5 \\ 0 & 0 & 0 & 91.2 & 13.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 46.9 \end{pmatrix}$$

65. Las matrices en los problemas 63 y 64 se llaman **triangulares superiores**. Haciendo uso de los resultados de dichos problemas obtenga una conclusión sobre la inversa de una matriz triangular superior.

3.5 TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

En correspondencia a toda matriz existe otra que tiene propiedades muy similares a las de la matriz original.

DEFINICIÓN 1

Transpuesta

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$. Entonces la **transpuesta** de A, que se escribe A^t, es la matriz de $n \times m$ que se obtiene al intercambiar los renglones por las columnas de A. De manera breve, se puede escribir $A^t = (a_{ji})$. En otras palabras

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Simplemente se coloca el renglón i de A como la columna i de A^t y la columna j de A como el renglón j de A^t.

EJEMPLO 1 **Obtención de las transpuestas de tres matrices**

Encuentre las transpuestas de las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 4 & 6\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -6\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

Solución Al intercambiar los renglones y las columnas de cada matriz se obtiene

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad B'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\\ 1 & 6\end{pmatrix} \qquad C'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 2 & -3 & 1 & -1\\ -6 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

Observe, por ejemplo, que 4 es la componente en el renglón 2 y la columna 3 de C mientras que 4 es la componente en el renglón 3 y la columna 2 de C^t. Esto significa que el elemento 2,3 de C es el elemento (3,2) de C^t.

TEOREMA 1

Suponga que $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times m$ y $B(b_{ij})$ es una matriz de $m \times p$. Entonces

i) $(A^t)^t = A$. **(2)**

ii) $(AB)^t = B^tA^t$. **(3)**

iii) Si A y B son de $n \times m$, entonces $(A + B)^t = A^t + B^t$. **(4)**

iv) Si A es invertible, entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. **(5)**

DEMOSTRACIÓN

i) Esto sigue directamente de la definición de la transpuesta.

ii) Primero, se observa que AB es una matriz de $n \times p$, de manera que $(AB)^t$ es de $p \times n$. También B^t es de $p \times m$ y A^t es de $m \times n$, de manera que B^tA^t es de $p \times n$. De esta forma, ambas matrices en la ecuación (3) tienen el mismo tamaño. Ahora, el elemento ij de AB es $\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, y éste es el elemento ji de $(AB)^t$. Sean $C = B^t$ y $D = A^t$. Entonces el elemento ij, c_{ij}, de C es b_{ji} y el elemento ij, d_{ij}, de D es a_{ji}. Así, el elemento ji de CD = elemento ji de $B^tA^t = \sum_{k=1}^{m} c_{jk}d_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}a_{ik} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ = elemento ji de $(AB)^t$. Lo dicho completa la demostración de la parte *ii*).

iii) Esta parte se deja como ejercicio (vea el problema 14).

iv) Sea $A^{-1} = B$. Entonces $AB = BA = I$ de manera que, del inciso *ii*), $(AB)^t = B^tA^t = I^t = I$ y $(BA)^t = A^tB^t = I$. Por lo tanto, A^t es invertible y B^t es el inverso de A^t, es decir, $(A^t)^{-1} = B^t = (A^{-1})^t$.

La transpuesta juega un papel de suma importancia en la teoría de matrices. En capítulos posteriores se verá que A y A^t tienen muchas propiedades en común. Como las columnas de A^t son renglones de A se podrán establecer hechos sobre la transpuesta para concluir que casi todo lo que es cierto para los renglones de una matriz se cumple para sus columnas.

La siguiente definición es fundamental en la teoría de matrices.

DEFINICIÓN 2 **Matriz simétrica**

La matriz (cuadrada) A de $n \times n$ se denomina **simétrica** si $A^t = A$. Es decir, las columnas de A son también los renglones de A.

EJEMPLO 2 **Cuatro matrices simétricas**

Las siguientes cuatro matrices son simétricas:

$$I \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

En la unidad 5 se verá la importancia de las matrices simétricas reales.

OTRA FORMA DE ESCRIBIR EL PRODUCTO ESCALAR

Sean $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ dos vectores columna con n componentes. Entonces, de la ecuación (1) en la página 61,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_2 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Ahora bien, $\mathbf{a}$ es una matriz de $n \times 1$ de manera que a^t es una matriz de $1 \times n$ y

$$\mathbf{a}^t = (a_1, a_2 \ldots a_n)$$

Entonces $\mathbf{a}^t\mathbf{b}$ es una matriz de 1×1 (o escalar), y por la definición de la multiplicación de matriz

$$\mathbf{a}^t\mathbf{b} = (a_1 a_2 \cdots a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

De ese modo, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores columna de n componentes, entonces

$$\boxed{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^t\mathbf{b}} \qquad (6)$$

La fórmula (6) será de utilidad más adelante en este libro.

AUTOEVALUACIÓN

I. Si una matriz A es de 3×4, entonces A^t es una matriz de _____.

a) 4×3 *b*) 3×4 *c*) 3×3 *d*) 4×4

II. *Falso-verdadero*: A^t está definida sólo si A es una matriz cuadrada.

III. *Falso-verdadero*: Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la diagonal principal de A^t es la misma que la diagonal principal de A.

IV. *Falso-verdadero*: $[(A^t)^t]^t = A^t$

V. La transpuesta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es _____.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *d*) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 3.5

En los problemas 1 a 13 encuentre la transpuesta de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 7 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

14. Sean A y B matrices de $n \times m$. Demuestre, usando la definición 1, que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

15. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $A\,A^t = A^t\,A$. Pruebe que la siguiente matriz es normal.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

16. Encuentre los números α y β tales que $\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 2 \\ \beta & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es simétrica.

17. Si A y B son matrices simétricas de n $\times$ n, pruebe que $A + B$ es simétrica.

18. Si A y B son matrices simétricas de n $\times$ n, demuestre que $(AB)^t = BA$.

19. Demuestre que para cualquier matriz A la matriz producto AA^t está definida y es una matriz simétrica.

20. Demuestre que toda matriz diagonal es simétrica (vea el problema 3.4.31).

21. Demuestre que la transpuesta de toda matriz diagonal superior es triangular inferior (vea el problema 3.4.35).

22. Una matriz cuadrada se denomina **antisimétrica** si $A^t = -A$ (es decir $a_{ij} = -a_{ji}$). ¿Cuáles de las siguientes matrices son antisimétricas?

a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

23. Sean A y B dos matrices antisimétricas de $n \times n$. Demuestre que $A + B$ es antisimétrica.

24. Si A es una matriz real antisimétrica, demuestre que toda componente en la diagonal principal de A es cero.

25. Si A y B son matrices antisimétricas de $n \times n$, demuestre que $(AB)^t = BA$ de manera que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

26. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}(A + A^t)$ es simétrica.

27. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que la matriz $\frac{1}{2}(A - A^t)$ es antisimétrica.

***28.** Demuestre que cualquier matriz cuadrada se puede escribir de una forma única como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

***29.** Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz con elementos reales no negativos que tiene las propiedades siguientes: *i)* $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ y $a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$ y *ii)* $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix} = 0$. Demuestre que A es invertible y que $A^{-1} = A^t$.

De los problemas 30 a 34 calcule $(A^t)^{-1}$ y $(A^{-1})^t$ y demuestre que son iguales.

30. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **31.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **32.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

33. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **34.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *a)* **II.** *F)* **III.** *V)* **IV.** *V)* **V.** *b)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Para obtener A^t una vez que se tiene a la matriz en la pila se oprime la siguiente secuencia de teclas (observación: se considera que se está trabajando en modo RPN y con la bandera (flag) 117 en la posición SOFT)

3.6 MATRICES ELEMENTALES Y MATRICES INVERSAS

Considere que A es una matriz de $m \times n$. Entonces, como se muestra a continuación, se pueden realizar operaciones elementales con renglones en A multiplicando A por la izquierda por una matriz adecuada. Las operaciones elementales con renglones son:

i) Multiplicar el renglón i por un número c diferente de cero $\quad R_i \to cR_i$

ii) Sumar un múltiplo del renglón i al renglón j $\quad R_j \to R_j + cR_i$

iii) Permutar (intercambiar) los renglones i y j $\quad R_i \rightleftarrows R_j$

DEFINICIÓN 1 **Matriz elemental**

Una matriz (cuadrada) E de $n \times n$ se denomina una **matriz elemental** si se puede obtener a partir de la matriz identidad, I_n, de $n \times n$ mediante *una sola* operación elemental con renglones.

Notación. Una matriz elemental se denota por E, o por cR_i, $R_j + cR_i$, o por P_{ij} de acuerdo con la forma en que se obtuvo de I. En este caso, P_{ij} es la matriz obtenida a partir del intercambio de los renglones de i y j de I.

EJEMPLO 1 **Tres matrices elementales**

Obtenga tres matrices elementales de 3×3.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 5R_2$

Matriz obtenida multiplicando el segundo renglón de I por 5

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3 - 3R_1$

Matriz obtenida multiplicando el primer renglón de I por -3 y sumándolo al tercer renglón

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightleftarrows R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P_{23}$

Matriz obtenida permutando el segundo y tercer renglones de I

La prueba del siguiente teorema se deja como ejercicio (vea los problemas 68 a 70).

TEOREMA 1 Para realizar una operación elemental en una matriz A se multiplica A por la izquierda por la matriz elemental adecuada.

EJEMPLO 2 **Operaciones elementales mediante la multiplicación por matrices elementales**

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$. Realice las siguientes operaciones elementales con los renglones de A multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental adecuada.

i) Multiplique el segundo renglón por 5.

ii) Multiplique el primer renglón por -3 y súmelo al tercer renglón.

iii) Permute el segundo y tercer renglones.

Solución Como A es una matriz de 3×4, cada matriz elemental E debe ser de 3×3, ya que E debe ser cuadrada y multiplica a A por la izquierda. Se usan aquí los resultados del ejemplo 1.

i) $$(5R_2)A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 20 & 10 & 15 & -25\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$$

ii) $$(R_3-3R_1)A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 0 & -8 & -8 & 1\end{pmatrix}$$

iii) $$(P_{23})A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & 3 & -5\\ 3 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 1 & -2 & 4\\ 4 & 2 & 3 & -5\end{pmatrix}$$

Considere los siguientes tres productos, con $c \neq 0$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{c} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ c & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -c & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad (3)$$

Las ecuaciones (1), (2) y (3) indican que toda matriz elemental es invertible y que su inversa es del mismo tipo (tabla 3.4). Estos datos se deducen a partir del teorema 1. Es obvio que si se realizan las operaciones $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ seguida de $R_j \rightarrow R_j - cR_i$ sobre la matriz A, la matriz A

no cambia. También $R_i \to cR_i$ seguida de $R_i \to \frac{1}{c} R_i$, y la permuta de los mismos dos renglones dos veces deja la matriz A sin cambio. Se tiene

$$(cR_i)^{-1} = \frac{1}{c} R_i \tag{4}$$

$$(R_j + cR_i)^{-1} = R_j - cR_i \tag{5}$$

$$(P_{ij})^{-1} = P_{ij} \tag{6}$$

La ecuación (6) indica que

Toda matriz de permutación elemental es su propia inversa.

Resumiendo los resultados:

Tabla 3.4

Matriz elemental tipo E	Efecto de multiplicar A por la izquierda por E	Representación simbólica de las operaciones elementales	Al multiplicar por la izquierda, E^{-1} hace lo siguiente	Representación simbólica de la operación inversa
Multiplicación	Multiplica el renglón i de A por $c \neq 0$	cR_i	Multiplica el renglón i de A por $\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c} R_i$
Suma	Multiplica el renglón i de A por c y lo suma al renglón j	$R_j + cR_i$	Multiplica el renglón i de A por $-c$ y lo suma al renglón j	$R_j - cR_i$
Permutación	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}	Permuta los renglones i y j de A	P_{ij}

TEOREMA 2

Toda matriz elemental es invertible. El inverso de una matriz elemental es una matriz del mismo tipo.

Nota. El inverso de una matriz elemental se puede encontrar por inspección. No es necesario realizar cálculos.

TEOREMA 3

Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN

Sea $A = E_1, E_2, \ldots, E_m$ donde cada E_i es una matriz elemental. Por el teorema 2, cada E_i es invertible. Más aún, por el teorema 3.4.3 A es invertible[†] y

[†] Aquí se usó la generalización del teorema 3.4.3 para más de dos matrices. Vea, por ejemplo, el problema 3.4.22.

$$A^{-1} = E_m^{-1} E_{m-1}^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$$

En forma inversa, suponga que A es invertible. De acuerdo con el teorema 3.4.6 (teorema de resumen), A es equivalente por renglones a la matriz identidad, lo que significa que A se puede reducir a I mediante un número finito de operaciones elementales. Para el teorema 1 cada operación de este tipo se logra multiplicando A por la izquierda por una matriz elemental y, por consiguiente, existen matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_m$ tales que

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2 E_1 A = I$$

Así, del teorema 3.4.7,

$$E_m, E_{m-1}, \ldots, E_2 E_1 = A^{-1}$$

y como cada E_i, es invertible por el teorema 2,

$$A = \left(A^{-1}\right)^{-1} = (E_m E_{m-1} \cdots E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{m-1}^{-1} E_m^{-1} \qquad (7)$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental, se ha escrito A como el producto de matrices elementales y esto completa la prueba.

EJEMPLO 3 Cómo escribir una matriz invertible como el producto de matrices elementales

Demuestre que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

Solución Ya se ha trabajado con esta matriz, en el ejemplo 2.3.1. Para resolver el problema se reduce A a I y se registran las operaciones elementales con renglones. En el ejemplo 3.4.6 se redujo A a I haciendo uso de las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{llll} \frac{1}{2}R_1 & R_2 - 4R_1 & R_3 - 3R_1 & -\frac{1}{3}R_2 \\ R_1 - 2R_2 & R_3 + 5R_2 & -R_3 & R_1 + R_3 \\ R_2 - 2R_3 & & & \end{array}$$

A^{-1} se obtuvo comenzando con I y aplicando estas nueve operaciones elementales. De este modo, A^{-1} es el producto de nueve matrices elementales:

$$A^{-1} = \underset{R_2 - 2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 + R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 + 5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1 - 2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{-\frac{1}{3}R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3 - 3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2 - 4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-\frac{1}{2}R_1}{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Por lo que $A = (A^{-1})^{-1}$ = producto de las inversas de las nueve matrices en orden opuesto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \underset{2R_1}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2+4R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_3+3R_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-3R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_1+2R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\times \underset{R_3-5R_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}} \underset{-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{R_1-R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \underset{R_2+2R_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Se puede hacer uso del teorema 3 para extender el teorema de resumen, cuya última versión se presentó en la sección 3.4.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una afirmación es cierta, todas son ciertas, y si una es falsa, todas son falsas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v) A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$ (por ahora, $\det A$ está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

Existe un resultado adicional que será útil en la sección 3.9. En primera instancia se necesita una definición (dada antes en el problema 3.4.35).

DEFINICIÓN 2 **Matriz triangular superior y matriz triangular inferior**

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior (inferior)** si todas sus componentes abajo (arriba) de la diagonal principal son cero.

Nota. a_{ij} está debajo de la diagonal principal si $i > j$.

EJEMPLO 4 **Dos matrices triangulares superiores y dos matrices triangulares inferiores**

Las matrices U y V son triangulares superiores mientras que las matrices L y M son triangulares inferiores:

$$U=\begin{pmatrix}2&-3&5\\0&1&6\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix}1&5\\0&-2\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}0&0\\5&1\end{pmatrix} \qquad M=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-5&4&0&0\\6&1&2&0\\3&0&1&5\end{pmatrix}$$

TEOREMA 5

Sea A una matriz cuadrada. Entonces A se puede escribir como un producto de matrices elementales y una matriz triangular superior U. En el producto, las matrices elementales se encuentran a la izquierda y la matriz triangular superior a la derecha.

DEMOSTRACIÓN

La eliminación gaussiana para resolver el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ da como resultado una matriz triangular superior. Para que esto sea evidente, observe que la eliminación gaussiana terminará cuando la matriz esté en la forma escalonada por renglones, y la forma escalonada por renglones de una matriz cuadrada sea triangular superior. Se denota mediante U a la forma escalonada por renglones de A. Entonces A se reduce a U a través de una serie de operaciones elementales por renglón, cada una de las cuales se puede obtener multiplicando por una matriz elemental. Así,

$$U=E_mE_{m-1}\ldots E_2E_1A$$

y

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}\ldots E_{m-1}^{-1}E_m^{-1}U$$

Como la inversa de una matriz elemental es una matriz elemental se ha escrito A como el producto de matrices elementales y U.

EJEMPLO 5 **Cómo escribir una matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior**

Escriba la matriz

$$A=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}$$

como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Solución Se reduce A por renglones para obtener la forma escalonada por renglones:

$$\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-R_1]{R_2\to R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&-1&5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=U$$

Después, al trabajar hacia atrás, se ve que

$$U=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}=\underset{R_3+R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_2-2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\frac{1}{3}R_1}{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{A}{\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}}$$

y tomando las inversas de las cuatro matrices elementales se obtiene

$$A=\begin{pmatrix}3&6&9\\2&5&1\\1&1&8\end{pmatrix}=\underset{3R_1}{\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_2+2R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

$$\times\underset{R_3+R_1}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}\underset{R_3-R_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}}\underset{U}{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&-5\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

Autoevaluación

De las afirmaciones siguientes indique si son falsas o verdaderas

I. El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

II. El inverso de una matriz elemental es una matriz elemental.

III. Toda matriz se puede escribir como el producto de matrices elementales.

IV. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales.

V. Toda matriz invertible se puede escribir como el producto de matrices elementales.

VI. Toda matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

Elija la opción que represente la respuesta correcta

VII. La inversa de $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$ es _____.

a) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

VIII. La inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ es _____.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

IX. La inversa de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es _____.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 3.6

De los problemas 1 a 15 determine cuáles matrices **son** matrices elementales.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 16 a 26 escriba la matriz elemental de 3×3 que lleva a cabo las operaciones con renglones dadas sobre una matriz A de 3×5 mediante multiplicaciones por la izquierda.

16. $R_2 \to 4R_2$ **17.** $R_2 \to R_2 + 2R_1$ **18.** $R_3 \to R_3 + 3R_2$

19. $R_1 \to R_1 - 3R_2$ **20.** $R_1 \to R_1 + 4R_3$ **21.** $R_1 \rightleftarrows R_3$

22. $R_2 \rightleftarrows R_3$ **23.** $R_1 \rightleftarrows R_2$ **24.** $R_2 \to R_2 + R_3$

25. $R_3 \to -R_3$ **26.** $R_1 \to R_1 - 4R_2$

De los problemas 27 a 39 encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$.

27. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$

28. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$

29. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

30. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

31. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

32. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

33. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

34. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

35. $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

37. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

38. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -27 & -3 \end{pmatrix}$

39. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

De los problemas 40 a 52 encuentre la inversa de la matriz elemental dada.

40. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

42. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

44. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 53 a 62 demuestre que cada matriz es invertible y escríbala como un producto de matrices elementales.

53. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **54.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **55.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **57.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **58.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **61.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

63. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donde $ac \neq 0$. Escriba A como un producto de tres matrices elementales y concluya que A es invertible.

64. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ donde $adf \neq 0$. Escriba A como un producto de seis matrices elementales y concluya que A es invertible.

***65.** Sea A una matriz triangular superior de $n \times n$. Pruebe que si toda componente en la diagonal de A es diferente de cero, entonces A es invertible. [*Sugerencia:* Remítase a los problemas 63 y 64.]

***66.** Demuestre que si A es una matriz triangular superior de $n \times n$ con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A^{-1} es triangular superior.

***67.** Utilice el teorema 3.5.1 *iv*), y el resultado del problema 66 para demostrar que si A es una matriz triangular inferior con componentes diferentes de cero en la diagonal, entonces A es invertible y A^{-1} es triangular inferior.

68. Demuestre que si P_{ij} es la matriz de $n \times n$ obtenida permutando los renglones i y j de I_n, entonces $P_{ij}A$ es la matriz obtenida al permutar los renglones i y j de A.

69. Sea A_{ij} la matriz con c en la posición ji, unos en la diagonal y ceros en otro lado. Demuestre que $A_{ij}A$ es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c y sumarlo al renglón de j.

70. Sea M_i la matriz con c en la posición ii, unos en las otras posiciones de la diagonal, y ceros en otro lado. Demuestre que M_iA es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de A por c.

De los problemas 71 a 78 escriba cada matriz cuadrada como un producto de matrices elementales y de una matriz triangular superior.

71. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ **72.** $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ **73.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

74. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **75.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ **76.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

77. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **78.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *F* II. *V* III. *F* IV. *F* V. *V* VI. *V*

VII. *a*) VIII. *b*) IX. *d*)

3.7 DETERMINANTES

DEFINICIÓN 1

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. En la sección 3.4 en la página 94 se definió el determinante de A por

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1}$$

Con frecuencia se denotará det A por

$$|A| \quad \text{o} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Observación. No hay que confundir esta notación con las barras de valor absoluto. $|A|$ denota det A si A es una matriz cuadrada. $|x|$ denota el valor absoluto de x si x es un número real o complejo.

Se demostró que A es invertible, si y sólo si, det $A \neq 0$. Como se verá más adelante, este importante teorema es válido para las matrices de $n \times n$.

En este capítulo se desarrollarán algunas propiedades básicas de los determinantes y se verá cómo se pueden utilizar para calcular la inversa de una matriz y resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

El determinante de una matriz de $n \times n$ se definirá de manera *inductiva*. En otras palabras, se usará lo que se sabe sobre un determinante de 2×2 para definir un determinante de 3×3, que a su vez se usará para definir un determinante de 4×4, y así sucesivamente. Se comienza por definir un determinante de 3×3.[†]

DEFINICIÓN 2 **Determinante de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Entonces

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Observe el signo *menos* antes del segundo término del lado derecho de (3).

EJEMPLO 1 **Cálculo de un determinante de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule $|A|$.

Solución

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 2 - 5 \cdot 19 + 2 \cdot 10 = -69$$

EJEMPLO 2 **Cálculo de un determinante de 3 × 3**

Calcule $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix}$.

Solución

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$$
$$= 2 \cdot 12 + 3(-3) + 5(-3) = 0$$

Hay otro método con el que se pueden calcular determinantes de 3×3. De la ecuación (3) se tiene

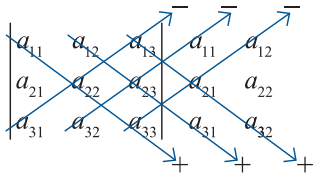
[†] Existen varias maneras de definir un determinante y ésta es una de ellas. Es importante darse cuenta de que "det" es una función que asigna un *número* a una matriz *cuadrada*.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

es decir

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{33} \tag{4}$$

Se escribe A y se le adjuntan sus primeras dos columnas:



A continuación se calculan los seis productos, poniendo signo *menos* antes de los productos con flechas hacia arriba, y se suman todos. Esto da la suma de la ecuación (4).

EJEMPLO 3 **Cálculo de un determinante de 3 × 3 usando el nuevo método**

Calcule $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ usando el nuevo método.

Solución Si se escribe $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ y se multiplica como lo indican las flechas se obtiene

$$|A| = (3)(2)(4) + (5)(3)(-1) + (2)(4)(2) - (-1)(2)(2) - (2)(3)(3) - (4)(4)(5)$$
$$= 24 - 15 + 16 + 4 - 18 - 80 = -69$$

ADVERTENCIA Este método *no* funciona para determinantes de $n \times n$ si $n > 3$. Si intenta algo similar para determinantes de 4×4 o de orden mayor, obtendrá una respuesta equivocada.

Antes de definir los determinantes de $n \times n$ debe observarse que en la ecuación (3) $\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz que se obtiene al eliminar el primer renglón y la primera columna de A; $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz que se obtiene al eliminar el primer renglón y la segunda columna de A, y $\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ es la matriz obtenida al eliminar el primer renglón y la tercera columna de A. Si estas matrices se denotan por M_{11}, M_{12} y M_{13}, respectivamente, y si $A_{11} = \det M_{11}$, $A_{12} = -\det M_{12}$ y $A_{13} = \det M_{13}$, la ecuación (3) se puede escribir como

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{5}$$

DEFINICIÓN 3 **Menor**

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea M_{ij} la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de A eliminando el renglón i y la columna j. M_{ij} se llama el **menor *ij*** de A.

EJEMPLO 4 **Cálculo de dos menores de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{13} y M_{32}.

Solución Eliminando el primer renglón y la tercera columna de A se obtiene $M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. De manera similar, si se elimina el tercer renglón y la segunda columna se obtiene $M_{32} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 5 **Cálculo de dos menores de una matriz de 4 × 4**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Encuentre M_{32} y M_{24}.

Solución Al quitar el tercer renglón y la segunda columna de A se encuentra que $M_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. De igual manera, $M_{24} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

DEFINICIÓN 4 **Cofactor**

Sea A una matriz de $n \times n$. El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}| \tag{6}$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i + j \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación. La definición 3 tiene sentido a partir de la definición de un determinante de $n \times n$ con la suposición de que ya se sabe lo que es un determinante de $(n-1) \times (n-1)$.

EJEMPLO 6 **Cálculo de dos cofactores de una matriz de 4 × 4**

En el ejemplo 5 se tiene

$$A_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{24} = (-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$$

Ahora se considerará la matriz general de $n \times n$. Aquí

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

DEFINICIÓN 5 **Determinante $n \times n$**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces el determinante de A, denotado por $\det A$ o $|A|$, está dado por

$$\det A = |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} \tag{8}$$

La expresión en el lado derecho de (8) se llama **expansión por cofactores**.

Observación. En la ecuación (8) se define el determinante mediante la expansión por cofactores en el primer renglón de A. En la siguiente sección se verá (teorema 3.8.3) que se obtiene la misma respuesta si se expande por cofactores en cualquier renglón o columna.

EJEMPLO 7 **Cálculo del determinante de una matriz de 4 × 4**

Calcule $\det A$, de donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-92) - 3(-70) + 5(2) - 2(-16) = 160$$

Es obvio que el cálculo del determinante de una matriz de $n \times n$ puede ser laborioso. Para calcular un determinante de 4×4 deben calcularse cuatro determinantes de 3×3. Para calcular un determinante de 5×5 deben calcularse cinco determinantes de 4×4, lo que equivale a calcular veinte determinantes de 3×3. Por fortuna existen técnicas que simplifican estos cálculos. Algunos de estos métodos se presentan en la siguiente sección. Sin embargo, existen algunas matrices para las cuales es muy sencillo calcular los determinantes. Se comienza por repetir la definición dada en la sección 2.5.

DEFINICIÓN 6

Matriz triangular

Una matriz cuadrada se denomina **triangular superior** si todas sus componentes abajo de la diagonal son cero. Es una matriz **triangular inferior** si todas sus componentes arriba de la diagonal son cero. Una matriz se denomina **diagonal** si todos los elementos que no se encuentran sobre la diagonal son cero; es decir, $A = (a_{ij})$ es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para $i > j$, triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para $i < j$, y diagonal si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Observe que una matriz diagonal es tanto triangular superior como triangular inferior.

EJEMPLO 8 Seis matrices triangulares

Las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ son triangulares superiores; $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son triangulares inferiores; I (la matriz identidad) y $E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ son diagonales. Observe que la matriz E es también triangular superior y triangular inferior.

EJEMPLO 9 El determinante de una matriz triangular inferior

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ es triangular inferior. Calcule $\det A$.

Solución

$$\det A = a_{11}A_{11} + 0A_{12} + 0A_{13} + 0A_{14} = a_{11}A_{11}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

El ejemplo 9 se puede generalizar para probar el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces

$$\boxed{\det A = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}} \tag{9}$$

Esto es: *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal.*

DEMOSTRACIÓN

La parte triangular inferior del teorema se deduce del ejemplo 9. Se demostrará la parte triangular superior por inducción matemática comenzando con $n = 2$. Si A es una matriz triangular superior de 2×2, entonces $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot 0 = a_{11}a_{22}$ de manera que el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrará para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n-1) \times (n-1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices excepto la primera tienen una columna de ceros, por lo que por lo menos una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes, excepto el primero, son cero. Por último,

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})$$

lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$.

EJEMPLO 10 **Determinantes de seis matrices triangulares**

Los determinantes de las seis matrices triangulares en el ejemplo 8 son $|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$; $|B| = (-2)(0)(1)(-2) = 0$; $|C| = 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$; $|D| = 0$; $|I| = 1$; $|E| = (2)(-7)(-4) = 56$.

El siguiente teorema será de gran utilidad.

TEOREMA 2 Sea T una matriz triangular superior. Entonces T es invertible si y sólo si $\det T \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Del teorema 1,

$$\det T = a_{11}a_{22} \cap a_{nn}$$

Así $\det T \neq 0$ si y sólo si todos sus elementos en la diagonal son diferentes de cero.

Si $\det T \neq 0$, entonces T se puede reducir por renglones a I de la siguiente manera. Para $i = 1, 2, \ldots, n$, se divide el renglón i de T por $a_{ii} \neq 0$ para obtener

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ésta es la forma escalonada por renglones de T, que tiene n pivotes, T es invertible.

Suponga que $\det T = 0$. Entonces al menos una de las componentes de la diagonal es cero. Sea a_{ii} la primera de estas componentes. Entonces T se puede escribir como

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{i-1,i-1} & a_{i-1,i} & a_{i-1,i+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{i+1,i+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Cuando T se reduce a su forma escalonada por renglones, no se tiene pivote en la columna i (explique por qué). Entonces la forma escalonada por renglones de T tiene menos de n pivotes y por el teorema de resumen se puede concluir que T no es invertible.

Interpretación geométrica del determinante de 2 × 2

Sea $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. En la figura 3.3 se graficaron los puntos (a, c) y (b, d) en el plano xy y se dibujaron los segmentos de recta de $(0, 0)$ a cada uno de estos puntos. Se supone que estas dos rectas no son colineales. Esto equivale a suponer que (b, d) no es un múltiplo de (a, c).

El **área generada por A** se define como el área del paralelogramo con tres vértices en $(0, 0)$, (a, c) y (b, d).

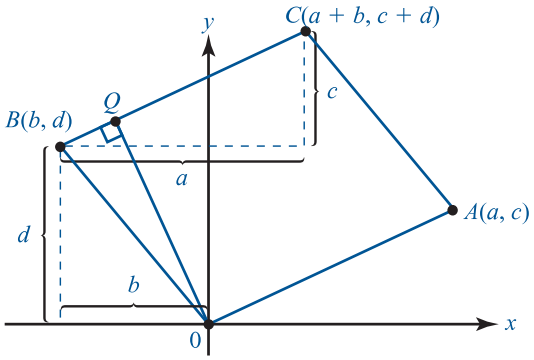


Figura 3.3
Q está en el segmento de línea BC y también en la recta perpendicular a BC que pasa por el origen. El área del paralelogramo es $\overline{0Q} \times \overline{0A}$.

Teorema 3

El área generada por $A = |\det A|$.†

Demostración

Se supone que a y c son diferentes de cero. La prueba para $a = 0$ o $c = 0$ se dejará como ejercicio (vea el problema 18).

El área del paralelogramo = base × altura. La base del paralelogramo en la figura 3.3 tiene longitud $\overline{0A} = \sqrt{a^2 + c^2}$. La altura del paralelogramo es $\overline{0Q}$, de donde $0Q$ es el segmento perpendicular a BC. De la figura se ve que las coordenadas de C, el cuarto vértice del paralelogramo, son $x = a + b$ y $y = c + d$. Así

$$\text{Pendiente de } BC = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+d)-d}{(a+b)-b} = \frac{c}{a}$$

Entonces la ecuación de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{y-d}{x-b} = \frac{c}{a} \quad \text{o} \quad y = \frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a}$$

$$\text{Pendiente de } 0Q = -\frac{1}{\text{pendiente de } BC} = -\frac{a}{c}$$

La ecuación de la recta que pasa por $(0, 0)$ y Q es

$$\frac{(y-0)}{(x-0)} = -\frac{a}{c} \quad \text{o} \quad y = -\frac{a}{c}x$$

† Aquí $|\det A|$ denota el valor absoluto del determinante de A.

Q es la intersección de BC y $0Q$, por lo que satisface ambas ecuaciones. En el punto de intersección se tiene

$$\frac{c}{a}x + d - \frac{bc}{a} = -\frac{a}{c}x$$

$$\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)x = \frac{bc}{a} - d$$

$$\frac{a^2 + c^2}{ac}x = \frac{bc - ad}{a}$$

$$x = \frac{ac(bc - ad)}{a(a^2 + c^2)} = \frac{c(bc - ad)}{a^2 + c^2} = -\frac{c(ad - bc)}{a^2 + c^2} = -\frac{c \det A}{a^2 + c^2}$$

y

$$y = -\frac{a}{c}x = -\frac{a}{c} \cdot -\frac{c \det A}{a^2 + c^2} = \frac{a \det A}{a^2 + c^2}$$

Entonces Q tiene coordenadas $\left(\frac{-c \det A}{a^2 + c^2}, \frac{a \det A}{a^2 + c^2}\right)$

y

$$\overline{0Q} = \text{distancia de } (0, 0) \text{ a } Q = \sqrt{\frac{c^2(\det A)^2}{(a^2 + c^2)^2} + \frac{a^2(\det A)^2}{(a^2 + c^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(c^2 + a^2)(\det A)^2}{(c^2 + a^2)^2}} = \sqrt{\frac{(\det A)^2}{a^2 + c^2}} = \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Finalmente,

$$\text{Área del paralelogramo} = \overline{0A} \times \overline{0Q} = \sqrt{a^2 + c^2} \times \frac{|\det A|}{\sqrt{a^2 + c^2}} = |\det A|$$

Se puede dar una demostración mucho más sencilla de este teorema utilizando la definición de producto cruz de dos vectores.

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuál de los siguientes es el cofactor de 3 en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

a) 8 ***b)*** -8 ***c)*** 3

d) 6 ***e)*** -10 ***f)*** 0

II. ¿Cuál de las siguientes es 0 para toda a y b?

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} a & -b \\ -a & b \end{vmatrix}$ ***c)*** $\begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}$

d) Los determinantes no se pueden establecer porque no se parecen los valores de a y b.

III. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces det $A =$ _____.

a) 0 ***b)*** 12 ***c)*** −12 ***d)*** 6 ***e)*** −6

IV. ¿Cuáles de las siguientes matrices no son invertibles?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 3.7

En los problemas 1 al 13 calcule el determinante.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

14. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, entonces det AB = det A det B.

***15.** Demuestre que si A y B son matrices triangulares inferiores, entonces AB = det A det B.

16. Demuestre que, en general, no se cumple que det $(A + B)$ = det A + det B.

17. Muestre que si A es triangular, entonces det $A \neq 0$ si y sólo si todos los elementos en la diagonal de A son diferentes de cero.

18. Pruebe el teorema 3 cuando A tiene coordenadas $(0, c)$ o $(a, 0)$.

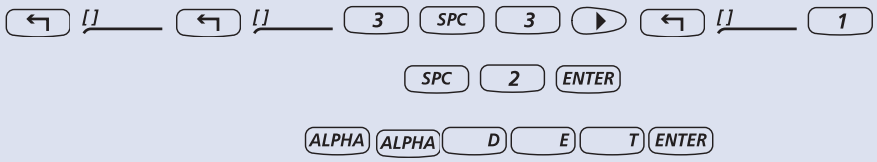
19. **Más sobre la interpretación geométrica del determinante: Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos 2-vectores y sean $\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2$. Demuestre que (área generada por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$) = (área generada por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) $|\det A|$.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *a)* II. *b)* III. *c)* IV. *b), c)*

MANEJO DE LA CALCULADORA

Se puede calcular el determinante de una matriz de una forma sencilla como se muestra a continuación. Una vez que se tiene una matriz en la pila se da el comando DET seguido de la tecla Enter, por ejemplo



En los problemas 20 al 23 utilice una calculadora para encontrar el determinante de cada matriz.

20.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 10 & -6 & 4 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & -12 & 6 \\ 9 & 4 & 13 & 8 & 15 \\ 8 & 11 & -9 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

21.
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ 2 & 9 & 16 & 4 \\ 37 & -6 & 0 & 23 \\ 14 & 4 & 6 & -11 \end{pmatrix}$$

22.
$$\begin{pmatrix} -238 & -159 & 146 & 382 & -189 \\ -319 & 248 & -556 & 700 & 682 \\ 462 & 96 & -331 & 516 & -322 \\ 511 & 856 & 619 & 384 & 906 \\ 603 & -431 & -236 & 692 & -857 \end{pmatrix}$$

23.
$$\begin{pmatrix} 0.62 & 0.37 & 0.42 & 0.56 & 0.33 \\ 0.29 & 0.46 & 0.33 & 0.48 & 0.97 \\ 0.81 & 0.37 & 0.91 & 0.33 & 0.77 \\ 0.35 & 0.62 & 0.73 & 0.98 & 0.18 \\ 0.29 & 0.08 & 0.46 & 0.71 & 0.29 \end{pmatrix}$$

3.8 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Existen algunos problemas en matemáticas que, en estricta teoría, son sencillos pero que en la práctica son imposibles. Piense por ejemplo en el caso de un determinante de una matriz de 50×50. Se puede calcular expandiendo por **cofactores**. Esto implica 50 determinantes de 49×49 que a su vez implican $50 \cdot 49$ determinantes de 48×48 que implican a su vez… $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \ldots \cdot 3$ determinantes de 2×2. Ahora bien, $50 \cdot 49 \ldots \cdot 3 = 50!/2 \approx 1.5 \times 10^{64}$ determinantes de 2×2. Suponga que se cuenta con una computadora que puede calcular un millón $= 10^6$ determinantes de 2×2 por segundo. Tomaría alrededor de 1.5×10^{58} segundos $\approx 4.8 \times 10^{50}$ *años* terminar el cálculo (el universo tiene alrededor de 15 mil millones de años $= 1.5 \times 10^{10}$ años según la versión teórica más reciente). Es obvio que, si bien el cálculo de un determinante de 50×50, siguiendo la definición, es teóricamente directo, en la práctica es imposible.

Por otra parte, la matriz de 50×50 no es tan rara. Piense en 50 tiendas en las que se ofrecen 50 productos diferentes. De hecho, las matrices de $n \times n$ con $n > 100$ surgen con frecuencia en la práctica. Por fortuna, existen cuando menos dos maneras de reducir de manera significativa la cantidad de trabajo necesaria para calcular un determinante.

El primer resultado que se necesita es quizás el teorema más importante sobre determinantes. Este teorema establece que el determinante de un producto es igual al producto de los determinantes.

TEOREMA 1 Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B \tag{1}$$

Es decir: *el determinante del producto es el producto de los determinantes.*

Observación. Note que el producto de la izquierda es un producto de matrices mientras que el de la derecha es de escalares.

DEMOSTRACIÓN Si se utilizan matrices elementales, la prueba está dada en la sección 3.9. En el problema 48 se pide que verifique este resultado para el caso 2×2.

EJEMPLO 1 **Ilustración del hecho de que det *AB* = det *A* det *B***

Verifique el teorema 1 para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución Det $A = 16$ y det $B = -8$. Se puede calcular

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 10 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

y $\det AB = -128 = (16)(-8) = \det A \det B$.

ADVERTENCIA El determinante de la suma *no* siempre es igual a la suma de los determinantes. Es decir, para la mayoría de los pares de matrices, A y B,

$$\det (A + B) \neq \det A + \det B$$

Por ejemplo, sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$:

$$\det A = -2 \quad \det B = 6 \quad \text{y}$$

$$\det (A + B) = 22 \neq \det A + \det B = -2 + 6 = 4$$

TEOREMA 2 $\det A^t = \det A$

DEMOSTRACIÓN

Suponga que $A = LU$. Entonces $A^t = (LU)^t = U^tL^t$ por el teorema 3.5.1 *ii)*. Se calcula

$$\det A = \det L \det U = \det U$$

$$\det A^t = \det U^t \det L^t = \det U^t = \det U = \det A \qquad \boxed{\det L = 1}$$

El último paso se basa en que la transpuesta de una matriz triangular superior es triangular inferior y viceversa, y en el hecho de que obtener la transpuesta no cambia las componentes de la diagonal de una matriz.

Si A no se puede escribir como LU, entonces existe una matriz permutación P tal que $PA = LU$. Por lo que se acaba de probar,

$$\det PA = \det (PA)^t = \det (A^tP^t)$$

y por el teorema 1,

$$\det P \det A = \det PA = \det (A^tP^t) = \det A^t \det P^t$$

No es complicado probar (vea el problema 53) que si P es una matriz permutación, entonces $\det P = \det P^t$. Como $\det P = \det P^t = \pm 1$, se concluye que $\det A = \det A^t$.

EJEMPLO 2 **Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y es fácil verificar que $|A| = |A^t| = 16$.

Observación. Dado que los renglones de una matriz son las columnas de su transpuesta, se deduce que todo lo que se pueda decir sobre los renglones de los determinantes comprenden una segunda forma de simplificar los cálculos de los determinantes. Los resultados se prueban para los renglones. Por lo que se acaba de decir, los teoremas se cumplen también para las columnas.

En primera instancia se describen estas propiedades estableciendo un teorema del que se deducen diversos resultados importantes. La demostración de este teorema es difícil y se pospone a la siguiente sección.

TEOREMA 3 **Teorema básico**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (2)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier renglón de A**. Más aún,

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \tag{3}$$

como la columna j de A es $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, la ecuación (2) indica que **se puede calcular det A expandiendo por cofactores en cualquier columna de A**.

EJEMPLO 3 **Obtención del determinante expandiendo en el segundo renglón o la tercera columna**

En el ejemplo 3.7.1 se vio que para $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det A = -69$. Expandiendo en el segundo renglón se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= 4A_{21} + 2A_{22} + 3A_{23} \\ &= 4(1)^{2+1}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69 \end{aligned}$$

Del mismo modo, si se expande en la tercera columna se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} \\ &= 2(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69 \end{aligned}$$

El lector debe verificar que se obtiene el mismo resultado con la expansión por cofactores en el tercer renglón o la primera o segunda columna.

Ahora se presentan y se demuestran algunas propiedades adicionales de los determinantes. En cada paso se supone que A es una matriz de $n \times n$. Se observará que estas propiedades se pueden utilizar para reducir mucho el trabajo necesario para evaluar un determinante.

PROPIEDAD 1 Si cualquier renglón o columna de A es un vector cero, entonces $\det A = 0$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que el renglón i de A contiene sólo ceros. Esto es $a_{ij} = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces, $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$. La misma prueba funciona si la columna j es el vector cero.

EJEMPLO 4 **Si A tiene un renglón o columna de ceros, entonces det $A = 0$**

Es fácil verificar que $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

PROPIEDAD 2

Si el renglón i o columna j de A se multiplica por un escalar c, entonces det A se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c|A| \qquad (4)$$

DEMOSTRACIÓN

Para probar (3) se expande el renglón i de A para obtener

$$\begin{aligned} \det B &= ca_{i1}A_{i1} + ca_{i2}A_{i2} + \cdots + ca_{in}A_{in} \\ &= c(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = c \det A \end{aligned}$$

En el caso de las columnas se puede hacer una prueba similar.

EJEMPLO 5 **Ilustración de la propiedad 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces det $A = 16$. Si se multiplica el segundo renglón por 4 se tiene $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ y det $B = 64 = 4$ det A. Si se multiplica la tercera columna por -3 se obtiene $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 \\ 3 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \end{pmatrix}$ y det $C = -48 = -3$ det A.

Observación. Al utilizar la propiedad 2 se puede probar (vea el problema 36) el interesante hecho de que para cualquier escalar α y cualquier matriz A de $n \times n$, det $\alpha A = \alpha^n$ det A.

PROPIEDAD 3

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{y } C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} + \alpha_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} + \alpha_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} + \alpha_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\boxed{\det C = \det A + \det B} \tag{5}$$

En otros términos, suponga que A, B y C son idénticas excepto por la columna j y que la columna j de C es la suma de las j-ésimas columnas de A y B. Entonces, $\det C = \det A + \det B$. La misma afirmación es cierta para renglones.

DEMOSTRACIÓN

Se expande $\det C$ respecto a la columna j para obtener

$$\begin{aligned} \det C &= (a_{1j} + \alpha_{1j})\, A_{1j} + (a_{2j} + \alpha_{2j})\, A_{2j} + \cdots + (a_{nj} + \alpha_{nj})\, A_{nj} \\ &= (a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj}) \\ &\quad + (\alpha_{1j} A_{1j} + \alpha_{2j} A_{2j} + \cdots + \alpha_{nj} A_{nj}) = \det A + \det B \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Ilustración de la propiedad 3

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & +2 & 4 \\ 0 & -2 & +4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\det A = 16$, $\det B = 108$ y $\det C = 124 = \det A + \det B$.

PROPIEDAD 4

El intercambio de cualesquiera dos renglones (o columnas) distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.

DEMOSTRACIÓN

Se prueba la afirmación para los renglones y se supone primero que se intercambian dos renglones adyacentes. Es decir, se supone que se intercambian los renglones i y el $(i + 1)$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Después, expandiendo $\det A$ respecto al renglón i y B respecto al renglón $(i + 1)$ se obtiene

$$\begin{aligned} \det A &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \\ \det B &= a_{i1} B_{i+1,1} + a_{i2} B_{i+1,2} + \cdots + a_{in} B_{i+1,n} \end{aligned} \tag{6}$$

Aquí, $A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$, donde M_{ij} se obtiene eliminando el renglón i y la columna A. Observe ahora que si se elimina el renglón $(i + 1)$ y la columna j de B se obtiene el mismo M_{ij}. Entonces

$$B_{i+1,j} = (-1)^{i+1+j}|M_{ij}| = -(-1)^{i+j}|M_{ij}| = -A_{ij}$$

de manera que, de la ecuación (5), $\det B = -\det A$.

Ahora, suponga que $i < j$ y que deben intercambiarse los renglones i y j. Esto se puede llevar a cabo intercambiando renglones varias veces. Se harán $j - i$ intercambiados para mover el renglón j al renglón i. Entonces el renglón i estará en el renglón $(i + 1)$ y pasará por otros $j - i - 1$ intercambios para mover el renglón i al renglón j. Para ilustrar esto, se intercambian los renglones 2 y 6:†

$$\begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\6\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\3\\6\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\2\\6\\3\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\2\\3\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\3\\2\\4\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\2\\5\\7\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\6\\3\\4\\5\\2\\7\end{matrix}$$

6 − 2 = 4 intercambia para mover el 6 a la posición 2

6 − 2 = 4 intercambia para mover el 2 a la posición 6

Por último, el número total de intercambios de renglones adyacentes es $(j - i) + (j - i - 1) = 2j - 2i - 1$, que es impar. Entonces, $\det A$ se multiplica por -1 un número impar de veces, que es lo que se quería demostrar.

EJEMPLO 7 Ilustración de la propiedad 4

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Al intercambiar los renglones 1 y 3 se obtiene $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Por lo que, haciendo los cálculos directos, se encuentra que $\det A = 16$ y $\det B = \det C = -16$.

PROPIEDAD 5

Si A tiene dos renglones o columnas iguales, entonces $\det A = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que los renglones i y j de A son iguales. Al intercambiar dichos renglones se obtiene una matriz B que tiene la propiedad de que $\det B = -\det A$ (de la propiedad 4). Pero como renglón i = renglón j, al intercambiarlos se obtiene la misma matriz. Así, $A = B$ y $\det A = \det B = -\det A$. Por lo tanto, $2 \det A = 0$, lo que puede ocurrir sólo si $\det A = 0$.

† Observe que todos los números se refieren a renglones.

EJEMPLO 8 **Ilustración de la propiedad 5**

Mediante el cálculo directo se puede verificar que para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ [dos renglones iguales] y $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ [dos columnas iguales], $\det A = \det B = 0$.

PROPIEDAD 6

Si un renglón (columna) de A es un múltiplo escalar de otro renglón (columna), entonces $\det A = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $(a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) = c(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Entonces por la propiedad 2,

$$\det A = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \textbf{(de la propiedad 5)}$$

renglón j ⟶

EJEMPLO 9 **Ilustración de la propiedad 6**

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ya que el tercer renglón es igual a -2 veces el primero.

EJEMPLO 10 **Otra ilustración de la propiedad 6**

$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 9 & -3 \\ 7 & 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0$ porque la cuarta columna es igual a tres veces la segunda.

PROPIEDAD 7

Si se suma un múltiplo escalar de un renglón (columna) de A a otro renglón (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

DEMOSTRACIÓN

Sea B la matriz obtenida sumando c veces el renglón i de A al renglón j de A. Entonces

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \cdots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(por la propiedad 3)

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$= \det A + 0 = \det A$ (el cero viene de la propiedad 6)

EJEMPLO 11 Ilustración de la propiedad 7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 16$. Si se multiplica el tercer renglón por 4 y se suma al segundo renglón, se obtiene una nueva matriz B dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4(0) & 1+4(-2) & 4+5(4) \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y $\det B = 16 = \det A$.

Las propiedades que se acaban de presentar simplifican la evaluación de determinantes de alto orden. Se "reduce por renglones" el determinante, usando la propiedad 7, hasta que tenga una forma en la que se pueda evaluar con facilidad. La meta más común será utilizando la propiedad 7 de manera repetida hasta que 1) el nuevo determinante, tenga un renglón (columna) de ceros o un renglón (columna) que sea múltiplo de otro —en cuyo caso el determinante es cero— o 2) que la nueva matriz sea triangular, con lo que su determinante será el producto de sus elementos en la diagonal.

EJEMPLO 12 Utilice las propiedades de los determinantes para calcular un determinante de 4 × 4

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$

Solución (Vea el ejemplo 2.7.7)

Ya existe un cero en la primera columna, por lo que lo más sencillo es reducir otros elementos de la primera columna a cero. Se puede continuar la reducción buscando una matriz triangular.

Se multiplica el primer renglón por -2 y se suma al tercer renglón; se multiplica el primer renglón por -3 y se suma al cuarto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & -11 & 2 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el segundo renglón por -5 y -7 y se suma el tercer y cuarto renglones, respectivamente.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -16 & -18 \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se factoriza -16 del tercer renglón (utilizando la propiedad 2).

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -32 & -26 \end{vmatrix}$$

Se multiplica el tercer renglón por 32 y se suma al cuarto.

$$= -16 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz triangular superior y $|A| = -16(1)(-1)(1)(10) = (-16)(-10) = 160$.

EJEMPLO 13 **Uso de las propiedades para calcular un determinante de 4 × 4**

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ -2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

Solución Existen varias formas de proceder en este caso y no es evidente cuál de ellas será la más rápida para llegar a la respuesta. Sin embargo, como ya existe un cero en el primer renglón, se comienza la reducción en ese renglón.

Se multiplica la segunda columna por 2 y por -4 y se suma a la primera y cuarta columnas, respectivamente

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 6 \\ 12 & 7 & 3 & -27 \\ -11 & -7 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se intercambian las primeras dos columnas.

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 3 & -27 \\ -7 & -11 & 2 & 33 \end{vmatrix}$$

Se multiplica la segunda columna por -5 y por -6 y se suma a la tercera y cuarta columnas, respectivamente.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 12 & -57 & -99 \\ -7 & -11 & 57 & 99 \end{vmatrix}$$

Como la cuarta columna es ahora un múltiplo de la tercera (columna 4 $= \frac{99}{57} \times$ columna 3) se ve que $|A| = 0$.

EJEMPLO 14 **Uso de las propiedades para calcular un determinante de 5 × 5**

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 3 & 7 & -9 \end{vmatrix}$

Solución Sumando primero el renglón 2 y después el renglón 4 al renglón 5, se obtiene

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Este ejemplo ilustra el hecho de que un poco de observación antes de comenzar los cálculos puede simplificar las cosas considerablemente.

Existe un hecho adicional sobre determinantes que resultará de gran utilidad.

TEOREMA 4 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2}, + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad \text{si } i \neq j \tag{7}$$

Nota. Del teorema 5 la suma en la ecuación (6) es igual a det A si $i = j$.

DEMOSTRACIÓN Sea

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{renglón } j \longrightarrow$$

Entonces, como dos renglones de B son iguales, $\det B = 0$. Pero $B = A$ excepto por el renglón j. De esta forma se calcula $\det B$ expandiendo en el renglón j de B, se obtiene la suma en (6) y el teorema queda demostrado. Observe que al hacer la expansión respecto al renglón j, este renglón se elimina al calcular los cofactores de B. Así, $B_{jk} = A_{jk}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

Autoevaluación

I. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & -2 & -7 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ ***d)*** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes determinantes son 0?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ ***d)*** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

III. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ **es** _____.

a) 4 ***b)*** 10 ***c)*** −10 ***d)*** 8 ***e)*** 6

Respuestas a la autoevaluación

I. *b)* **II.** *c)* **III.** *a)*

Desarrollo de competencias 3.8

De los problemas 1 al 26 evalúe el determinante usando los métodos de esta sección.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 8 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -6 & 7 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 8 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & c & d \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

De los problemas 27 al 35 calcule el determinante suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 8$$

27. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} -3a_{11} & -3a_{12} & -3a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ 5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 4a_{11} & -2a_{13} & 3a_{12} \\ 4a_{21} & -2a_{23} & 3a_{22} \\ 4a_{31} & -2a_{33} & 3a_{32} \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & 2a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & 2a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 2a_{11} - 3a_{21} & 2a_{12} - 3a_{22} & 2a_{13} - 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

36. Usando la propiedad 2, demuestre que si α es un escalar y A es una matriz, entonces $\det \alpha A = \alpha^n \det A$.

***37.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

***38.** Demuestre que

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} & \lambda + a_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cap + a_1\lambda^1 + a_0$$

39. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la suma de todos los elementos de cada columna de A es cero, entonces $|A| = 0$.

***40.** Una matriz es **antisimétrica** si $A^t = -A$. Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, demuestre que $\det A^t = (-1)^n \det A$.

41. Usando el resultado del problema 40, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det A = 0$.

42. Una matriz A se llama **ortogonal** si A es invertible y $A^{-1} = A^t$. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

****43.** Sea Δ el triángulo del plano con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo está dada por

$$\text{Área de } \Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

¿Bajo qué circunstancias este determinante será igual a cero?

**44. Tres rectas que no son paralelas por pares determinan un triángulo en el plano. Suponga que las rectas están dadas por

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23} = 0$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} = 0$$

Demuestre que el área determinada por las rectas es

$$\frac{\pm 1}{2A_{13}A_{23}A_{33}}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

45. El **determinante de Vandermonde**† de 3×3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Demuestre que $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$.

46. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$ es el determinante de Vandermonde de 4×4. Demuestre que $D_4 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_4 - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)$.

47. *a) Defina el determinante de Vandermonde de $n \times n$, D_n.

***b)** Demuestre que $D_n = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$, donde $\prod$ representa la palabra "producto". Observe que el producto en el problema 46 se puede escribir $\prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{3} (a_j - a_i)$.

48. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

***a)** Escriba el producto AB.

***b)** Calcule det A, det B y det AB.

***c)** Demuestre que det AB = (det A)(det B).

49. La matriz A de $n \times n$ se llama **nilpotente** si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún entero $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes y encuentre la k más pequeña, tal que

***a)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

50. Demuestre que si A es nilpotente, entonces det $A = 0$.

† A.T. Vandermonde (1735-1796) fue un matemático francés.

51. La matriz A se llama **idempotente** si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para det A si A es idempotente?

52. Sea P una matriz permutación. Demuestre que det $P = \pm 1$. [*Sugerencia*: por la definición $P = P_n P_{n+1} \cdots P_2 P_1$, donde cada P_i es una matriz permutación elemental. Utilice la propiedad 4 para demostrar que det $P_i = -1$ y después calcule det P usando el teorema 1.]

53. Sea P una matriz permutación. Demuestre que P^t también es una matriz permutación y que det $P =$ det P^t. [*Sugerencia*: si P_i es una matriz permutación elemental, demuestre que $P_i^t = P_i$.]

3.9 Demostración de tres teoremas importantes y algo de historia

Antes se citaron tres teoremas que resultan de fundamental importancia en la teoría de matrices determinantes. Las demostraciones de estos teoremas son más complicadas que las demostraciones que ya se analizaron. Trabaje despacio en estas demostraciones; la recompensa será un mejor entendimiento de algunas ideas importantes acerca del álgebra lineal.

Teorema 1

Teorema básico

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (1) \\ &= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (2) \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Nota. La primera igualdad es la definición 3.7.4 del determinante mediante la expansión por cofactores del primer renglón; la segunda igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier otro renglón lleva al determinante; la tercera igualdad dice que la expansión por cofactores de cualquier columna da el determinante. De acuerdo con las propiedades de la transpuesta de una matriz se necesita, únicamente, probar el teorema para los renglones [ecuación (1)].

Demostración

Se probará la igualdad (1) por inducción matemática. Para la matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ de 2×2, primero se expande por cofactores el primer renglón: det $A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(a_{22}) + a_{12}(-a_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. De este modo, expandiendo en el segundo renglón se obtiene $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = a_{21}(-a_{12}) + a_{22}(a_{11}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Entonces se obtiene el mismo resultado expandiendo en cualquier renglón de una matriz de 2×2, y esto prueba la igualdad (1) en el caso 2×2.

Ahora se supone que la igualdad (1) se cumple para todas las matrices de $(n-1) \times (n-1)$. Debe demostrarse que se cumple para las matrices de $n \times n$. El procedimiento será expandir por cofactores de los renglones 1 e i, y demostrar que las expansiones son idénticas. La expansión en el primer renglón da el siguiente término general

$$a_{1k}A_{1k} = (-1)^{1+k}a_{1k}|M_{1k}| \qquad (3)$$

Observe que éste es el único lugar en la expansión de $|A|$ en el cual aparece el término a_{1k} ya que otro término general sería $a_{1m}A_{1m} = (-1)^{1+m}a_{1m}|M_{1m}|$, con $k \neq m$ y M_{1m} se obtiene

eliminando el primer renglón y la m-ésima columna de A (y a_{1k} está en el primer renglón de A). Como M_{1k} es una matriz de $(n-1)\times(n-1)$, por la hipótesis de inducción se puede calcular $|M_{1k}|$ expandiendo en el renglón i de A [que es el renglón $(i-1)$ de M_{1k}]. Un término general de esta expansión es

$$a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k}) \quad (k \neq l) \tag{4}$$

Por las razones descritas, éste es el único término en la expansión de $|M_{1k}|$ en el i-ésimo renglón de A que contiene el término a_{il}. Sustituyendo (4) en la ecuación (3) se encuentra que

$$(-1)^{1+k}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k})\ (k \neq l) \tag{5}$$

es la única ocurrencia del término $a_{1k}a_{il}$ en la expansión por cofactores de det A en el primer renglón.

Ahora, si se expande por cofactores en el renglón i de A (donde $i \neq 1$), el término general es

$$(-1)^{1+l}a_{il}|M_{il}| \tag{6}$$

y el término general en la expansión de $|M_{il}|$ en el primer renglón de M_{il} es

$$a_{1k}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il}) \quad (k \neq l) \tag{7}$$

Si se inserta (7) en el término (6) se encuentra que la única ocurrencia del término $a_{il}a_{1k}$ en la expansión del renglón i de det A es

$$(-1)^{i+l}a_{1k}a_{il}(\text{cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il})\ (k \neq l) \tag{8}$$

Si se puede demostrar que las expansiones (5) y (8) son la misma, entonces (1) quedará demostrada, ya que el término en (5) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del primer renglón, el término en (8) es la única ocurrencia de $a_{1k}a_{il}$ en la expansión del i-ésimo renglón, y k, i y l, son arbitrarios. Lo que demostrará que las sumas de términos en las expansiones en los renglones 1 e i son iguales.

Ahora, sea $M_{1i,kl}$ la matriz de $(n-2)\times(n-2)$ obtenida al eliminar los renglones 1 e i y las columnas k y l de A (esto se llama **menor de segundo orden** de A). Primero se supone que $k < l$. Después

$$M_{1k} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2l} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{i,k+1} & \cdots & a_{il} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nl} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$M_{il} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,k} & \cdots & a_{i-1,l-1} & a_{i-1,l+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,k} & \cdots & a_{i+1,l-1} & a_{i+1,l+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

De (9) y (10) se aprecia que

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+(l-1)}|M_{1i,kl}| \tag{11}$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+k}|M_{1i,kl}| \tag{12}$$

Entonces (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+(l-1)} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l-1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \tag{13}$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l+1} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}| \tag{14}$$

Pero $(-1)^{i+k+l-1} = (-1)^{i+k+l+1}$, de modo que los lados derechos de las ecuaciones (13) y (14) son iguales. Así, las expresiones (5) y (8) son iguales y (1) queda demostrado en el caso $k < l$; después por un razonamiento similar se encuentra que si $k > l$,

$$\text{Cofactor de } a_{il} \text{ en } M_{1k} = (-1)^{(i-1)+l}|M_{1i,kl}|$$

$$\text{Cofactor de } a_{1k} \text{ en } M_{il} = (-1)^{1+(k-1)}|M_{1i,kl}|$$

de manera que (5) se convierte en

$$(-1)^{1+k} a_{1k} a_{il} (-1)^{(i-1)+l} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y (8) se convierte en

$$(-1)^{i+l} a_{1k} a_{il} (-1)^{1+k-1} |M_{1i,kl}| = (-1)^{i+k+l} a_{1k} a_{il} |M_{1i,kl}|$$

y esto completa la prueba de la ecuación (1).

Ahora se quiere probar que para cualesquiera dos matrices de $n \times n$, A y B, $\det AB = \det A \det B$. La prueba es más compleja e incluye varios pasos. Se usarán diversos hechos sobre las matrices elementales probados en la sección 3.6.

Primero se calculan los determinantes de las matrices elementales.

LEMA 1

Sea E una matriz elemental:

i) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_i \rightleftarrows R_j$, entonces $\det E = -1$. **(15)**

ii) Si E es una matriz que representa la operación elemental $R_j \rightarrow R_j + cR_i$ entonces $\det E = 1$. **(16)**

iii) Si E es la matriz que representa la operación elemental $R_i \rightarrow cR_i$, entonces $\det E = c$. **(17)**

DEMOSTRACIÓN

i) $\det I = 1$. E se obtiene de I intercambiando los renglones i y j de I. Por la propiedad 4 de la sección 3.8, $\det E = (-1) \det I = -1$.

ii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c y sumándolo al renglón j. Entonces por la propiedad 7 de la sección 3.8, $\det E = \det I = 1$.

iii) E se obtiene de I multiplicando el renglón i de I por c. Así, por la propiedad 2 en la sección 3.8, $\det E = c \det I = c$.

LEMA 2

Sea B una matriz de $n \times n$ y sea E una matriz elemental. Entonces

$$\det EB = \det E \det B \tag{18}$$

La prueba de este lema se deduce del lema 1 y los resultados presentados en la sección 3.8 que relacionan las operaciones elementales con renglones en los determinantes. Los pasos de la prueba se indican de los problemas 1 al 3 de la sección que nos ocupa.

El siguiente teorema es un resultado fundamental en la teoría de matrices.

TEOREMA 2

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Del teorema 3.6.5, se sabe que existen matrices elementales $E_1, E_2, \cdots, E_m$ y una matriz triangular superior T tal que

$$A = E_1 E_2, \cdots, E_m T \tag{19}$$

Usando el lema 2 m veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det A &= \det E_1 \det (E_2 E_3 \cdots E_m T) \\ &= \det E_1 \det E_2 \det (E_3 \cdots E_m T) \\ &\vdots \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det (E_m T) \end{aligned}$$

o sea

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_{m-1} \det E_m \det T \tag{20}$$

Por el lema 1, $\det E_i \neq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Se concluye que $\det A \neq 0$ si y sólo si $\det T \neq 0$.

Ahora suponga que A es invertible. Al usar (19) y el hecho de que toda matriz elemental es invertible $E_m^{-1} \cdots E_l^{-1} A$ es el producto de matrices invertibles. Así, T es invertible y por el teorema 3.7.2, $\det T \neq 0$. Por lo tanto, $\det A \neq 0$.

Si $\det A \neq 0$ entonces (20), $\det T \neq 0$, por lo que T es invertible (por el teorema 3.7.2). Entonces el lado derecho de (20) es el producto de matrices invertibles, y A es invertible. Esto completa la demostración.

Al fin, ahora se puede demostrar el resultado principal. Usando estos resultados establecidos, la prueba es directa.

TEOREMA 3

Sean A y B matrices de $n \times n$. Entonces

$$\det AB = \det A \det B \tag{21}$$

DEMOSTRACIÓN

Caso 1: $\det A = \det B = 0$. Entonces por el teorema 2, B no es invertible, así por el teorema 3.4.6, existe un n-vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Entonces $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, de nuevo por el teorema 3.4.6, AB no es invertible. Por el teorema 2,

$$0 = \det AB = 0 \cdot 0 = \det A \det B$$

Caso 2: $\det A = 0$ y $\det B \neq 0$. A no es invertible, por lo que existe un n-vector $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Como $\det B \neq 0$, B es invertible y existe un vector único $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Entonces $AB\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Así, AB no es invertible, esto es

$$\det AB = 0 = 0 \det B = \det A \det B$$

Caso 3: $\det A \neq 0$. A no es invertible y se puede escribir como un producto de matrices elementales:

$$A = E_1, E_2, \cdots, E_m$$

Semblanza de...

Breve historia de los determinantes

Gottfried Willhelm Leibniz
(*Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University*)

Augustin-Louis Cauchy
(*Colección de David Eugene Smith, Rare Book and Manuscript Library, Columbia University*)

Los determinantes aparecieron en la literatura matemática más de un siglo antes que las matrices. El término *matriz* fue utilizado por primera vez por James Joseph Silvestre, cuya intención era que su significado fuera "madre de los determinantes".

Algunos grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX participaron en el desarrollo de las propiedades de los determinantes. La mayoría de los historiadores cree que la teoría de los determinantes encuentra su origen en el matemático alemán Gottfried Willhelm Leibniz (1646-1716), quien junto con Newton, fue coinventor del cálculo. Leibniz utilizó los determinantes en 1693 en referencia a los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas. Sin embargo, algunos piensan que un matemático japonés, Seki Kowa, hizo lo mismo casi 10 años antes.

Quien contribuyó de manera más importante en la teoría de los determinantes fue el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy redactó una memoria de 84 páginas, en 1812, que contenía la primera prueba del teorema $\det AB = \det A \det B$. En 1840 definió la ecuación característica de la matriz A como la ecuación polinomial $\det (A - \lambda I) = 0$. Dicha ecuación se estudiará con detalle en el capítulo 6.

Cauchy escribió en forma extensa, tanto sobre matemáticas puras como sobre matemáticas aplicadas. Sólo Euler contribuyó en mayor medida. Cauchy participó en muchas áreas que incluyen teoría de funciones reales y complejas, teoría de la probabilidad, la geometría, la teoría de propagación de ondas y series infinitas.

Se otorga a Cauchy el crédito de establecer un nuevo estándar de rigor en las publicaciones matemáticas. Después de Cauchy, se tornó más difícil publicar un artículo basado en la intuición; se pedía adhesión estricta a las demostraciones formales.

El vasto volumen de las publicaciones de Cauchy era una inspiración. Cuando la Academia Francesa de las Ciencias inició sus publicaciones periódicas *Comptes Rendu* en 1835, Cauchy les envió su trabajo para que lo publicaran. Pronto la cuenta de impresión de sólo el trabajo de Cauchy creció tanto que la Academia puso un límite de cuatro páginas por artículo publicado. Esta regla todavía está en vigor.

Vale la pena mencionar aquí algunos matemáticos. La expansión de un determinante por cofactores fue utilizada por primera vez por un matemático francés, Pierre-Simon Laplace (1749-1827). Laplace es más conocido por la transformada de Laplace que se estudia en cursos de matemáticas aplicadas.

Una aportación importante a la teoría de determinantes (después de Cauchy) fue la del matemático alemán Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Fue con él que la palabra "determinante" ganó su aceptación final. Jacobi usó primero un determinante aplicado a las funciones para establecer la teoría de funciones de diversas variables. Más tarde, Sylvester bautizó a este determinante el *jacobiano*. Los estudiantes actuales estudian los jacobianos en los cursos de cálculo de distintas variables.

Por último, ninguna historia de determinantes estaría completa sin el libro *An Elementary Theory of Determinants*, escrito en 1867 por Charles Dogdson (1832-1898). En dicho libro Dogdson da las condiciones bajo las cuales los sistemas de ecuaciones tienen soluciones no triviales. Estas condiciones están escritas en términos de los determinantes de los menores de las matrices de coeficientes. Charles Dogdson es más conocido por su seudónimo de escritor, Lewis Carroll. Con ese nombre publicó su famoso libro *Alicia en el país de las maravillas*.

Entonces

$$AB = E_1, E_2, \cdots, E_m B$$

Usando el resultado del lema 2 repetidas veces, se ve que

$$\begin{aligned} \det AB &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m B) \\ &= \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_m \det B \\ &= \det (E_1 E_2 \cdots E_m) \det B \\ &= \det A \det B \end{aligned}$$

Desarrollo de competencias 3.9

I. Sea E la representación $R_i \leftrightarrows R_j$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (15) y la propiedad 4.]

II. Sea E la representación $R_j \to R_j + cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (16) y la propiedad 7.]

III. Sea E la representación $R_j \to cR_i$ y sea B una matriz de $n \times n$. Demuestre que $\det EB = \det E \det B$. [*Sugerencia:* describa la matriz EB y después utilice la ecuación (7) y la propiedad 2.]

3.10 DETERMINANTES E INVERSAS

En esta sección se analiza la forma en que se pueden calcular las inversas de las matrices haciendo uso de los determinantes. Más aún, se completa la tarea iniciada en el capítulo 1, de probar el importante teorema de resumen (vea los teoremas 3.4.6 y 3.6.4), que muestra la equivalencia de varias propiedades de las matrices. Se comienza con un resultado sencillo.

TEOREMA 1 Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\boxed{\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}} \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que A es invertible. Según el teorema 3.9.2, $\det A \neq 0$. Del teorema 3.8.1

$$1 = \det I = \det AA^{-1} = \det A \det A^{-1} \qquad (2)$$

lo que implica que

$$\det A^{-1} = 1/\det A$$

Antes de utilizar determinantes para calcular las inversas es necesario definir la *adjunta* de una matriz $A = (a_{ij})$. Sea $B = (A_{ij})$ la matriz de cofactores de A (recuerde que un cofactor, definido en la página 126, es un número). Entonces

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

DEFINICIÓN 1 **La adjunta**

Sea A una matriz de $n \times n$ y sea B, dada por (3), la matriz de sus cofactores. Entonces, la **adjunta** de A, escrito adj A, es la transpuesta de la matriz B de $n \times n$; es decir,

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{4}$$

EJEMPLO 1 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Calcule adj A.

Solución Se tiene $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 12$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -3$, $A_{13} = -3$, $A_{21} = -13$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = 2$ y $A_{33} = 2$. Así, $B = \begin{pmatrix} 12 & -3 & -3 \\ -13 & 5 & 2 \\ -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y adj $A = B' = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 **Cálculo de la adjunta de una matriz de 4 × 4**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcule adj A.

Solución Esto es más laborioso ya que se tienen que calcular dieciséis determinantes de 3×3. Por ejemplo, se tiene

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -2 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{y} \quad A_{43} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -12 & -6 \\ -2 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Al comparar estos cálculos se encuentra que

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y

$$\text{adj } A = B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 3 **La adjunta de una matriz de 2 × 2**

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Entonces adj $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

ADVERTENCIA Al calcular la adjunta de una matriz, no olvide transponer la matriz de cofactores.

TEOREMA 2 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

$$(A)(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} = (\det A)I \qquad (5)$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $C = (c_{ij}) = (A)(\text{adj } A)$. Entonces

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Se tiene

$$c_{ij} = (\text{renglón } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de adj } A)$$

$$= (a_{i1} \quad a_{i2} \cdots a_{in}) \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix}$$

Así

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \qquad (7)$$

Ahora, si $i = j$, la suma en (7) es igual a $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$ que es la expansión de det A sobre el renglón i de A. Por otro lado, si $i \neq j$, entonces del teorema 3.8.6 la suma en (7) es igual a cero. Por lo tanto,

$$c_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Esto prueba el teorema.

Ahora se puede establecer el resultado principal.

TEOREMA 3

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si det $A \neq 0$. Si det $A \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A \tag{8}$$

Observe que el teorema 3.4.4, para matrices de 2×2 es un caso especial de este teorema.

DEMOSTRACIÓN

La primera parte de este teorema es el teorema 3.9.2. Si det $A \neq 0$, entonces se demuestra que $(1/\det A)(\operatorname{adj} A)$ es la inversa de A multiplicándola por A y obteniendo la matriz identidad:

$$(A)\left(\frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A\right) = \frac{1}{\det A}[A(\operatorname{adj} A)] \overset{\text{teorema 2}}{=} \frac{1}{\det A}(\det A)I = I$$

Pero por el teorema 3.4.7, si $AB = I$, entonces $B = A^{-1}$. Así,

$$(1/\det A)\operatorname{adj} A = A^{-1}$$

EJEMPLO 4 Uso del determinante y la adjunta para calcular la inversa

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Determine si A es invertible y, de ser así, calcule A^{-1}.

Solución Como det $A = 3 \neq 0$ se ve que A es invertible. Del ejemplo 1

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Así

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 12 & -13 & -7 \\ -3 & 5 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{13}{3} & -\frac{7}{3} \\ -1 & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Verificación

$$A^{-1}A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}12&-13&-7\\-3&5&2\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=I$$

EJEMPLO 5 **Cálculo de la inversa de una matriz de 4 × 4 usando el determinante y la adjunta**

Sea $$A=\begin{pmatrix}1&-3&0&-2\\3&-12&-2&-6\\-2&10&2&5\\-1&6&1&3\end{pmatrix}.$$

Determine si A es invertible y, si lo es, calcule A^{-1}.

Solución Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, se calcula $\det A=-1\neq 0$ y por lo tanto A^{-1} existe. Por el ejemplo 2 se tiene

$$\text{adj } A=\begin{pmatrix}0&-1&0&-2\\-1&1&2&-2\\0&-1&-3&3\\2&-2&-3&2\end{pmatrix}$$

Así $$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1&0&-2\\-1&1&2&-2\\0&-1&-3&3\\2&-2&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&2\\1&-1&-2&2\\0&1&3&-3\\-2&2&3&-2\end{pmatrix}$$

Nota 1. Como ya se habrá observado, si $n>3$, por lo general es más fácil calcular A^{-1} con la reducción por renglones que utilizando adj A; aun para el caso de 4×4 es necesario calcular 17 determinantes (16 para la adjunta de A más det A). Sin embargo, el teorema 3 es de suma importancia ya que, antes de hacer la reducción por renglones, el cálculo de det A (si se puede hacer fácilmente) dice si A^{-1} existe o no existe.

Nota 2. En muchas aplicaciones de la teoría de matrices, las matrices están dadas en forma simbólica (es decir, en términos de variables) en lugar de numérica. Por ejemplo, se puede tener $A=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$ en lugar de $\begin{pmatrix}2&-1\\3&5\end{pmatrix}$. En cuyo caso, la mejor forma de proceder será considerando muchas veces el cálculo de los determinantes. Esto es particularmente cierto en algunas aplicaciones de ingeniería, como la teoría de control.

En la sección 3.6 se presentó el teorema de resumen (teoremas 2.2.1, 2.4.6 y 2.6.4). Éste es el teorema que une muchos conceptos desarrollados en los primeros capítulos de este libro.

TEOREMA 4 **Teorema de resumen**

Sea A una matriz de $n\times n$. Las siguientes siete afirmaciones son equivalentes. Es decir, cada una implica a las otras seis (de manera que si una es cierta, todas lo son).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x}=\mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

En el teorema 3.4.6 se demostró la equivalencia de las partes *i*), *ii*), *iii*), *iv*) y *vi*). En el teorema 3.6.3 se demostró la equivalencia de las partes *i*) y *v*). El teorema 1 (o teorema 3.9.2) demuestra la equivalencia de *i*) y *vii*).

Autoevaluación

I. El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ es -149. La componente 2,3 de A^{-1} está dada por

a) $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$, *b*) $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & 6 \end{vmatrix}$,

c) $-\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$, *d*) $\frac{1}{149}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

II. El determinante de $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 8 \\ 6 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ es 468. La componente 3,1 de A^{-1} es

a) $-\frac{26}{468}$ *b*) $\frac{26}{468}$ *c*) $\frac{46}{468}$ *d*) $\frac{46}{468}$

Desarrollo de competencias 3.10

De los problemas 1 al 15 utilice los métodos de esta sección para determinar si la matriz dada es invertible. De ser así, calcule la inversa.

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 7 & -21 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 19 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 7 & 12 & -4 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

16. Utilice determinantes para demostrar que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si A^t es invertible.

17. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = 1/\det A$.

18. Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ verifique que $\det A^{-1} = 1/\det A$.

19. ¿Para cuáles valores de α la matriz $\begin{pmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1-\alpha \end{pmatrix}$ es no invertible?

20. ¿Para qué valores de α la matriz $\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha-1 & \alpha+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\alpha & \alpha+3 & \alpha+7 \end{pmatrix}$ no tiene inversa?

21. Suponga que la matriz A de $n \times n$ es no invertible. Demuestre que $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.

22. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

23. Sea θ un número real. Demuestre que $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible y encuentre su inversa.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *d*) **II.** *a*)

3.11 REGLA DE CRAMER

En la presente sección se examina un viejo método para resolver sistemas con el mismo número de incógnitas y ecuaciones. Considere el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad & \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{1}$$

que puede escribirse en la forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{2}$$

Si $\det A \neq 0$, el sistema (2) tiene una solución única dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Se puede desarrollar un método para encontrar dicha solución sin reducción por renglones y sin calcular A^{-1}.

Sea $D = \det A$. Se definen n nuevas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ldots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, A_i es la matriz obtenida al reemplazar la columna i de A por $\mathbf{b}$. Por último, sea $D_1 = \det A_1$, $D_2 = \det A_2$, … , $D_n = \det A_n$.

TEOREMA 1 **Regla de Cramer**

Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, x_i = \frac{D_i}{D}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{D} \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN

La solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Pero

$$A^{-1}\,\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora bien, (adj A)$\mathbf{b}$ es un n-vector cuya componente j es

$$(A_{1j}\ A_{2j} \ldots A_{nj}),\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \tag{5}$$

Considere la matriz

$$Aj = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

columna j

Si se expande el determinante de A_j respecto a su columna j, se obtiene

$$D_j = b_1\,(\text{cofactor de } b_1) + b_2\,(\text{cofactor de } b_2) + \cdots + b_n\,(\text{cofactor de } b_n) \tag{7}$$

Pero para encontrar el cofactor de b_i, por ejemplo, se elimina el renglón i y la columna j de A_j (ya que b_i está en la columna j de A_j). Pero la columna j de A_j es $\mathbf{b}$, y si se elimina se tendrá simplemente el menor ij, M_{ij}, de A. Entonces

$$\text{cofactor de } b_i \text{ en } A_j = A_{ij}$$

De manera que (7) se convierte en

$$D_j = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \cdots + b_nA_{nj} \tag{8}$$

Por esta razón se trata de lo mismo que el lado derecho de (5). Por lo tanto, la componente i de (adj A)$\mathbf{b}$ es D_i y se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{D}(\text{adj } A)\mathbf{b} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ \vdots \\ D_n/D \end{pmatrix}$$

y la prueba queda completa.

Nota histórica. La regla de Cramer recibe su nombre en honor del matemático suizo Gabriel Cramer (1704-1752). Cramer publicó la regla en 1750 en su libro *Introduction to the Analysis of Lines of Algebraic Curves*. De hecho, existe evidencia que sugiere que Colin Maclaurin (1698-1746) conocía la regla desde 1729; Maclaurin fue quizás el matemático británico más sobresaliente en los años que siguieron a la muerte de Newton. La regla de Cramer es uno de los resultados más conocidos en la historia de las matemáticas. Durante casi 200 años fue fundamental en la enseñanza del álgebra y de la teoría de las ecuaciones. Debido al gran número de cálculos requeridos, se utiliza muy poco en la actualidad. Sin embargo, el resultado fue muy determinante en su tiempo.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema de 3 × 3 utilizando la regla de Cramer

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned} \tag{9}$$

Solución El presente ejemplo ya se resolvió en el ejemplo 2.3.1: haciendo uso de la reducción por renglones. También se pudo resolver calculando A^{-1} (ejemplo 3.4.6) y después encontrando $A^{-1}\mathbf{b}$. Ahora se resolverá usando la regla de Cramer. Primero, se tiene

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

de manera que el sistema (9) tiene una solución única. Después $D_1 = \begin{vmatrix} 18 & 4 & 6 \\ 24 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 24$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 18 & 6 \\ 4 & 24 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -12 \quad \text{y} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 18 \\ 4 & 5 & 24 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 18. \text{ Por lo tanto, } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{24}{6} = 4,$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{12}{6} = -2 \quad \text{y} \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{18}{6} = 3.$$

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema de 4 × 4 usando la regla de Cramer**

Demuestre que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 6x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= -1 \end{aligned} \tag{10}$$

tiene una solución única y encuéntrela utilizando la regla de Cramer.

Solución En el ejemplo 3.8.14 se vio que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

Por lo que el sistema tiene una solución única. Para encontrarla se calcula $D_1 = -464$; $D_2 = 280$; $D_3 = -56$; $D_4 = 112$. Así, $x_1 = D_1/D = -464/160$, $x_2 = D_2/D = 280/160$, $x_3 = D_3/D = -56/160$ y $x_4\ D_4/D = 112/160$. Estas soluciones se pueden verificar por sustitución directa en el sistema 10.

AUTOEVALUACIÓN

I. Considere el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 3x + 8y - z &= 2 \\ -5x - 12y + 6z &= 11 \end{aligned}$$

Si $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 8 & -1 \\ -5 & -12 & 6 \end{vmatrix}$, **entonces** $y =$ _____.

a) $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 2 & 8 & -1 \\ 11 & -12 & 6 \end{vmatrix}$ ***b)*** $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 8 & 2 \\ -5 & -12 & 11 \end{vmatrix}$

c) $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ -5 & 11 & 6 \end{vmatrix}$ ***d)*** $\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2 & -7 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -5 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

Desarrollo de competencias 3.11

De los problemas 1 al 9 resuelva el sistema dado usando la regla de Cramer.

1. $2x_1 + 3x_2 = -1$
$-7x_1 + 4x_2 = 47$

2. $3x_1 - x_2 = 0$
$4x_1 + 2x_2 = 5$

3. $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$
$3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$
$8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 11$

4. $x_1 + x_2 + x_3 = 8$
$4x_2 - x_3 = -2$
$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

5. $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$

6. $2x_1 + 5x_2 - x_3 = -1$
$4x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$
$-2x_1 + 2x_2 = 0$

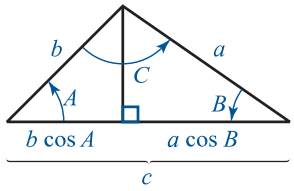
7. $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$
$x_1 + x_3 = 2$
$- x_2 + 5x_3 = 1$

8. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$
$2x_1 - x_3 - x_4 = 4$
$3x_3 + 6x_4 = 3$
$x_1 - x_4 = 5$

9. $x_1 - x_4 = 7$
$2x_2 + x_3 = 2$
$4x_1 + x_2 = -3$
$3x_3 - 5x_4 = 2$

***10.** Considere el triángulo en la figura 3.4

Figura 3.4



a) Demuestre, utilizando la trigonometría elemental, que

$$c\cos A + a\cos C = b$$
$$b\cos A + a\cos B = c$$
$$c\cos B + b\cos C = a$$

b) Si se piensa que el sistema del inciso *a*) es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cos *A*, cos *B* y cos *C*, demuestre que el determinante del sistema es diferente de cero.

c) Utilice la regla de Cramer para despejar cos *C*.

d) Utilice el inciso *c*) para probar la **ley de cosenos**: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

RESPUESTA A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c*)

Resumen

- Un **vector renglón de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números denominados **escalares**, escritos como $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
- Un **vector columna de *n* componentes** es un conjunto ordenado de n números escritos como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Un vector cuyas componentes son todas cero se denomina **vector cero.**
- La **suma de vectores** y la **multiplicación por escalares** están definidas por

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

- Una **matriz de $m \times n$** es un arreglo rectangular de mn números arreglados en m renglones y n columnas

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Una matriz cuyas componentes son todas cero se denomina **matriz cero.**
- Si A y B son matrices de $m \times n$, entonces $A + B$ y αA (α un escalar) son matrices de $m \times n$

  La componente ij de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$

  La componente de ij de αA es αa_{ij}.

- El **producto escalar** de dos vectores de n componentes es:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

- ***Productos de matrices***

  Sea A una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times p$. Entonces AB es una matriz de $m \times p$ y la componente de ij de AB = (renglón i de A) $\cdot$ (columna j de B)

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- En términos, los productos de matrices no son conmutativos; es decir, casi siempre ocurre que $AB \neq BA$.
- ***Ley asociativa de la multiplicación de matrices***

  Si A es una matriz de $n \times m$, B es de $m \times p$ y C es de $p \times q$, entonces

  $$A(BC) = (AB)C$$

  y tanto $A(BC)$ como $(AB)C$ son matrices de $n \times q$.
- ***Leyes distributivas para la multiplicación de matrices***

  Si todos los productos están definidos, entonces

  $$A(B + C) = AB + AC \quad \text{y} \quad (A + B)C = AC + BC$$
- La **matriz identidad $n \times n$, I_n**, es la matriz de $n \times n$ con unos en la **diagonal principal** y ceros en otra parte. I_n se denota generalmente por I.
- Si A es una matriz cuadrada, entonces $AI = IA = A$.
- La matriz A de $n \times n$ es **invertible** si existe una matriz A^{-1} de $n \times n$ tal que

  $$AA^{-1} = A^{-1}A = 1$$

  En este caso la matriz A^{-1} se llama la **inversa** de A.
- Si A es invertible, su inversa es única.
- Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$, entonces AB es invertible y

  $$(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$$
- Para determinar si una matriz A de $n \times n$ es invertible:

  i) Se escribe la matriz cuadrada aumentada $(A|I)$.

  ii) Se reduce A por renglones a la forma escalonada reducida por renglones.

  iii) ***a)*** Si la forma escalonada reducida por renglones de A es I, entonces A^{-1} será la matriz a la derecha de la raya vertical punteada.

  b) Si la forma escalonada reducida por renglones de A contiene un renglón de ceros, entonces A no es invertible.
- La matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ es invertible si y sólo si

  el determinante de A, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

  En cuyo caso

  $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
- Dos matrices A y B son **equivalentes por renglón** si A se puede transformar en B reduciendo por renglones.
- Sea A una matriz de $n \times n$. Si $AB = I$ o $BA = I$, entonces A es invertible y $B = A^{-1}$.
- Si $A = (a_{ij})$, entonces la **transpuesta de A**, denotada por A^t, está dada por $A^t = (a_{ij})$.

  Esto es, A^t se obtiene intercambiando los renglones y las columnas de A.

- ***Hechos sobre la transpuesta***

  Si todas las sumas y productos están definidos y A es invertible, entonces

  $$(A^t)^t = A \qquad (AB)^t = B^tA^t \qquad (A + B)^t = A^t + B^t$$

  si A es invertible, entonces $(A^{-1})^t = (A^{-1})^t$

- Una matriz cuadrada A es **simétrica** si $A^t = A$.

- Una **matriz elemental** es una matriz cuadrada que se obtiene llevando a cabo exactamente una operación con renglones sobre la matriz identidad. Los tres tipos de matrices elementales son:

  cR_i se multiplica el renglón i de I por c: $c \neq 0$.

  $R_j + cR_i$ se multiplica el renglón i de I por c y se suma al renglón j: $c \neq 0$.

  P_{ij} se permutan los renglones i y j.

- Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si es el producto de matrices elementales.

- Cualquier matriz cuadrada se puede escribir como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  i) A es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = 0$).

  iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

  iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

  v) A se puede escribir como un producto de matrices elementales.

  vi) det A $\neq 0$ (por ahora, det A está definido sólo si A es una matriz de 2×2).

  vii) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

- El **determinante** de una matriz de 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ está dado por

  $$\text{Determinante de } A = \textbf{det } A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- **Determinante de 3 × 3**

  $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- El **menor *ij*** de la matriz A de $n \times n$, denotado por M_{ij}, es la matriz de $(n - 1) \times (n - 1)$ obtenida al eliminar el renglón i y la columna j de A.

- El **cofactor *ij*** de A, denotado por A_{ij}, está dado por

  $$A_{ij} = (-i)^{i+j} \det M_{ij}$$

- ***Determinante de n × n***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces

  $$\det A = a_{11}A_{11} = a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}$$

  La suma anterior se denomina la **expansión de det A por cofactores en el primer renglón**.

- Si A es una matriz de $n \times n$, triangular superior, triangular inferior o diagonal, cuyas componentes en la diagonal son $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, entonces

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

- ***Teorema básico***

  Si A es una matriz de $n \times n$, entonces

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$

  y

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}$$

  para $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

  Es decir, el determinante de A se puede obtener expandiendo en cualquier renglón o columna de A.

- Si cualquier renglón o columna de A es el vector cero, entonces $\det A = 0$.
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar, entonces $\det A$ se multiplica por c.
- Si A y B son dos matrices de $n \times n$ que son iguales excepto por la columna j (renglón i) y C es la matriz que es idéntica a A y B excepto que la columna j (renglón i) de C es la suma de la columna j de A y la columna j de B (renglón i de A y renglón i de B), entonces $\det C = \det A + \det B$.
- El intercambio de cualesquiera dos columnas o renglones distintos de A tiene el efecto de multiplicar $\det A$ por -1.
- Si cualquier renglón (columna) de A se multiplica por un escalar y se suma a cualquier otro renglón (columna) de A, entonces $\det A$ no cambia.
- Si un renglón (columna) de A es un múltiplo de otro renglón (columna) de A, entonces $\det A = 0$.
- $\det A = \det A^t$.
- La matriz A de $n \times n$ es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.
- $\det AB = \det A \det B$.
- Si A es invertible, entonces $\det A \neq 0$ y

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Sea A una matriz de $n \times n$. La **adjunta** de A, denotada por adj A, es la matriz de $n \times n$ cuya componente ij es A_{ji}, el cofactor ji de A.
- Si $\det A \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes siete afirmaciones son equivalentes:

  i) A es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

- ***Regla de Cramer***

  Sea A una matriz de $n \times n$ con $\det A \neq 0$. Entonces la solución única al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ está dada por

$$x_1 = \frac{D_1}{\det A}, x_2 = \frac{D_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{D_n}{\det A}$$

  donde D_j es el determinante de la matriz obtenida al reemplazar la columna j de A por el vector columna $\mathbf{b}$.

COMPETENCIAS FINALES. UNIDAD 3

De los ejercicios 1 a 10 realice los cálculos indicados:

1. $3\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

3. $5\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ -6 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

5. $6\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 11 a 17 calcule la forma escalonada por renglones y la inversa (si existe) de la matriz dada.

11. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ **16.** $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 18 a 21 primero escriba el sistema en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, después calcule A^{-1} y, por último use la multiplicación de matrices para obtener el vector solución.

18.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 &= 7 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

22. Sea $E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -2 & -6 \\ -2 & 10 & 2 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determine si la matriz E dada es invertible; si lo es, calcule su inversa utilizando la adjunta.

b) Determine $E^{-1} + AdjE =$

c) Determine $E^t + E^{-1} + AdjE =$

d) Determine $(E^{-1} + E^t) + E^t + E^{-1} + AdjE =$

De los ejercicios 23 a 31 calcule la transpuesta de la matriz dada y determine si la matriz es simétrica o antisimétrica.[†]

23. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **24.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ **25.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & -5 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$ **27.** $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -5 & 0 & 4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ **28.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$ **30.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

31. Sea $F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ calcule $\left(F^t + F^{-1}\right)^{-1}$

De los ejercicios 32 a 36 encuentre una matriz elemental de 3×3 que llevaría a cabo las operaciones con renglones dadas.

32. $R_2 \to -2R_2$ **33.** $R_1 \to R_1 + 2R_2$ **34.** $R_3 \to R_3 - 5R_1$

35. $R_3 \rightleftarrows R_1$ **36.** $R_2 \to R_2 + \frac{1}{5}R_3$

[†] Del problema 3.5.22 se tiene que A es antisimétrica si $A = -A$.

De los ejercicios 37 a 40 encuentre la inversa de la matriz elemental.

37. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **38.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **39.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **40.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 41 y 42 escriba la matriz como el producto de matrices elementales.

41. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **42.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 43 y 44 escriba cada matriz como el producto de matrices elementales y una matriz triangular superior.

43. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ **44.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 45 al 54 calcule el determinante.

45. $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ **46.** $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -7 & 4 \end{vmatrix}$ **47.** $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **49.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 10 & 100 & 6 \end{vmatrix}$ **50.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ **52.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -6 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

53. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ **54.** $\begin{vmatrix} 3 & 15 & 17 & 19 \\ 0 & 2 & 21 & 60 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

De los ejercicios 55 al 62 utilice determinantes para calcular la inversa (si existe).

55. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **56.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ **57.** $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **60.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

En los ejercicios 63 al 68 resuelva el sistema utilizando la regla de Cramer.

63.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 5 \end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_3 &= 4 \\ 3x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

65.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 8 \\ -x_3 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

66.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

67.
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

68.
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 8 \\ -x_3 - x_2 &= 3 \\ x_1 - x_3 &= -1 \\ x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$$

Unidad

4

ESPACIOS VECTORIALES

Competencia específica a desarrollar

Comprender el concepto de espacio vectorial como la estructura algebraica que generaliza y hace abstracción de operaciones que aparecen en diferentes áreas de la matemática mediante las propiedades de adición y multiplicación por un escalar.

Construir, utilizando el álgebra de vectores, bases de un espacio vectorial y determinar la dimensión del espacio correspondiente.

4.1 Introducción

En un curso básico de cálculo se estudia al conjunto de los números reales y las propiedades que éstos satisfacen, esas propiedades de suma y producto hacen de $\mathbb{R}$ un espacio vectorial.

Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ junto con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar se denominan *espacios vectoriales*. Se puede decir, de forma intuitiva, que un espacio vectorial es un conjunto de objetos con dos operaciones que obedecen las reglas que acaban de escribirse.

En el presente capítulo habrá un cambio, en apariencia grande, del mundo concreto de la solución de ecuaciones y del manejo sencillo de los vectores que se visualizan, al mundo abstracto de los espacios vectoriales arbitrarios. Existe una ventaja en este cambio. Una vez que, en términos generales, se establecen los hechos sobre los espacios vectoriales se pueden aplicar estos hechos a *todos* los espacios de esta naturaleza. De otro modo, tendría que probarse cada hecho una y otra vez para cada nuevo espacio vectorial que nos encontráramos (y existe un sin fin de ellos). Pero como se verá más adelante, muchos de los teoremas abstractos que se demostrarán, en términos reales no son más difíciles que los que ya se han estudiado.

4.2 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES BÁSICAS

DEFINICIÓN 1

Espacio vectorial real

Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones binarias llamadas **suma** y **multiplicación por un escalar** y que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación.

Notación. Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y si α es un número real, entonces la suma se escribe como $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y el producto escalar de α y $\mathbf{x}$ como $\alpha\mathbf{x}$.

Antes de presentar la lista de las propiedades que satisfacen los vectores en un espacio vectorial deben mencionarse dos asuntos de importancia. En primer lugar, mientras que puede ser útil pensar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ al manejar un espacio vectorial, con frecuencia ocurre que el espacio vectorial parece ser muy diferente a estos cómodos espacios (en breve tocaremos este tema). En segunda instancia, la definición 1 ofrece una definición de un espacio vectorial *real*. La palabra "real" significa que los escalares que se usan son números reales. Sería igualmente sencillo definir un espacio vectorial *complejo* utilizando números complejos en lugar de reales. Este libro está dedicado principalmente a espacios vectoriales reales, pero las generalizaciones a otros conjuntos de escalares presentan muy poca dificultad.

Axiomas de un espacio vectorial

i) Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma)**.

ii) Para todo $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
(ley asociativa de la suma de vectores).

iii) Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
(el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).

iv) Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en $\in V$ tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
($-\mathbf{x}$ se llama **inverso aditivo** de $\mathbf{x}$).

v) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
(ley conmutativa de la suma de vectores).

vi) Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$
(cerradura bajo la multiplicación por un escalar).

vii) Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
(primera ley distributiva).

viii) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\,\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
(segunda ley distributiva).

ix) Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
(ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x) Para cada vector $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Nota. En los problemas 23 y 24 se estudian la propiedad de unicidad sobre el elemento neutro aditivo y el elemento inverso aditivo en un espacio vectorial.

EJEMPLO 1 **El espacio $\mathbb{R}^n$**

Sea $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n \right\}$.

Cada vector en $\mathbb{R}^n$ es una matriz de $n \times 1$. Según la definición de suma de matrices dada en la definición 3.1.5, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es una matriz de $n \times 1$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son matrices de $n \times 1$. Haciendo $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$, se observa que los axiomas *ii*) a *x*) se obtienen de la definición de suma de vectores (matrices) y el teorema 3.1.1.

Nota. Los vectores en $\mathbb{R}^n$ se pueden escribir indistintamente como vectores renglón o vectores columna.

EJEMPLO 2 **Espacio vectorial trivial**

Sea $V = \{0\}$. Es decir, V consiste sólo en el número 0. Como $0 + 0 = 1 \cdot 0 = 0 + (0 + 0) = (0 + 0) + 0 = 0$, se ve que V es un espacio vectorial. Con frecuencia se le otorga el nombre de espacio vectorial **trivial**.

EJEMPLO 3 **Conjunto que no es un espacio vectorial**

Sea $V = \{1\}$. Es decir, V consiste únicamente del número 1. Éste *no* es un espacio vectorial ya que viola el axioma *i*) —el axioma de cerradura—. Para verlo con más claridad, basta con observar que $1 + 1 = 2 \notin V$. También viola otros axiomas, sin embargo, con tan sólo demostrar que viola al menos uno de los diez axiomas queda probado que V no es un espacio vectorial.

Nota. Verificar los diez axiomas puede ser laborioso. En adelante se verificarán únicamente aquellos axiomas que no son obvios.

EJEMPLO 4 **El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran en una recta que pasa por el origen constituye un espacio vectorial**

Sea $V = \{(x, y): y = mx$, donde m es un número real fijo y x es un número real arbitrario$\}$.

Es decir, V consiste en todos los puntos que están sobre la recta $y = mx$ que pasa por el origen y tiene pendiente m. Para demostrar que V es un espacio vectorial, se puede verificar que se cumple cada uno de los axiomas. Observe que los vectores en $\mathbb{R}^2$ se han escrito como renglones en lugar de columnas, lo que en esencia es lo mismo.

i) Suponga que $\mathbf{x} = (x_1, y_1)$ y $\mathbf{y} = (x_2, y_2)$ están en V. Entonces $y_1 = mx_1$, $y_2 = mx_2$, y

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, mx_1) + (x_2, mx_2) = (x_1 + x_2, mx_1 + mx_2)$$
$$= (x_1 + x_2, m(x_1 + x_2)) \in V$$

Por lo tanto se cumple el axioma *i*).

ii) Suponga que $(x, y) \in V$. Entonces $y = mx$ y $-(x, y) = -(x, mx) = (-x, m(-x))$, de manera que $-(x, y)$ también pertenece a V y $(x, mx) + (-x, m(-x)) = (x - x, m(x - x)) = (0, 0)$.

Todo vector en V es un vector en $\mathbb{R}^2$, y $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial, como se muestra en el ejemplo 1. Como $(0, 0) = \mathbf{0}$ está en V (explique por qué) todas las demás propiedades se deducen del ejemplo 1. Entonces V es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que se encuentran sobre una recta que no pasa por el origen no constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y): y = 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$. Es decir, V es el conjunto de puntos que están sobre la recta $y = 2x + 1$. V *no* es un espacio vectorial porque no se cumple la cerradura bajo la suma, como sucede en el ejemplo 3. Para ver esto, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están en V. Entonces,

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Si el vector del lado derecho estuviera en V, se tendría

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) + 1 = 2x_1 + 2x_2 + 1$$

Pero $y_1 = 2x_1 + 1$ y $y_2 = 2x_2 + 1$ de manera que

$$y_1 + y_2 = (2x_1 + 1) + (2x_2 + 1) = 2x_1 + 2x_2 + 2$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \notin V \text{ si } (x_1, y_1) \in V \text{ y } (x_2, y_2) \in V$$

Por ejemplo, (0,1) y (3, 7) están en V, pero $(0, 1) + (3, 7) = (3, 8)$ no está en V porque $8 \neq 2 \cdot 3 + 1$. Una forma más sencilla de comprobar que V no es un espacio vectorial es observar que $\mathbf{0} = (0, 0)$ no se encuentra en V porque $0 \neq 2 \cdot 0 + 1$. No es difícil demostrar que el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que está sobre cualquier recta que no pasa por (0, 0) no constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 6 El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran en un plano que pasa por el origen constituye un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$. Esto es, V es el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que está en el plano con vector normal (a, b, c) y que pasa por el origen. Al igual que en el ejemplo 4, los vectores se escriben como renglones en lugar de columnas.

Suponga que (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) están en V. Entonces $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in V$ porque

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2) = 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto, el axioma *i*) se cumple. Los otros axiomas se verifican fácilmente. De este modo, el conjunto de puntos que se encuentra en un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen, constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 7 El espacio vectorial P_n

Sea $V = P_n$, el conjunto de polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n.† Si $p \in P_n$, entonces

† Se dice que las funciones constantes (incluyendo la función $f(x) = 0$) son polinomios de **grado cero**.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

donde cada a_i es real. La suma de $p(x) + q(x)$ está definida de la manera usual: si $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Es obvio que la suma de dos polinomios de grado menor o igual a n es otro polinomio de grado menor o igual a n, por lo que se cumple el axioma *i*). Las propiedades *ii*) y *v*) a *x*) son claras. Si se define el polinomio $\mathbf{0} = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x + 0$, entonces $0 \in P_n$ y el axioma *iii*) se cumple. Por último, sea $-p(x) = -a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0$, se ve que el axioma *iv*) se cumple, con lo que P_n es un espacio vectorial real.

EJEMPLO 8 Los espacios vectoriales $C[0, 1]$ y $C[a, b]$

† CÁLCULO Sea $V = C[0, 1]$ = el conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en el intervalo $[0, 1]$. Se define

$$(f + g)x = f(x) + g(x) \text{ y } (\alpha f)(x) = \alpha[f(x)]$$

Como la suma de funciones continuas es continua, el axioma *i*) se cumple y los otros axiomas se verifican fácilmente con $\mathbf{0}$ = la función cero y $(-f)(x) = -f(x)$. Del mismo modo, $C[a, b]$, el conjunto de funciones de valores reales definidas y continuas en $[a, b]$, constituye un espacio vectorial.

EJEMPLO 9 El espacio vectorial M_{nm}

Si $V = M_{mn}$ denota el conjunto de matrices de $m \times n$ con componentes reales, entonces con la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales, se puede verificar que M_{mn} es un espacio vectorial cuyo neutro aditivo es la matriz de ceros de dimensiones $m \times n$.

EJEMPLO 10 Un conjunto de matrices invertibles puede no formar un espacio vectorial

Sea S_3 el conjunto de matrices invertibles de 3×3. Se define la "suma" $A \oplus B$ por $A \oplus B = AB$.‡ Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible (por el teorema 3.4.3) de manera que el axioma *i*) se cumple. El axioma *ii*) es sencillamente la ley asociativa para la multiplicación de matrices (teorema 3.2.2); los axiomas *iii*) y *iv*) se satisfacen con $\mathbf{0} = I_3$ y $-A = A^{-1}$. Sin embargo, $AB \neq BA$ en general, entonces el axioma *v*) no se cumple y por lo tanto S_3 no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 11 Un conjunto de puntos en un semiplano puede no formar un espacio vectorial

Sea $V = \{(x, y): y \geq 0\}$. V consiste en los puntos en $\mathbb{R}^2$ en el semiplano superior (los primeros dos cuadrantes). Si $y_1 \geq 0$ y $y_2 \geq 0$, entonces $y_1 + y_2 \geq 0$; así, si $(x_1, y_1) \in V$ y $(x_2, y_2) \in V$, entonces $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in V$. Sin embargo, V no es un espacio vectorial ya que el vector $(1, 1)$, por ejemplo, no tiene un inverso en V porque $(-1, -1) \notin V$. Más aún, el axioma *vi*) falla, ya que si (x, y) α V, entonces α (x, y) α V si $\alpha < 0$.

† CÁLCULO Este símbolo se usa en todo el libro para indicar que el problema o ejemplo utiliza conceptos de cálculo.
‡ Se usa un signo más *encirculado* para evitar confusión con el signo más normal que denota la suma de matrices.

EJEMPLO 12 El espacio $\mathbb{C}^n$

Sea $V = \mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)$: c_i es un número complejo para $i = 1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto de escalares es el conjunto de números complejos. No es difícil verificar que $\mathbb{C}^n$, también es un espacio vectorial.

Como lo sugieren estos ejemplos, existen diferentes tipos de espacios vectoriales y muchas clases de conjuntos que *no* son espacios vectoriales. Antes de terminar esta sección, se demostrarán algunos resultados sobre los espacios vectoriales.

TEOREMA 1

Sea V un espacio vectorial. Entonces

i) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo escalar α.

ii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

iii) Si $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\alpha = 0$ o $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o ambos).

iv) $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in V$.

DEMOSTRACIÓN

i) Por el axioma *iii*), $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$; y del axioma *vii*),

$$\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0} \qquad (1)$$

Sumando $-\alpha\mathbf{0}$ en los dos lados de (1) y usando la ley asociativa (axioma *ii*), se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0}) &= [\alpha\mathbf{0} + \alpha\mathbf{0}] + (-\alpha\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + [\alpha\mathbf{0} + (-\alpha\mathbf{0})] \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} + \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &= \alpha\mathbf{0} \end{aligned}$$

ii) Se usa, esencialmente, la misma prueba que en la parte *i*). Se comienza con $0 + 0 = 0$ y se usa el axioma *vii*) para ver que $0\mathbf{x} = (0 + 0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$ o $0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x}) = 0\mathbf{x} + [0\mathbf{x} + (-0\mathbf{x})]$ o $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} + \mathbf{0} = 0\mathbf{x}$.

iii) Sea $\alpha\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\alpha \neq 0$, se multiplican ambos lados de la ecuación por $1/\alpha$ para obtener $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = (1/\alpha)\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ [por la parte *i*)].Pero $(1/\alpha)(\alpha\mathbf{x}) = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (por el axioma *ix*), de manera que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

iv) Primero se usa el hecho de que $1 + (-1) = 0$. Después, usando la parte *ii*), se obtiene

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x} = [1 + (-1)]\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} \qquad (2)$$

Se suma $-\mathbf{x}$ en ambos lados de (2) para obtener

$$\begin{aligned} -\mathbf{x} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x}) &= \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) + (-1)\mathbf{x} \\ &= \mathbf{0} + (-1)\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \end{aligned}$$

De este modo, $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$. observe que el orden de la suma en la ecuación anterior se pudo invertir utilizando la ley conmutativa (axioma *v*).

Observación. La parte *iii*) del teorema 1 no es tan obvia como parece. Existen situaciones conocidas en las que $xy = 0$ no implica que x o y sean cero. Como ejemplo, se tiene la multiplicación de matrices de 2×2. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, en donde ni A ni B son cero y, como se puede verificar, $AB = 0$, el resultado del producto de estas matrices es la matriz cero.

Autoevaluación

De las siguientes afirmaciones, indique si son falsas o verdaderas:

I. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x$ es un espacio vectorial real.

II. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ con $y = -3x + 1$ es un espacio vectorial real.

III. El conjunto de matrices invertibles de 5×5 forma un espacio vectorial (con "+" definido como en la suma matrices ordinaria).

IV. El conjunto de múltiplos constantes de la matriz idéntica de 2×2 es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

V. El conjunto de matrices idénticas de $n \times n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$ es un espacio vectorial (con "+" definido como en III).

VI. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 0$ es un espacio vectorial real.

VII. El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $2x - y - 12z = 1$ es un espacio vectorial real.

VIII. El conjunto de polinomios de grado 3 es un espacio vectorial real (con "+" definido como la suma de polinomios ordinaria).

Desarrollo de competencias 4.2

De los problemas 1 al 22 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. De no ser así proporcione una lista de los axiomas que no se cumplen.

1. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la suma de matrices y multiplicación por un escalar usuales.

2. El conjunto de matrices diagonales de $n \times n$ bajo la multiplicación (es decir, $A \oplus B = AB$).

3. $\{(x, y)$: $y \leq 0$; x, y reales$\}$ con la suma de vectores y multiplicación por un escalar usuales.

4. Los vectores en el plano que está en el primer cuadrante.

5. El conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ de la forma (x, x, x).

6. El conjunto de polinomios de grado 4 bajo las operaciones del ejemplo 7.

7. El conjunto de polinomios de grado 5 bajo las operaciones del ejemplo 7.

8. El conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ (vea la sección 3.5) bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

9. El conjunto de matrices de 2×2 que tienen la forma $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ bajo la suma y multiplicación por un escalar usuales.

10. El conjunto de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$ con las operaciones de matrices de suma y multiplicación por un escalar.

11. El conjunto que consiste en un solo vector $(0, 0)$ bajo las operaciones usuales en símbolo $\mathbb{R}^2$.

12. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante cero.

13. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 positivo.

14. El conjunto de polinomios de grado $\leq n$ con término constante a_0 negativo.

15. El conjunto de funciones continuas de valores reales definidas en [0, 1] con $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$ bajo las operaciones del ejemplo 8.

16. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen.

17. El conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre la recta $x = t + 1$, $y = 2t$, $z = t - 1$.

18. $\mathbb{R}^2$ con la suma definida por $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1)$ y la multiplicación por un escalar ordinaria.

† CÁLCULO **19.** El conjunto del problema 18 con la multiplicación por un escalar definida por $\alpha(x, y) = (\alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y - 1)$.

20. El conjunto que consiste en un objeto con la suma definida por *objeto* + *objeto* = *objeto* y la multiplicación por un escalar definida por α (*objeto*) = *objeto*.

†**21.** El conjunto de funciones diferenciables definidas en [0, 1] con las operaciones del ejemplo 8.

***22.** El conjunto de números reales de la forma $a + b\sqrt{2}$, donde a y b son números racionales, bajo la suma de números reales usual y la multiplicación por un escalar definida sólo para escalares racionales.

23. Demuestre que en un espacio vectorial el elemento idéntico aditivo es único.

24. Demuestre que en un espacio vectorial todo vector tiene un inverso aditivo único.

25. Si **x** y **y** son vectores en un espacio vectorial V, demuestre que existe un vector único $\mathbf{z} \in V$ tal que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$.

26. Demuestre que el conjunto de números reales positivos forma un espacio vectorial bajo las operaciones $x + y = xy$ y $\alpha x = x^{\alpha}$.

† CÁLCULO **27.** Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas. Demuestre que el conjunto de soluciones de la ecuación es un espacio vectorial bajo las reglas usuales para la suma de funciones y multiplicación por un escalar.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. V **II.** F **III.** F **IV.** V **V.** F **VI.** V **VII.** F **VIII.** F

4.3 SUBESPACIOS

Del ejemplo 4.2.1, se sabe que $\mathbb{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbb{R} \text{ y } y \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial. En el ejemplo 4.2.4, se vio que $V = \{(x, y): y = mx\}$ también es un espacio vectorial. Adicionalmente, es evidente que $V \subset \mathbb{R}^2$. Esto es, $\mathbb{R}^2$ tiene un subconjunto que también es un espacio vectorial. De hecho, todos los espacios vectoriales tienen subconjuntos que también son espacios vectoriales. En esta sección se examinarán estos importantes subconjuntos.

† CÁLCULO Este símbolo se usa para indicar que el problema o ejemplo usa conceptos de cálculo.

DEFINICIÓN 1 **Subespacio**

Sea H un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V y suponga que H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. Entonces se dice que H es un **subespacio** de V.

Se puede decir que el subespacio H **hereda** las operaciones del espacio vectorial "padre" V.

Existen múltiples ejemplos de subespacios en este capítulo; sin embargo, en primer lugar, se demostrará un resultado que hace relativamente sencillo determinar si un subconjunto de V es en realidad un subespacio de V.

TEOREMA 1 **Subespacio**

Un subconjunto no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las dos reglas de cerradura:

Reglas de cerradura para ver si un subconjunto no vacío es un subespacio

i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para todo escalar α.

DEMOSTRACIÓN

Es obvio que si H es un espacio vectorial, entonces las dos reglas de cerradura deben cumplirse. De lo contrario, para demostrar que H es un espacio vectorial, debe demostrarse que los axiomas *i*) *a x*) de la definición cumplen bajo las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar definidas en V. Las dos operaciones de cerradura [axiomas *i*) y *iv*)] se cumplen por hipótesis. Como los vectores en H son también vectores en V, las identidades asociativa, conmutativa, distributiva y multiplicativa [axiomas *ii*), *v*), *vii*), *viii*), *ix*) y *x*)] se cumplen. Sea $\mathbf{x} \in H$. Entonces $0\mathbf{x} \in H$ por hipótesis *ii*). Pero por el teorema 4.2.1, (parte *ii*), $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De este modo, $\mathbf{0} \in H$ y se cumple el axioma *iii*). Por último, por la parte *ii*), $(-1)\mathbf{x} \in H$ para todo $\mathbf{x} \in H$. Por el teorema 4.2.1 (parte *iv*), $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} \in H$ de manera que se cumple el axioma *iv*) y la prueba queda completa.

Este teorema demuestra que para probar si H es o no es un subespacio de V, es suficiente verificar que

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ y $\alpha\mathbf{x}$ están en H cuando $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en H y α es un escalar.

La prueba anterior contiene un hecho que por su importancia merece ser mencionado de forma explícita:

Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al $\mathbf{0}$. **(1)**

Este hecho con frecuencia facilitará la averiguación de si un subconjunto de V en particular *no* es un subespacio de V. Es decir, si un subconjunto no contiene al $\mathbf{0}$, entonces no es un subespacio. Note que el vector cero en H, un subespacio de V, es el mismo que el vector cero en V.

A continuación se mostrarán algunos ejemplos de subespacios.

EJEMPLO 1 El subespacio trivial

Para cualquier espacio vectorial V, el subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ que consiste en el vector cero es únicamente un subespacio ya que $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo número real α [parte *i*) del teorema 4.2.1]. Esto se denomina el **subespacio trivial**.

EJEMPLO 2 Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo

SUBESPACIOS PROPIOS

Para cada espacio vectorial V, V es un subespacio de sí mismo.

Los primeros dos ejemplos muestran que todo espacio vectorial V contiene dos subespacios, $\{\mathbf{0}\}$ y V (que coinciden si $V = \{\mathbf{0}\}$). Es más interesante encontrar otros subespacios. Los subespacios distintos a $\{\mathbf{0}\}$ y $\mathbf{V}$ se denominan **subespacios propios**.

EJEMPLO 3 Un subespacio propio de $\mathbb{R}^2$

Sea $H = \{(x, y): y = mx\}$ (vea el ejemplo 4.2.4). Entonces, como ya se dijo, H es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. En la sección 4.6 (problema 15) se verá que si H es cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$, entonces H consiste en el conjunto de puntos que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen; es decir, un conjunto de puntos que se encuentra sobre una recta que pasa por el origen es el único tipo de subespacio propio de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 4 Un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

Sea $H = \{(x, y, z): x = at, y = bt \text{ y } z = ct; a, b, c, t \text{ reales}\}$. Entonces H consiste en los vectores en $\mathbb{R}^3$ que se encuentran sobre una recta que pasa por el origen. Para ver que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, sea $\mathbf{x} = (at_1, bt_1, ct_1) \in H$ y $\mathbf{y} = (at_2, bt_2, ct_2) \in H$. Entonces

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (a(t_1 + t_2), b(t_1 + t_2), c(t_1 + t_2)) \in H$$

y

$$\alpha\mathbf{x} = (a(\alpha t_1), b(\alpha t_2), c(\alpha t_3)) \in H.$$

Así, H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 5 Otro subespacio propio de $\mathbb{R}^3$

Sea $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0; a, b, c \text{ reales}\}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 4.2.6, π es un espacio vectorial; así, π es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

En la sección 4.6 se demostrará que los conjuntos de vectores que se encuentran sobre rectas y planos que pasan por el origen son los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$.

Antes de analizar más ejemplos, es importante observar que *no todo espacio vectorial tiene subespacios propios.*

EJEMPLO 6 $\mathbb{R}$ no tiene subespacios propios

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}$.† Si $H \neq \{\mathbf{0}\}$, entonces H contiene un número real α diferente de cero. Por el axioma *vi*), $1 = (1/\alpha)\,\alpha \in H$ y $\beta 1 = \beta \in H$ para todo número real β. Así, si H no es el subespacio trivial, entonces $H = \mathbb{R}$. Es decir, $\mathbb{R}$ **no** tiene subespacios propios.

† Observe que $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial real; es decir, $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial en donde los escalares se toman como los números reales. Éste es el ejemplo 4.2.1, con $n = 1$.

EJEMPLO 7 **Algunos subespacios propios de P_n**

Si P_n denota el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a n (ejemplo 4.2.7), y si $0 \leq m < n$, entonces P_m es un subespacio propio de P_n como se verifica fácilmente.

EJEMPLO 8 **Un subespacio propio de M_{mn}**

Sea M_{mn} (ejemplo 4.2.10) el espacio vectorial de matrices de $m \times n$ con componentes reales y sea $H = \{A \in M_{mn}: a_{11} = 0\}$. Por la definición de suma de matrices y multiplicación por un escalar, es obvio que los dos axiomas de cerradura se cumplen de manera que H es un subespacio.

EJEMPLO 9 **Un subconjunto que no es un subespacio propio de M_{mn}**

Sea $V = M_{nn}$ (las matrices de $n \times n$) y sea $H = \{A \in M_{nn}: A \text{ es invertible}\}$. Entonces H no es un subespacio ya que la matriz cero de $n \times n$ no está en H.

EJEMPLO 10 **Un subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

$P_n[0, 1]$ [†] $\subset C[0, 1]$ (vea el ejemplo 4.2.8) porque todo polinomio es continuo y P_n es un espacio vectorial para todo entero n de manera que cada $P_n[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$.

EJEMPLO 11 **$C^1[0, 1]$ es un subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

Sea $C^1[0, 1]$ el conjunto de funciones con primeras derivadas continuas definidas en $[0, 1]$. Como toda función diferenciable es continua, se tiene $C^1[0, 1] \subset C[0, 1]$. Puesto que la suma de dos funciones diferenciables es diferenciable y un múltiplo constante de una función diferenciable es diferenciable, se ve que $C^1[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. Se trata de un subespacio propio porque no toda función continua es diferenciable.

EJEMPLO 12 **Otro subespacio propio de $C[0, 1]$**

CÁLCULO

Si $f \in C[0, 1]$, entonces $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe. Sea $H = \{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Si $f \in H$ y $g \in H$, entonces $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx = 0 + 0 = 0$ y $\int_0^1 \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Así $f + g$ y αf están en H para todo número real α. Esto muestra que H es un subespacio propio de $C[0, 1]$.

Como lo ilustran los últimos tres ejemplos, un espacio vectorial puede tener un número grande y variado de subespacios propios. Antes de terminar esta sección, se demostrará un hecho interesante sobre subespacios.

TEOREMA 2

Sea H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACIÓN

Observe que $H_1 \cap H_2$ es no vacío porque contiene al $\mathbf{0}$. Sea $\mathbf{x}_1$ $H_1 \cap H_2$ y $\mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. Entonces como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1$, y $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_2$. Esto significa que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H_1 \cap H_2$. De manera similar $\alpha\mathbf{x}_1 \in H_1 \cap H_2$. Por lo tanto, se cumplen los dos axiomas de cerradura y $H_1 \cap H_2$ es un subespacio.

[†] $P_n[0, 1]$ denota el conjunto de polinomios de grado menor o igual a n, definidos en el intervalo $[0, 1]$.

EJEMPLO 13 **La intersección de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio**

En $\mathbb{R}^3$ sea $H_1 = \{(x, y, z)\colon 2x - y - z = 0\}$ y $H_2 = \{(x, y, z)\colon x + 2y + 3z = 0\}$. Entonces H_1 y H_2 consisten en vectores que se encuentran sobre planos que pasan por el origen y son, según el ejemplo 5, subespacios de $\mathbb{R}^3$. $H_1 \cap H_2$ es la intersección de los dos planos que se calculan como en el ejemplo 9 de la sección 1.9:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

reduciendo renglones, se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & 0 \end{array}\right)$$

De este modo, todas las soluciones al sistema homogéneo están dadas por $\left(-\frac{1}{5}z, -\frac{7}{5}z, z\right)$.

Haciendo $z = t$, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta L en $\mathbb{R}^3$: $x = -\frac{1}{5}t$, $y = -\frac{7}{5}t$, $z = t$. Como se observó en el ejemplo 4, el conjunto de vectores sobre L constituye un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Observación. No es necesariamente cierto que si H_1 y H_2 son subespacios de V, $H_1 \cup H_2$ es un subespacio de V (puede o no serlo). Por ejemplo, $H_1 = \{(x, y)\colon y = 2x\}$ y $\{(x, y)\colon y = 3x\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^2$, pero $H_1 \cup H_2$ *no* es un subespacio. Para ver esto, observe que $(1, 2) \in H_1$ y $(1, 3) \in H_2$ de manera que tanto $(1, 2)$ como $(1, 3)$ están en $H_1 \cup H_2$. Pero $(1, 2) + (1, 3) = (2, 5) \notin H_1 \cup H_2$ porque $(2, 5) \notin H_1$ y $(2, 5) \in H_2$. Así, $H_1 \cup H_2$ no es cerrado bajo la suma y por lo tanto no es un subespacio.

AUTOEVALUACIÓN

De las siguientes aseveraciones, evalúe si son falsas o verdaderas.

I. Conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II. El conjunto de vectores de la forma $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

III. El conjunto de matrices diagonales de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

IV. El conjunto de matrices triangulares superiores de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

V. El conjunto de matrices triangulares de 3×3 es un subespacio de M_{33}.

VI. Sea H un subespacio de M_{22}. Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ debe estar en H.

VII. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 3y - z = 0 \right\}$ y $K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - 2y + 5z = 0 \right\}$, entonces $H \cup K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. Si H y K son los subconjuntos del problema VII, entonces $H \cap K$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

IX. El conjunto de polinomios de grado 2 es un subespacio de P_3.

Desarrollo de competencias 4.3

De los problemas 1 al 26 determine si el subconjunto dado H del espacio vectorial V es un subespacio de V.

1. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); y \geq 0\}$

2. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x = y\}$

3. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); y = 2x\}$

4. $V = \mathbb{R}^3$; $H =$ el plano xy

5. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$

6. $V = \mathbb{R}^2$; $H = \{(x, y) : x^2 + y^3 < 1\}$

7. $V = M_{mn}$; $H = \{D \in M_{mn}; D \text{ es diagonal}\}$

8. $V = M_{mn}$; $H = \{T \in M_{mn}; T \text{ es triangular superior}\}$

9. $V = M_{mn}$; $H = \{T : T \text{ es triangular inferior}\}$

10. $V = M_{mn}$; $H = \{S \in M_{mn} : S \text{ es simétrica}\}$

11. $V = M_{mn}$; $H = \{A \in M_{mn} : a_{ij} = 0\}$

12. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \right\}$

13. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

14. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

15. $V = M_{22}$; $H = \left\{ A \in M_{22} : A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\}$

16. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4 : \text{grado } p = 4\}$

17. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n : p(0) = 0 \text{ y } p'(0) = 0\}$

18. $V = P_4$; $H = \{p \in P_4 : p(0) = 0\}$

19. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$

20. $V = P_n$; $H = \{p \in P_n : p(0) = 1\}$

21. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}$

22. $V = C[0, 1]$; $H = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 2\}$

CÁLCULO **23.** $V = C^1[0, 1]$; $H = \{f \in C^1[0, 1] : f'(0) = 0\}$

CÁLCULO **24.** $V = C[a, b]$; donde a y b son números reales y $a < b$; $H = \{f \in C[a, b] : \int_a^b f(x)\,dx = 0\}$

CÁLCULO **25.** $V = C[a, b]$; $H = \{f \in C[a, b] : \int_a^b f(x)\,dx = 1\}$

26. $V = C[a, b]$; $H = \left\{ f \in C[a, b]: \int_a^b f^2(x)dx \right\}$

27. Sea $V = M_{22}$; sean $H_1 = \{A \in M_{22}: a_{11} = 0\}$ y $H_2 = \left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \right\}$.

a) Demuestre que H_1 y H_2 son subespacios.

b) Describa el subconjunto de $H = H_1 \cap H_2$ y muestre que es un subespacio.

CÁLCULO **28.** Si $V = C[0, 1]$, sea H_1 el subespacio del ejemplo 10 y H_2 el subespacio del ejemplo 11. Describa el conjunto $H_1 \cap H_2$ y demuestre que es un subespacio.

29. Sea A una matriz de $n \times m$ y sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^m$. H se llama **espacio nulo** de la matriz A.

30. En el problema 29 sea $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m: A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$. Demuestre que H no es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

31. Sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde a, b, c y d son números reales, no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^4$ que pasa por el origen.

32. Sea $H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no todos cero. Demuestre que H es un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. Al igual que en el problema 31, H se llama un **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$.

33. Sean H_1 y H_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $H_1 + H_2 = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 \in H_1 \text{ y } \mathbf{v}_2 \in H_2\}$. Demuestre que H_1 y H_2 es un subespacio de V.

34. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores en $\mathbb{R}^2$. Demuestre que $H = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2; a, b \text{ reales}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

***35.** En el problema 34 demuestre que si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son no colineales, entonces $H = \mathbb{R}^2$.

***36.** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores arbitrarios en un espacio vectorial V. Sea $H = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$, donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares$\}$. Demuestre que H es un subespacio de V. H se llama el subespacio **generado** por los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. F **II.** V **III.** V **IV.** V **V.** F **VI.** V
VII. F **VIII.** V **IX.** F

4.4 COMBINACIÓN LINEAL Y ESPACIO GENERADO

Se ha visto que todo vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$ en $\mathbb{R}^3$ se puede escribir en la forma

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

En cuyo caso se dice que $\mathbf{v}$ es una *combinación lineal* de los tres vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$. De manera más general, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1

Combinación lineal

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \qquad (1)$$

donde, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son escalares se denomina una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 1 **Una combinación lineal en $\mathbb{R}^3$**

En $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ya que $\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 **Una combinación lineal en M_{23}**

En M_{23}, $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$ lo que muestra que $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 3 **Combinaciones lineales en P_n**

En P_n todo polinomio se puede escribir como una combinación lineal de los "monomios" $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

DEFINICIÓN 2 **Conjunto generador**

Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ de un espacio vectorial V **generan** a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de los mismos. Es decir, para todo $\mathbf{v} \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \qquad (2)$$

EJEMPLO 4 **Conjunto de vectores que generan $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$**

Los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^2$ y los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$,

porque $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ahora se verá brevemente la generación de algunos otros espacios vectoriales.

EJEMPLO 5 **$n + 1$ vectores que generan a P_n**

Del ejemplo 3 se deduce que los monomios $1, x, x^2, \ldots, x^n$ generan a P_n.

EJEMPLO 6 **Cuatro vectores que generan a M_{22}**

Como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vemos que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}.

EJEMPLO 7 **Ningún conjunto finito de polinomios generan a P**

Sea P el espacio vectorial de polinomios. Entonces ningún conjunto *finito* de polinomios genera a P. Para ver esto, suponga que $p_1, p_2, \ldots, p_m$ son polinomios. Sea p_k el polinomio de mayor grado en este conjunto y sea $N = \text{grado}(p_k)$. Entonces el polinomio $p(x) = x^{N+1}$ no se puede escribir como una combinación lineal de $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Por ejemplo si $N = 3$, entonces $x^4 \neq c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$ para cualesquiera escalares c_0, c_1, c_2 y c_3.

Ahora se analizará otra forma de encontrar subespacios de un espacio vectorial V.

DEFINICIÓN 3 **Espacio generado por un conjunto de vectores**

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, k vectores de un espacio vectorial V. El **espacio generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Es decir

$$\text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k\} \quad (3)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son escalares arbitrarios.

TEOREMA 1 Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

DEMOSTRACIÓN La prueba es sencilla y se deja como ejercicio (vea el problema 16).

EJEMPLO 8 **El espacio generado por dos vectores en $\mathbb{R}^3$**

Sea $\mathbf{v}_1 = (2, -1, 4)$ y $\mathbf{v}_2 = (4, 1, 6)$. Entonces $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v}: \mathbf{v} = a_1(2, -1, 4) + a_2(4, 1, 6)\}$.

¿Cuál es la apariencia de H? Si $\mathbf{v} = (x, y, z) \in H$, entonces se tiene $x = 2a_1 + 4a_2$, $y = -a_1 + a_2$ y $z = 4a_1 + 6a_2$. Si se piensa que (x, y, z) está fijo, entonces estas ecuaciones se pueden ver como un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas a_1, a_2. Este sistema se resuelve en la forma usual:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 2 & 4 & x \\ 4 & 6 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 6 & x + 2y \\ 0 & 10 & z + 4y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{6}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & (x+2y)/6 \\ 0 & 10 & z+4y \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 10R_2]{R_1 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x/6-2y/3 \\ 0 & 1 & x/6+y/3 \\ 0 & 0 & -5x/3+2y/3+z \end{array}\right)$$

Desde la unidad 1 se observa que el sistema tiene una solución únicamente si $-5x/3 + 2y/3 + z = 0$; o multiplicando por -3, si

$$5x - 2y - 3z = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

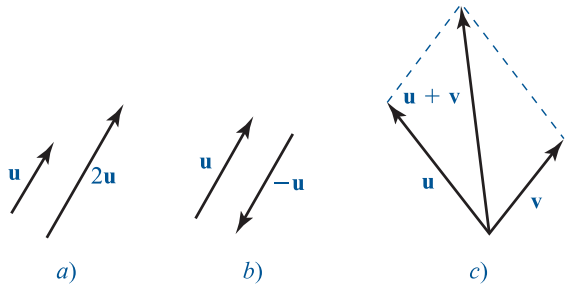
La ecuación (4) es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen.

Este último ejemplo se puede generalizar para probar el siguiente hecho interesante:

> El espacio generado por dos vectores diferentes de cero en $\mathbb{R}^3$ que no son paralelos es un plano que pasa por el origen.

En los problemas 22 y 23 se encuentra la sugerencia de una demostración.

Figura 4.1
u + **v** se obtiene de la regla del paralelogramo.



Se puede dar una interpretación geométrica de este resultado. Vea los vectores de la figura 4.1. Se conoce la interpretación geométrica de los vectores $2\mathbf{u}$, $-\mathbf{u}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, por ejemplo. Haciendo uso de éstos, se observa que cualquier otro vector en el plano de **u** y **v** se puede obtener como una combinación lineal de **u** y **v**. La figura 4.2 muestra cuatro situaciones diferentes en las que un tercer vector **w** en el plano de **u** y **v** se puede escribir como $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.

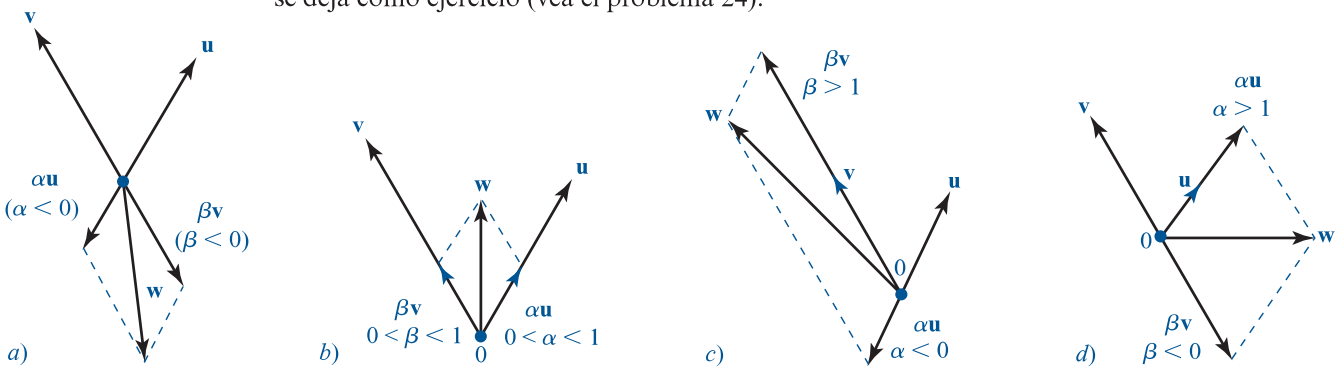
Observación. En las definiciones 2 y 3 se uilizaron dos términos diferentes: "genera" y "espacio generado". Se hace hincapié en que un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *genera* a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$; pero

El *espacio generado* por los n vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ es el conjunto de combinaciones lineales de estos vectores.

Estos dos conceptos son diferentes —aun cuando los términos se parezcan—.

Se cierra esta sección con la mención de un resultado útil. Su demostración no es difícil y se deja como ejercicio (vea el problema 24).

Figura 4.2
En cada caso $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ para valores adecuados de α y β.



TEOREMA 2

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$, $n+1$ vectores que están en un espacio vectorial V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también genera a V. Es decir, si se agregan uno o más vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador.

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores no pueden generar a $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

II. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a P_2?

a) $1, x^2$ *b)* $3, 2x, -x^2$ *c)* $1+x, 2+2x, x^2$ *d)* $1, 1+x, 1+x^2$

Indique si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos

III. $\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\}$.

IV. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ está en el espacio generado por $\left\{\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$.

V. $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{10\,000}\}$ genera a P.

VI. $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ genera a M_{22}.

VII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

VIII. gen $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-8\\0\\8\\2\end{pmatrix}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

IX. Si $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}\right\}$ también genera $\mathbb{R}^2$.

Desarrollo de competencias 4.4

De los problemas 1 al 16 determine si el conjunto dado de vectores genera el espacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

3. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

4. En $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$

5. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}$

6. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\5\end{pmatrix}$

7. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

8. En $\mathbb{R}^3$: $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\3\\5\end{pmatrix}$

9. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (1, 1, 2), (0, 0, 1)$

10. En $\mathbb{R}^3$: $(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (0, 0, 1)$

11. En P_2: $1 - x, 3 - x^2$

12. En P_2: $1 - x, 3 - x^2, x$

13. En P_2: $x^2 + 1; x^2 - 1; x + 6$

14. En M_{22}: $\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$

15. En M_{22}: $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4 & -1\\3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2 & 5\\6 & 0\end{pmatrix}$

16. En M_{23}: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

17. Demuestre que dos polinomios de grado menor o igual a dos, no pueden generar P_2.

***18.** Si $p_1, p_2, \ldots, p_m$ genera P_m, demuestre que $m \geq n + 1$.

19. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, [*Sugerencia:* Utilizando la definición de espacio generado escriba $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ como combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.]

20. Demuestre que el conjunto infinito $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ genera P, el espacio vectorial de polinomios.

21. Sea H un subespacio de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$. Es decir, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es el subespacio *más pequeño* de V que contiene a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

22. Sean $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que si $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$, entonces gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por el origen.

****23.** En el problema 22 suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son paralelos. Demuestre que $H =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen. ¿Cuál es la ecuación del plano? [*Sugerencia:* Si $(x, y, z) \in H$, escriba $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$ y encuentre una condición respecto a x, y y z tal que el sistema de 3×2 resultante tenga una solución.]

24. Pruebe el teorema 2. [*Sugerencia:* Si $\mathbf{v} \in V$, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ con el coeficiente de $\mathbf{v}_{n+1}$ igual a cero.]

25. Demuestre que M_{22} se puede generar con matrices invertibles.

26. Sean $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos n-vectores en un espacio vectorial V. Suponga que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{12}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{u}_n \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{u}_1 + a_{n2}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

Demuestre que si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ = gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *a*, *b*, *d* **II.** *b*, *d* **III.** V **IV.** F **V.** V **VI.** V
VII. F **VIII.** V **IX.** V

4.5 INDEPENDENCIA LINEAL

En el estudio del álgebra lineal, una de las ideas centrales es la de dependencia o independencia lineal de los vectores. En esta sección se define el significado de independencia lineal y se muestra su relación con la teoría de sistemas homogéneos de ecuaciones y determinantes.

¿Existe una relación especial entre los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$? Por supuesto, se puede apreciar que $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1$; o si se escribe esta ecuación de otra manera,

$$2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad (1)$$

En otras palabras, el vector cero se puede escribir como una combinación no trivial de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (es decir, donde los coeficientes en la combinación lineal no son ambos cero). ¿Qué tienen de especial los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ 19 \end{pmatrix}$? La respuesta a esta pregunta es más difícil a simple vista. Sin embargo, es sencillo verificar que $\mathbf{v}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$; reescribiendo esto se obtiene

$$3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Se ha escrito el vector cero como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Parece que los dos vectores en la ecuación (1) y los tres vectores en la ecuación (2) tienen una relación más cercana que un par arbitrario de 2-vectores o una terna arbitraria de 3-vectores. En cada caso, se dice que los vectores son *linealmente dependientes*. En términos generales, se tiene la importante definición que a continuación se presenta.

DEFINICIÓN 1 **Dependencia e independencia lineal**

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son **linealmente dependientes** si existen n escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *no todos cero* tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \qquad (3)$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

Para decirlo de otra forma, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ se cumple únicamente para $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Son linealmente dependientes si el vector cero en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ con coeficientes no todos iguales a cero.

Nota. Se dice que los *vectores* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *son* linealmente independientes (o dependientes), o que *el conjunto* de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *es* linealmente independiente (o dependiente). Esto es, se usan las dos frases indistintamente.

¿Cómo se determina si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente? El caso de 2-vectores es sencillo.

TEOREMA 1 **Dependencia e independencia lineal**

Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

DEMOSTRACIÓN

Primero suponga que $\mathbf{v}_2 = c\mathbf{v}_1$ para algún escalar $c \neq 0$. Entonces $c\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Por otro parte, suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Entonces existen constantes c_1 y c_2 al menos uno distinto de cero, tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Si $c_1 \neq 0$, entonces dividiendo entre c_1 se obtiene $\mathbf{v}_1 + (c_2/c_1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, o sea,

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2$$

Es decir, $\mathbf{v}_1$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_2$. Si $c_1 = 0$, entonces $c_2 \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 1 **Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^4$**

Los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que $\mathbf{v}_2 = -3\mathbf{v}_1$.

EJEMPLO 2 **Dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$**

Los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$ son linealmente independientes; si no lo fueran, se tendría $\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\\2c\\4c\end{pmatrix}$. Entonces $2 = c$, $5 = 2c$ y $-3 = 4c$, lo cual es evidentemente imposible para cualquier número c.

EJEMPLO 3 **Determinación de la dependencia o independencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Entonces multiplicando y sumando se obtiene $\begin{pmatrix}c_1 + 2c_2\\-2c_1 - 2c_2 + c_3\\3c_1 + 7c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Esto lleva al sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas c_1, c_2 y c_3:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= 0\\ -2c_1 + 2c_2 + c_3 &= 0\\ 3c_1 + 7c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

De este modo, los vectores serán linealmente dependientes si y sólo si el sistema (4) tiene soluciones no triviales. Se escribe el sistema (4) usando una matriz aumentada y después se reduce por renglones. La forma escalonada reducida por renglones de

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) \text{ es } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Este último sistema de ecuaciones se lee $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Por lo tanto, (4) no tiene soluciones no triviales y los vectores dados son linealmente independientes.

EJEMPLO 4 **Determinación de la dependencia lineal de tres vectores en $\mathbb{R}^3$**

Determine si los vectores $\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}11\\-6\\12\end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución La ecuación $c_1\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}11\\-6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + 3c_2 + 11c_3 &= 0 \\ -3c_1 \quad - \ 6c_3 &= 0 \\ 4c_2 + 12c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Escribiendo el sistema (5) en la forma de matriz aumentada y reduciendo por renglones, se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos detener aquí ya que la teoría de la sección lA muestra que el sistema (5) tiene un número infinito de soluciones. Por ejemplo, la última matriz aumentada se lee

$$\begin{aligned} c_1 \quad + 2c_3 &= 0 \\ c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Si se hace $c_3 = 1$, se tiene $c_2 = -3$ y $c_1 = -2$, de manera que, como puede verificarse,

$$-2\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ y los vectores son linealmente dependientes.

Interpretación geométrica de la dependencia lineal en $\mathbb{R}^3$

En el ejemplo 3 se encontraron tres vectores en $\mathbb{R}^3$ que eran linealmente independientes. En el ejemplo 4 se encontraron tres vectores que eran linealmente dependientes. ¿Qué significado geométrico tiene esto?

Suponga que **u**, **v** y **w** son tres vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$. Se pueden tratar los vectores como si tuvieran un punto terminal en el origen. Entonces existen constantes c_1, c_2 y c_3, no todas cero, tales que

$$c_1\mathbf{u} + c_2\mathbf{v} + c_3\mathbf{w} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Suponga que $c_3 \neq 0$ (un resultado similar se cumple si $c_1 \neq 0$ o $c_2 \neq 0$). Entonces se pueden dividir ambos lados de (6) entre c_3 y reacomodar los términos para obtener

$$\mathbf{w} = -\frac{c_1}{c_3}\mathbf{u} - \frac{c_2}{c_3}\mathbf{v} = A\mathbf{u} + B\mathbf{v}$$

donde $A = -c_1/c_3$ y $B = -c_2/c_3$. Ahora se demostrará que **u**, **v** y **w** son coplanares. Se calcula

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (A\mathbf{u} \times B\mathbf{v}) = \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = A[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] + B[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] \\ &= A \cdot 0 + B \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

porque **u** y **v** son ambos ortogonales a $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Sea $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Si $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** son paralelos (y colineales). Así **u**, **v** y **w** están en cualquier plano que contiene tanto a **u** como a **v** y por consiguiente son coplanares. Si $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, entonces **u** y **v** están en el plano que consiste en aquellos

vectores que pasan por el origen que son ortogonales a **n**. Pero **w** está en el mismo plano porque $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$. Esto muestra que **u**, **v** y **w** son coplanares.

En el problema 66 se pide al lector que demuestre que si **u**, **v** y **w** son coplanares, son linealmente dependientes. Se concluye que

> Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ son linealmente dependientes si y sólo si son coplanares.

La figura 4.3 ilustra este hecho utilizando los vectores en los ejemplos 3 y 4.

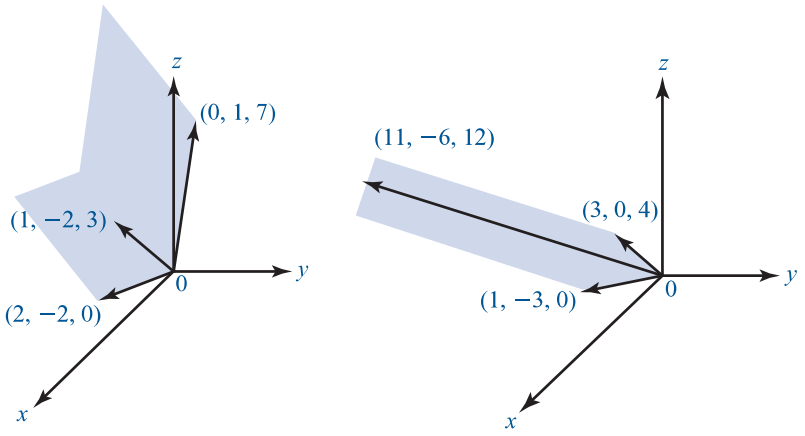


Figura 4.3
Dos conjuntos de tres vectores.

a) Estos tres vectores son independientes y no coplanares

b) Estos tres vectores son independientes y coplanares

La teoría de sistemas homogéneos nos habla acerca de la dependencia o independencia lineal de los vectores.

TEOREMA 2

Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es siempre linealmente dependiente si $n > m$.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^m$ e intentemos encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{7}$$

Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$. Entonces la ecuación (7) se convierte en

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Pero el sistema (8) es el sistema 2.4.1 y, según el teorema 2.4.1, tiene un número infinito de soluciones si $n > m$. De esta forma, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero, que satisfacen (8) y, por lo tanto, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes.

EJEMPLO 5 **Cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$ que son linealmente dependientes**

Los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 18 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes ya que constituyen un conjunto de cuatro vectores de 3 elementos.

Existe un corolario importante (y obvio) del teorema 2.

COROLARIO

Un conjunto de vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ contiene a lo más n vectores.

Nota. El corolario se puede expresar de otra forma. Si se tienen n vectores de dimensión n linealmente independientes, no se pueden incluir más vectores sin convertir el conjunto en uno linealmente dependiente.

Del sistema (8) se puede hacer otra observación importante cuya prueba se deja como ejercicio (refiérase al problema 32 de la presente sección).

TEOREMA 3

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Entonces las columnas de A consideradas como vectores, son linealmente dependientes si y sólo si el sistema (8), que se puede escribir como $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$, tiene soluciones no triviales.

Aquí $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 6 **Soluciones a un sistema homogéneo escritas como combinaciones lineales de vectores solución linealmente independientes**

Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Solución Haciendo una reducción de renglones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

El último sistema es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad & -9x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_2 + 4x_3 & - 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

Se ve que este sistema tiene un número infinito de soluciones, que se escriben como una combinación lineal de los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{(10)}$$

Observe que $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ son soluciones linealmente independientes para (9) porque ninguno de los dos es múltiplo del otro (el lector debe verificar que sean soluciones). Como x_3 y x_4 son números reales arbitrarios, se ve de (10) que el conjunto de soluciones al sistema (9) es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por estos dos vectores solución linealmente independientes.

Los siguientes dos teoremas se deducen directamente del teorema 3.

TEOREMA 4

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores en $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz de $n \times n$ cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN

Éste es el teorema 3 para el caso $m = n$.

TEOREMA 5

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN

Del teorema 4 y del teorema de resumen 3.10.4, las columnas de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow \mathbf{0}$ es la única solución a $A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \det A \neq 0$. Aquí, $\Leftrightarrow$ significa "si y sólo si".

El teorema 5 nos lleva a extender nuestro teorema de resumen.

TEOREMA 6

Teorema de resumen

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras siete (de manera que si una es cierta, todas son ciertas).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad de $n \times n$, I_n.

v) A es el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) $\det A \neq 0$.

viii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN

La única parte que no se ha demostrado hasta el momento es que los renglones de A son linealmente independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Las columnas son independientes $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $\Leftrightarrow \det A^t = \det A \neq 0$ (vea el teorema 3.8.4) $\Leftrightarrow$ las columnas de A^t son linealmente independientes. Pero las columnas de A^t son los renglones de A. Esto completa la prueba.

El siguiente teorema combina las ideas de independencia lineal y conjuntos generadores en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 7

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$, vectores linealmente independientes y sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, un vector en $\mathbb{R}^n$. Debemos demostrar que existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \tag{11}$$

En (11) se multiplican componentes, se igualan y se suman para obtener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_{12} + \ldots + a_{1n}c_n &= x_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{2n}c_n &= x_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \ldots + a_{nn}c_n &= x_n \end{aligned} \tag{12}$$

Se puede escribir (12) como $A\mathbf{c} = \mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Pero $\det A \neq 0$ ya que las columnas de A son linealmente independientes. De manera que el sistema (12) tiene una solución única $\mathbf{c}$ por el teorema 6 y el teorema queda demostrado.

Observación. Esta demostración no sólo muestra que $\mathbf{v}$ se puede escribir como una combinación lineal de los vectores independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, sino también que esto se puede lograr *de una sola manera* (ya que el vector solución $\mathbf{c}$ es único).

EJEMPLO 7 Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ generan $\mathbb{R}^3$ si su determinante es diferente de cero

Los vectores $(2, -1, 4)$, $(1, 0, 2)$ y $(3, -1, 5)$ generan $\mathbb{R}^3$ porque $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ y, por lo tanto, son independientes.

Todos los ejemplos que se han dado hasta ahora han sido en el espacio $\mathbb{R}^n$. Esto no representa una restricción tan grande como parece. Se puede demostrar que diferentes espacios vectoriales de apariencia muy distinta tienen, en esencia, las mismas propiedades. Por ejemplo, se verá que el espacio P_n es fundamentalmente el mismo que $\mathbb{R}^{n+1}$. Se dirá que dos espacios vectoriales con esta forma son *isomórficos*.

Este importante resultado tendrá que esperar hasta la unidad 5. Mientras tanto, se darán algunos ejemplos en espacios diferentes a $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 8 Tres matrices linealmente independientes en M_{23}

En M_{23}, sean $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Determine si A_1, A_2 y A_3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0$. Entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 - c_2 - c_3 & c_2 & 2c_1 + 4c_2 + c_3 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 & c_1 + 3c_2 + 2c_3 & -c_1 + c_3 \end{pmatrix}$$

Esto nos proporciona un sistema homogéneo de seis ecuaciones con tres incógnitas, c_1, c_2 y c_3 en el cual resulta bastante sencillo verificar que la única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. De este modo, las tres matrices son linealmente independientes.

EJEMPLO 9 Cuatro polinomios linealmente independientes en P_3

En P_3 determine si los polinomios 1, x, x^2 y x^3 son linealmente dependientes o independientes.

Solución Suponga que $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$. Esto debe cumplirse para todo número real x. En particular, si $x = 0$, se obtiene $c_1 = 0$. Entonces, haciendo $x = 1, -1, 2$ se obtiene, sucesivamente,

$$\begin{aligned} c_2 + c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_2 + c_3 - c_4 &= 0 \\ 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

De manera que el sistema tiene una solución única $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ y los cuatro polinomios son linealmente independientes. Esto se puede ver de otra forma. Se sabe que cualquier polinomio de grado 3 tiene a lo más tres raíces reales. Pero si $c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 = 0$ para algunas constantes diferentes de cero c_1, c_2, c_3, y c_4 y para todo número real x, entonces se ha construido un polinomio cúbico para el que todo número real es una raíz, lo cual es imposible.

EJEMPLO 10 **Tres polinomios linealmente independientes en P_2**

En P_2, determine si los polinomios $x - 2x^2$, $x^2 - 4x$ y $-7x + 8x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Sea $c_1(x - 2x^2) + c_2(x^2 - 4x) + c_3(-7x + 8x^2) = 0$. Reacomodando los términos se obtiene

$$\begin{aligned} (c_1 - 4c_2 - 7c_3)x &= 0 \\ (-2c_1 + c_2 + 8c_3)x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se cumplen para todo x si y sólo si

$$c_1 - 4c_2 - 7c_3 = 0$$

y

$$-2c_1 + c_2 + 8c_3 = 0$$

Pero para el teorema 2.4.1, este sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas tiene un número infinito de soluciones. Lo que muestra que los polinomios son linealmente dependientes.

Si se resuelve este sistema homogéneo, se obtiene, sucesivamente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{25}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{7} & 0 \end{array}\right)$$

Así, se puede dar un valor arbitrario a c_3, $c_1 = \frac{25}{7}c_3$ y $c_2 = -\frac{6}{7}c_3$. Si, por ejemplo, $c_3 = 7$, entonces $c_1 = 25$, $c_2 = -6$ y se tiene

$$25(x - 2x^2) - 6(x^2 - 4x) + 7(-7x + 8x^2) = 0$$

AUTOEVALUACIÓN

I. ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son linealmente independientes?

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 11 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

II. ¿Cuál de los siguientes pares de vectores es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$?

a) $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}11\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}-3\\-11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\11\end{pmatrix}$ *e)* $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

III. ¿Cuál de los siguientes conjuntos de vectores *debe* ser linealmente dependiente?

a) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix},\begin{pmatrix}g\\h\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}j\\k\\l\end{pmatrix}$

Aquí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$, y l son números reales.

Indique si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas

IV. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente independientes.

V. Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ también son linealmente dependientes.

VI. Si A es una matriz de 3×3 y $\det A = 0$, entonces los renglones de A son vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$.

VII. Los polinomios 3, $2x$, $-x^3$ y $3x^4$ son linealmente independientes en P_4.

VIII. Las matrices $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2&3\\-5&0\end{pmatrix}$ son linealmente independientes en M_{22}.

Desarrollo de competencias 4.5

De los problemas 1 al 27 determine si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

1. $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-2\\7\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\20\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-2\\8\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\10\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\-1\\3\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}3\\0\\2\\-2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\4\\-1\\1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}5\\0\\3\\-1\end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix};\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\6\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\5\\-2\end{pmatrix}$

17. En P_2: $1-x, x$

18. En P_2: $-x, x^2-2x, 3x+5x^2$

19. En P_2: $1-x, 1+x, x^2$

20. En P_2: x, x^2-x, x^3-x

21. En P_4: $x-1, (x-1)(x-2), (x-1)(x-2)(x-3), x^4$

22. En P_3: $2x, x^3-3, 1+x-4x^3, x^3+18x-9$

23. En M_{22}: $\begin{pmatrix}2&-1\\4&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-3\\1&5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&1\\7&-5\end{pmatrix}$

24. Sea M_{22}: $\begin{pmatrix}1&-1\\0&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

25. Sea M_{22}: $\begin{pmatrix}-1&0\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\7&-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8&-5\\7&6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&-1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&3\\-1&4\end{pmatrix}$

***26.** En $C[0, 1]$: sen x, cos x

***27.** En $C[0, 1]$: x, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$

28. Determine una condición sobre los números a, b, c y d tal que los vectores $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

***29.** Encuentre una condición sobre los números a_{ij} tal que los vectores $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{pmatrix}$ sean linealmente dependientes.

30. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\\alpha\\4\end{pmatrix}$?

31. ¿Para qué valor(es) de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? [*Sugerencia*: observe con atención.]

32. Pruebe el teorema 3. [*Sugerencia*: observe con atención el sistema (8).]

33. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^m$, con $m < n$, y si $\mathbf{v}_{n+1}$ es cualquier otro vector en $\mathbb{R}^m$, entonces el conjunto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ es linealmente dependiente.

34. Demuestre que si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ $(n \geq 2)$ son linealmente independientes, entonces también lo son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, donde $k < n$.

35. Demuestre que si los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ diferentes de cero en $\mathbb{R}^n$ son ortogonales, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

***36.** Suponga que $\mathbf{v}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ y que $\mathbf{v}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}_3$. Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son diferentes de cero, demuestre que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

37. Sea A una matriz cuadrada (de $n \times n$) cuyas columnas son los vectores, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes si y sólo si la forma escalonada por renglones de A no contiene un renglón de ceros.

De los problemas 38 al 44 escriba las soluciones a los sistemas homogéneos dados en términos de uno o más vectores linealmente independientes.

38. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

39. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 6x_5 &= 0 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_4 &= 0 \end{aligned}$

44. $x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0$

45. Sea $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$.

a) Sea $H = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) Encuentre dos vectores linealmente independientes en H. Denomínelos $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$.

c) Calcule $\mathbf{w} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$.

d) Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

e) Dé una interpretación geométrica de los incisos *a*) y *c*) y explique por qué *d*) debe ser cierto.

Observación. Si $V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}$ para algún número real $\alpha\}$ entonces V es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y H se llama **complemento ortogonal** de V.

46. Elija un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^3$. Repita los pasos del problema 45 comenzando con el vector que eligió.

47. Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en P_2 son linealmente dependientes.

48. Demuestre que dos polinomios no pueden generar a P_2.

***49.** Demuestre que cualesquiera $n + 2$ polinomios en P_n son linealmente dependientes.

50. Demuestre que cualquier subconjunto de un conjunto de vectores linealmente independientes es linealmente independiente [*nota*: esto generaliza el problema 34].

51. Demuestre que cualesquiera siete matrices en M_{32} son linealmente dependientes.

52. Pruebe que cualesquiera $mn + 1$ matrices en M_{mn} son linealmente dependientes.

53. Sean S_1 y S_2 dos conjuntos finitos linealmente independientes en un espacio vectorial V. Demuestre que $S_1 \cap S_2$ es un conjunto linealmente independiente.

54. Demuestre que en P_n los polinomios $1, x, x^2, \ldots x^n$, son linealmente independientes [*sugerencia*: por supuesto, esto es cierto si $n = 1$. Suponga que $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ son linealmente independientes y demuestre que esto implica que $1, x, x^2, \ldots x^n$ también son linealmente independientes. Esto completa la prueba por inducción matemática).

55. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

56. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores diferentes de cero en un espacio vectorial V. Demuestre que al menos uno de los vectores en S se puede escribir como una combinación lineal de los vectores que le preceden. Es decir, demuestre que existe un entero $k \leq n$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que $\mathbf{v}_k = \alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$.

57. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores que tiene la propiedad de que el conjunto $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\}$ es linealmente dependiente cuando $i \neq j$. Demuestre que cada vector del conjunto es un múltiplo de un solo vector de ese conjunto.

CÁLCULO **58.** Sean f y g en $C^1[0, 1]$. Entonces el **wronskiano**[†] de f y g está definido por

$$W(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Demuestre que si f y g son linealmente dependientes, entonces $W(f, g)(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$.

CÁLCULO **59.** Determine una definición adecuada para el wronskiano de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^{(n-1)}[0, 1]$.[‡]

60. Suponga que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, son linealmente independientes. Pruebe o desapruebe: $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ son linealmente independientes.

61. ¿Para qué valores reales de c son linealmente independientes los vectores $(1 - c, 1 + c)$ y $(1 + c, 1 - c)$?

62. Demuestre que los vectores $(1, a, a^2)$, $(1, b, b^2)$ y $(1, c, c^2)$ son linealmente independientes si $a \neq b$, $a \neq c$ y $b \neq c$.

63. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto linealmente independiente y suponga que $\mathbf{v} \notin \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

[†] Así denominado por el matemático polaco Jozef María Hoene-Wronski (1778-1853). Hoene-Wronski pasó la mayor parte de su vida adulta en Francia. Trabajó en la teoría de determinantes y fue conocido también por sus escritos críticos sobre filosofía de las matemáticas.

[‡] $C^{(n-1)}[0, 1]$ es el conjunto de funciones cuyas $(n - 1)$-ésimas derivadas están definidas y son continuas en $[0, 1]$.

64. Encuentre un conjunto de tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}$. [*sugerencia*: encuentre un vector $\mathbf{v} \notin \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$.]

65. Encuentre un conjunto linealmente independiente de vectores en P_2 que contenga a los polinomios $1 - x^2$ y $1 + x^2$.

66. Suponga que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$, son coplanares.

a) Demuestre que existen constantes a, b y c no todas cero tales que

$$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$$
$$av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$$
$$aw_1 + bw_2 + cw_3 = 0$$

b) Explique por qué

$$\det = \begin{pmatrix}u_1 & u_2 & u_3\\v_1 & v_2 & v_3\\w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix} = 0$$

c) Use el teorema 3 para demostrar que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son linealmente dependientes.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. Todos **II.** Todos **III.** *b*, *d* **IV.** F **V.** V
VI. V **VII.** V **VIII.** F

4.6 BASES Y DIMENSIÓN

Se ha visto que en $\mathbb{R}^2$ conviene escribir vectores como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^3$ se escribieron los vectores en términos de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Ahora se generalizará esta idea.

DEFINICIÓN 1 **Base**

Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V si

i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

Ya se han analizado algunos ejemplos de bases. En el teorema 4.5.7, por ejemplo, se vio que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. De esta forma,

Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

En $\mathbb{R}^n$ se define

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que los vectores $\mathbf{e}_i$ son las columnas de una matriz identidad (que tiene determinante 1), $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base en $\mathbb{R}^n$. Esta base especial se denomina **base canónica** en $\mathbb{R}^n$. Ahora se encontrarán bases para algunos otros espacios.

EJEMPLO 1 **Base canónica para P_n**

Por el ejemplo 4.5.9, los polinomios 1, x, x^2 y x^3 son linealmente independientes en P_3, para el ejemplo 4.4.3, estos polinomios generan P_3. Así, $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base para P_3. En general, los monomios $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ constituyen una base para P_n. Ésta se denomina la **base canónica** para P_n.

EJEMPLO 2 **Base canónica para M_{22}**

Se vio en el ejemplo 4.4.6, que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generan a M_{22}. Si $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces es evidente que $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Así, estas cuatro matrices son linealmente independientes y forman una base para M_{22}, lo que se denomina **base canónica** para M_{22}.

EJEMPLO 3 **Una base para un subespacio de $\mathbb{R}^3$**

Encuentre una base para el conjunto de vectores que se encuentra en el plano

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

Solución En el ejemplo 4.2.6 se observó que π es un espacio vectorial. Para encontrar una base, primero se observa que si x y z se escogen arbitrariamente y si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi$, entonces $y = 2x + 3z$. Así, los vectores en π tienen la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual muestra que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ generan a π. Como es evidente que estos dos vectores son linealmente independientes (porque uno no es múltiplo del otro), forman una base para π.

Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base para V, entonces cualquier otro vector $\mathbf{v} \in V$ se puede escribir como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. ¿Puede escribirse de otra manera como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$? La respuesta es **no** (vea la observación que sigue a la demostración del teorema 4.5.7, para el caso $V = \mathbb{R}^n$).

TEOREMA 1

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V y si $\mathbf{v} \in V$, entonces existe un conjunto *único* de escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$.

Existe cuando menos un conjunto de dichos escalares porque $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V. Suponga entonces que $\mathbf{v}$ se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal de los vectores de la base.

Es decir, suponga que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n$$

Entonces, restando se obtiene la ecuación

$$(c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Pero como los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes, esta ecuación se cumple si y sólo si $c_1 - d_1 = c_2 - d_2 = \cdots = c_n - d_n = 0$. Así, $c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_n = d_n$ y el teorema queda demostrado.

Se ha visto que un espacio vectorial tiene múltiples bases. Una pregunta surge de manera natural: ¿contienen todas las bases el mismo número de vectores? En $\mathbb{R}^3$ la respuesta es: por supuesto, sí. Para ver esto, se observa que cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base. Pero menos vectores no pueden formar una base ya que, como se vio en la sección 4.4, el espacio generado por dos vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ es un plano —y un plano no es todo $\mathbb{R}^3$—. De manera similar, un conjunto de cuatro vectores o más en $\mathbb{R}^3$ no puede ser linealmente independiente, pues si los tres primeros vectores en el conjunto son linealmente independientes, entonces forman una base; por lo tanto, todos los demás vectores en el conjunto se pueden expresar como una combinación lineal de los primeros tres. Entonces, todas las bases en $\mathbb{R}^3$ contienen tres vectores. El siguiente teorema nos indica que la respuesta a la pregunta anterior es sí para todos los espacios vectoriales.

TEOREMA 2

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $m = n$; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

DEMOSTRACIÓN†

Sea $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ y $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para V. Debe demostrarse que $m = n$. Esto se prueba mostrando que si $m > n$, entonces S_1 es un conjunto linealmente independiente, lo que contradice la hipótesis de que S_1 es una base. Esto demostrará que

† Esta prueba se da para espacios vectoriales con bases que contienen un número finito de vectores. También se manejan los escalares como si fueran números reales; pero la prueba funciona también en el caso complejo.

$m \leq n$. La misma prueba demostrará que $n \leq m$ y esto prueba el teorema. Así, basta demostrar que si $m > n$, entonces S_1 es dependiente. Como S_2 constituye una base, todo $\mathbf{u}_i$ se puede expresar como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_j$. Se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1n}\mathbf{v}_n \\ \mathbf{u}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2n}\mathbf{v}_n \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ \mathbf{u}_m &= a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{v}_n \end{aligned} \tag{1}$$

Para demostrar que S_1 es dependiente, deben encontrarse escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0} \tag{2}$$

Sustituyendo (1) en (2) se obtiene

$$\begin{aligned} &c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{1n}\mathbf{v}_n) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{2n}\mathbf{v}_n) \\ &\qquad + \cdots + c_m(a_{m1}\mathbf{v}_1 + a_{m2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

La ecuación (3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} &(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \cdots + a_{m1}c_m)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{m2}c_m)\mathbf{v}_2 \\ &\qquad + \cdots + (a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \cdots + a_{mn}c_m)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4}$$

Pero como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes, se debe tener

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{m1}c_m &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{m2}c_m &= 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad &\vdots \\ a_{1n}c_1 + a_{2n}c_2 + \ldots + a_{mn}c_m &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

El sistema (5) es un sistema homogéneo de n ecuaciones con las m incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_m$ y como $m > n$, el teorema 2.4.1, dice que el sistema tiene un número infinito de soluciones. De esta forma, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, no todos cero, tales que (2) se satisface y, por lo tanto, S_1 es un conjunto linealmente dependiente. Esta contradicción prueba que $m \leq n$ si se cambian los papeles de S_1 y S_2, se demuestra que $n \leq m$ y la prueba queda completa.

Por este teorema se puede definir uno de los conceptos centrales en el álgebra lineal.

DEFINICIÓN 2

Dimensión

Si el espacio vectorial V tiene una base con un número finito de elementos, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en todas las bases y V se denomina **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera, V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

Notación. La dimensión V se denota por dim V.

Observación. No se ha demostrado que todo espacio vectorial tiene una base. Pero no se requiere para que la definición 2 tenga sentido, ya que si V tiene una base finita, entonces V es de

dimensión finita. De otra manera, V tiene dimensión infinita. Por lo tanto, con el fin de demostrar que V tiene dimensión infinita, sólo es necesario demostrar que V no tiene una base finita lo que se puede hacer probando que V contiene un número infinito de vectores linealmente independientes (vea el ejemplo 7).

EJEMPLO 4 La dimensión de $\mathbb{R}^n$

Como n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base, se observa que

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

EJEMPLO 5 La dimensión de P_n

Para el ejemplo 1 y el problema 4.5.47, los polinomios $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ constituyen una base en P_n. Entonces $\dim P_n = n + 1$.

EJEMPLO 6 La dimensión de M_{mn}

En M_{mn} sea A_{ij} la matriz de $m \times n$ con un uno en la posición ij y cero en otra parte. Es sencillo demostrar que las matrices A_{ij} para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ forman una base para M_{mn}. Así, $\dim M_{mn} = mn$.

EJEMPLO 7 P tiene dimensión infinita

En el ejemplo 4.4.7, se observó que ningún conjunto finito de polinomios genera a P. Entonces P no tiene una base finita y, por lo tanto, es un espacio vectorial de dimensión infinita.

Existe un gran número de teoremas sobre la dimensión de un espacio vectorial.

TEOREMA 3

Suponga que $\dim V = n$. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ es un conjunto de m vectores linealmente independientes en V, entonces $m \leq n$.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para V. Si $m > n$, entonces, igual que en la prueba del teorema 2, se pueden encontrar constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$ no todas cero, tales que la ecuación (2) se satisface. Esto contradice la independencia lineal de los vectores $\mathbf{u}_i$. Así, $m \leq n$.

TEOREMA 4

Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Entonces H tiene dimensión finita y

$$\dim H \leq \dim V \tag{6}$$

Sea $\dim V = n$. Cualquier conjunto de vectores linealmente independientes en H es también linealmente independiente en V. Por el teorema 3, cualquier conjunto linealmente independiente en H puede contener a lo más n vectores. Si $H = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim H = 0$. Si $\dim H \neq \{\mathbf{0}\}$, sea $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ un vector en H y $H_1 = \text{gen}\{\mathbf{v}_1\}$. Si $H_1 = H$, $\dim H = 1$ y la prueba queda completa. De lo contrario, elija a $\mathbf{v}_2 \in H$ tal que $\mathbf{v}_2 \notin H_1$ y sea $H_2 = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, y así sucesivamente. Continuamos hasta encontrar vectores

linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tales que $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. El proceso tiene que terminar porque se pueden encontrar a lo más n vectores linealmente independientes en H. Entonces $H = k \leq n$.

El teorema 4 tiene algunas consecuencias interesantes. Presentaremos dos de ellas.

EJEMPLO 8 **$C[0, 1]$ y $C^1[0, 1]$ tienen dimensión infinita**

CÁLCULO

Sea $P[0, 1]$ el conjunto de polinomios definido en el intervalo $[0, 1]$. Entonces $P[0, 1] \subset C[0, 1]$. Si la dimensión de $C[0, 1]$ fuera finita, entonces $P[0, 1]$ también tendría dimensión finita. Pero según el ejemplo 7, no es así. Por lo tanto $C[0, 1]$ tiene dimensión infinita. De manera similar, como $P[0, 1] \subset C^1[0, 1]$ (ya que todo polinomio es diferenciable), también se tiene que la dimensión de $C^1[0, 1]$ es infinita.

En términos generales

Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.

EJEMPLO 9 **Los subespacios de $\mathbb{R}^3$**

Se puede usar el teorema 4 para encontrar *todos* los subespacios de $\mathbb{R}^3$. Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Existen cuatro posibilidades; $H = \{\mathbf{0}\}$, dim $H = 1$, dim $H = 2$ y dim $H = 3$. Si dim $H = 3$, entonces H contiene una base de tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$. Pero entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ también forman una base para $\mathbb{R}^3$, y así, $H = \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la única manera de obtener un subespacio *propio* de $\mathbb{R}^3$ es teniendo dim $H = 1$ o dim $H = 2$. Si dim $H = 1$, entonces H tiene una base que consiste en un vector $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Sea $\mathbf{x}$ en H. Entonces $\mathbf{x} = t(a, b, c)$ para algún número real t [puesto que (a, b, c) genera a H]. Si $\mathbf{x} = (x, y, z)$, esto significa que $x = at$, $y = bt$, $z = ct$. Pero ésta es la ecuación de una recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen con la dirección del vector (a, b, c).

Ahora, suponga que dim $H = 2$ y sea $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ una base para H. Si $x = (x, y, z) \in H$, entonces existen números reales s y t tales que $\mathbf{x} = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ o $(x, y, z) = s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} x &= sa_1 + ta_2 \\ y &= sb_1 + tb_2 \\ z &= sc_1 + tc_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Sea $\mathbf{v}_3 = (\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Entonces del teorema 3.4.2, parte *iv*), se tiene $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ y $\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Ahora calculamos

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \alpha(sa_1 + ta_2) + \beta(sb_1 + tb_2) + \gamma(sc_1 + tc_2) \\ &= (\alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1)s + (\alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2)t \\ &= (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1)s + (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2)t = 0 \end{aligned}$$

Así, si $(x, y, z) \in H$, entonces $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, lo que muestra que H es un plano que pasa por el origen con vector normal $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Por lo tanto se ha demostrado que

Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que se encuentran en una recta o un plano que pasa por el origen.

EJEMPLO 10 Espacios de solución y espacio nulo

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Sean $\mathbf{x}_1 \in S$ y $\mathbf{x}_2 \in S$; entonces $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha(A\mathbf{x}_1) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que S es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\dim S \leq n$. S se denomina **espacio de solución** del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. También se denomina **espacio nulo** de la matriz A.

EJEMPLO 11 Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo

Encuentre una base (y la dimensión) para el espacio de solución S del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

Solución Aquí $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Como A es una matriz de 2×3, S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Reduciendo por renglones, se encuentra, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces $y = z$ y $x = -z$ de manera que todas las soluciones son de la forma $\begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix}$. Así, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una base para S y $\dim S = 1$. Observe que S es el conjunto de vectores que se encuentran en la recta $x = -t, y = t, z = t$.

EJEMPLO 12 Una base para el espacio de solución de un sistema homogéneo

Encuentre una base para el espacio de solución S del sistema

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ 4x - 2y + 6z &= 0 \\ -6x + 3y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

Solución Reduciendo renglones se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lo que da una sola ecuación: $2x - y + 3z = 0$. S es un plano y, por el ejemplo 3, una base está dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y dim $S = 2$.

Antes de dar por terminada esta sección, demostraremos un resultado útil para encontrar una base para un espacio vectorial arbitrario. Se ha visto que n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ constituyen una base para $\mathbb{R}^n$. Este hecho se cumple para *todo* espacio vectorial de dimensión finita.

TEOREMA 5

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, n vectores. Si generan el espacio V, entonces constituyen una base. De lo contrario, existe un vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Esto significa que los $n + 1$ vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes. Para ver esto, observe que si

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{u} = 0 \qquad (8)$$

Entonces $c_{n+1} = 0$, porque de lo contrario podríamos escribir $\mathbf{u}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dividiendo la ecuación (8) entre c_{n+1} y poniendo todos los términos, excepto $\mathbf{u}$, en el lado derecho. Pero si $c_{n+1} = 0$, entonces (8) es

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

Lo que significa que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ ya que los $\mathbf{v}_i$ son linealmente independientes. Ahora sea $W = \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}\}$. Como todos los vectores entre las llaves están en V, W es un subespacio de V. Como $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{u}$ son linealmente independientes, forman una base para W, y dim $W = n + 1$. Pero por el teorema 4, dim $W \leq n$. Esta contradicción muestra que *no* existe el vector $\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Así, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ genera a V y, por lo tanto, constituye una base para V.

AUTOEVALUACIÓN

Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos

I. Cualesquiera tres vectores en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

II. Cualesquiera tres vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.

III. Una base en un espacio vectorial es única.

IV. Sea H un subespacio propio de $\mathbb{R}^4$. Es posible encontrar cuatro vectores linealmente independientes en H.

V. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x + 11y - 17z = 0 \right\}$. Entonces dim $H = 2$.

VI. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V. Entonces *no* es posible encontrar un vector $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{u} \notin \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

VII. $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para M_{22}.

Desarrollo de competencias 4.6

De los problemas 1 al 13 determine si el conjunto dado es una base para el espacio vectorial a que se refiere.

1. En P_2: $1 - x^2, x$

2. En P_2: $-3x, 1 + x^2, x^2 - 5$

3. En P_2: $-2x, x + 3x^2, x + 2$

4. En P_2: $x^2 - 1, x^2 - 2, x^2 - 3$

5. En P_3: $1, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3$

6. En P_3: $1 + x, 2 + x^2, 3 + x^3, 1$

7. En P_3: $3, x^3 - 4x + 6, x^2$

8. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

9. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, donde $abcd \neq 0$

10. En M_{22}: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

11. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$; $(1, 1), (4, 4)$

12. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$; $(1, -1)$

13. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$; $(1, -1), (-3, 3)$

14. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $2x - y - z = 0$.

15. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en el plano $3x - 2y + z = 0$.

16. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x/2 = y/3 - z/4 = 0$.

17. Encuentre una base en $\mathbb{R}^3$ para el conjunto de vectores en la recta $x = 3t, y = -2t, z = t$.

18. Demuestre que los únicos subespacios propios en $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen.

19. En $\mathbb{R}^4$ sea $H = \{(x, y, z, w): ax + by + cz + dw = 0\}$, donde $a,b,c,d \neq 0$.

a) Demuestre que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

b) Encuentre una base para H.

c) ¿Cuánto vale dim H?

20. En $\mathbb{R}^n$ un **hiperplano** que contiene a **0** es un subespacio de dimensión $n - 1$. Si H es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ que contiene a **0**, demuestre que

$$H = \{(x_1, x_2, \ldots x_n): a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales fijos, no todos cero.

21. En $\mathbb{R}^5$ encuentre una base para el hiperplano

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$$

De los problemas 22 al 28 encuentre una base para el espacio de solución del sistema homogéneo dado.

22.
$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ -2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

23.
$$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - 3y &= 0 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x - y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

27. $\begin{aligned} 2x + 3y - 4z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ 2x + 8y - 10z &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2x - 6y + 4z &= 0 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \\ -3x + 9y - 6z &= 0 \end{aligned}$

29. Encuentre una base para D_3, el espacio vectorial de matrices diagonales de 3×3. ¿Cuál es la dimensión de D_3?

30. ¿Cuál es la dimensión D_n, el espacio de matrices diagonales de $n \times n$?

31. Sea S_{nn} el espacio vectorial de matrices simétricas de $n \times n$. Demuestre que S_{nn} es un subespacio de M_{nn} y que dim $S_{nn} = [n(n + 1)]/2$.

32. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n y $m < n$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ se puede aumentar a una base para V. Esto es, existen vectores $\mathbf{v}_{m+1}, \mathbf{v}_{m+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base [*sugerencia*: vea la demostración del teorema 5].

33. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base en V. Sean $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es también una base en V.

34. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces dim $V \leq n$. [*Sugerencia*: utilice el resultado del problema 4.5.56.]

35. Sean H y K dos subespacios de V tales que $H \subseteq K$ y dim H = dim $K < \infty$. Demuestre que $H = K$.

36. Sean H y K dos subespacios de V. Defina $H + K = \{\mathbf{h} + \mathbf{k}: \mathbf{h} \in H \text{ y } \mathbf{k} \in K\}$.

a) Demuestre que $H + K$ es un subespacio de V.

b) Si $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$, demuestre que dim $(H + K)$ = dim H + dim K.

***37.** Si H es un subespacio vectorial de dimensión finita V, demuestre que existe un subespacio único K de V tal que *a)* $H \cap K = \{\mathbf{0}\}$ y *b)* $H + K = V$.

38. Demuestre que dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ con puntos terminales en el origen son colineales si y sólo si dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 1$.

39. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$ con puntos terminales en el origen son coplanares si y sólo si dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \leq 2$.

40. Demuestre que cualesquiera n vectores que generan un espacio V de dimensión n forman una base para V. [*sugerencia*: demuestre que si los n vectores no son linealmente independientes, entonces dim $V < n$].

***41.** Demuestre que todo subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita tiene una base.

42. Encuentre dos bases para $\mathbb{R}^4$ que contengan a (1, 0, 1, 0) y (0, 1, 0, 1) y no tengan otros vectores en común.

43. ¿Para qué valores del número real a los vectores $(a, 1, 0)$, $(1, 0, a)$ y $(1 + a, 1 - a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

Respuestas a la autoevaluación

I. F **II.** V **III.** F **IV.** F **V.** V **VI.** V **VII.** V

4.7 RANGO, NULIDAD, ESPACIO DE LOS RENGLONES Y ESPACIO DE LAS COLUMNAS DE UNA MATRIZ

En la sección 4.5 se introdujo la noción de independencia lineal. Se demostró que si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces las columnas y los renglones de A forman conjuntos de vectores linealmente independientes. Sin embargo, si A no es invertible (de manera que $\det A = 0$), o si A no es una matriz cuadrada, entonces estos resultados no dicen nada sobre el número de renglones o columnas linealmente independientes de A. Eso es lo que se estudiará en esta sección. También se mostrará la forma en la cual se puede obtener una base para el espacio generado de un conjunto de vectores mediante la reducción por renglones.

Sea A una matriz de $m \times n$ y sea

$$\text{El espacio nulo de una matriz } N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \tag{1}$$

Entonces, como se vio en el ejemplo 4.6.10, N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 1 **Espacio nulo y nulidad de una matriz**

N_A se denomina el **espacio nulo** de A y $\nu(A) = \dim N_A$ se denomina **nulidad** de A. Si N_A contiene sólo al vector cero, entonces $\nu(A) = 0$.

Nota. El espacio nulo de una matriz también se conoce como **kernel**.

EJEMPLO 1 **Espacio nulo y nulidad de una matriz de 2 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces, como se vio en el ejemplo 4.6.11, N_A está generado por $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $\nu(A) = 1$.

EJEMPLO 2 **Espacio nulo y nulidad de una matriz de 3 × 3**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$. Entonces por el ejemplo 4.6.12, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para N_A, y $\nu(A) = 2$.

TEOREMA 1

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

De acuerdo al teorema de resumen [teorema 4.5.6, partes *i*) y *ii*)], A es invertible si y sólo si la única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero según la ecuación (1), esto significa que A es invertible si y sólo si $N_A = \{\mathbf{0}\}$. Así, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = \dim N_A = 0$.

DEFINICIÓN 2 **Imagen de una matriz**

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la **imagen** de A, denotada por $\text{Im}(A)$, está dada por

$$\text{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\} \tag{2}$$

TEOREMA 2

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces la imagen de A $\text{Im}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$, están en $\text{Im}(A)$. Entonces existen vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{y}_1 = A\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{y}_2 = A\mathbf{x}_2$. Por lo tanto

$$A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{y}_1 \quad \text{y} \quad A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$$

Por lo que $\alpha\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2$ están en $\text{lm}(A)$. Así, del teorema 4.3.1, $\text{Im}(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

DEFINICIÓN 3 **Rango de una matriz**

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces el **rango** de A, denotado por $\rho(A)$, está dado por

$$\rho(A) = \dim \text{Im}(A)$$

Se darán dos definiciones y un teorema que facilitarán en cierta medida el cálculo del rango.

DEFINICIÓN 4 **Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz**

Si A es una matriz de $m \times n$, sean $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\}$ los renglones de A y $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ las columnas de A. Entonces se define

$$R_A = \textbf{espacio de los renglones de } A = \text{gen}\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m\} \tag{3}$$

y

$$C_A = \textbf{espacio de las columnas de } A = \text{gen}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\} \tag{4}$$

Nota. R_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y C_A es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.

Se ha introducido una gran cantidad de notación en tan sólo tres páginas.

Antes de dar un ejemplo, se demostrará que dos de estos cuatro espacios son los mismos.

TEOREMA 3

Para cualquier matriz A, $C_A = \text{Im}(A)$. Es decir, la imagen de una matriz es igual al espacio de sus columnas.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $C_A = \text{Im}(A)$, se demuestra que $\text{Im}(A) \subseteq C_A$ e $\text{Im}(A) \subseteq C_A$.

i) Se quiere probar que $\text{Im}(A) \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$. Entonces existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Pero como se observó en la sección 3.2. $A\mathbf{x}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A. Por lo tanto, $\mathbf{y} \in C_A$, de manera que $\text{Im}(A) \subseteq C_A$.

ii) Se quiere probar que $\text{Im}(A) \subseteq C_A$. Suponga que $\mathbf{y} \in C_A$. Entonces $\mathbf{y}$ se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A como en la ecuación (3.2.9). Sea $\mathbf{x}$ el vector columna de los coeficientes de esta combinación lineal. Entonces, igual que en la ecuación (3.2.9), $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Así, $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$, lo que prueba que $\text{Im}(A) \subseteq C_A$.

EJEMPLO 3 Cálculo de N_A, $\nu(A)$, imagen A, $\rho(A)$, R_A y C_A para una matriz de 2×3

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. A es una matriz de 2×3.

i) *El espacio nulo de* $A = N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Como se vio en el ejemplo 1,

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ii) *La nulidad de* $A = \nu(A) = \dim N_A = 1$.

iii) Se sabe que $\text{Im}(A) = C_A$. Las primeras dos columnas de A son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, forman una base para $\mathbb{R}^2$. La $\text{Im}(A) = C_A = \mathbb{R}^2$.

iv) $\rho(A) = \dim \text{Im}(A) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

v) El *espacio de los renglones de* $A = R_A = \text{gen}\{(1, 2, -1), (2, -1, 3)\}$. Como estos dos vectores son linealmente independientes, se ve que R_A es un subespacio de dimensión dos de $\mathbb{R}^3$. Del ejemplo 4.6.9, se observa que R_A es un plano que pasa por el origen.

En el ejemplo 3 *iv*) se observa que $\rho(A) = \dim R_A = 2$, lo que no es una coincidencia.

TEOREMA 4

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$\dim R_A = \dim C_A = \dim \text{Im}(A) = \rho(A)$$

DEMOSTRACIÓN

Como es usual, se denota por α_{ij} la componente ij de A. Debemos demostrar que $\dim R_A = \dim C_A$. Los renglones de A se denotan por $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_m$, y sea $k = \dim R_A$. Sea $S = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ una base para R_A. Entonces cada renglón de A se puede expresar como una combinación lineal de los vectores en S, y se tiene, para algunas constantes α_{ij},

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \alpha_{11}\mathbf{s}_1 + \alpha_{12}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{1k}\mathbf{s}_k \\
\mathbf{r}_2 &= \alpha_{21}\mathbf{s}_1 + \alpha_{22}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{2k}\mathbf{s}_k \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
\mathbf{r}_m &= \alpha_{m1}\mathbf{s}_1 + \alpha_{m2}\mathbf{s}_2 + \cdots + \alpha_{mk}\mathbf{s}_k
\end{aligned} \tag{5}$$

Ahora la componente j de $\mathbf{r}_i$ es α_{ij}. Entonces si se igualan las componentes j de ambos lados de (5) y se hace $\mathbf{s}_i = (s_{i1}, s_{i2}, \ldots s_{in})$, se obtiene

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \alpha_{11}s_{1j} + \alpha_{12}s_{2j} + \ldots + \alpha_{1k}s_{kj} \\
a_{2j} &= \alpha_{21}s_{1j} + \alpha_{22}s_{2j} + \ldots + \alpha_{2k}s_{kj} \\
&\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\
a_{mj} &= \alpha_{m1}s_{1j} + \alpha_{m2}s_{2j} + \ldots + \alpha_{mk}s_{kj}
\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = s_{1j}\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix} = s_{2j}\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + s_{kj}\begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \alpha_{2k} \\ \vdots \\ \alpha_{mk} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Sea $\vec{\alpha}_i$ el vector $\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}$. Entonces como el lado izquierdo de (6) es la columna j de A, se observa que cada columna de A se puede escribir como una combinación lineal de $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, lo que significa que los vectores $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \ldots, \vec{\alpha}_k$, generan a C_A y

$$\dim C_A \leq k = \dim R_A \tag{7}$$

Pero la ecuación (7) se cumple para cualquier matriz A. En particular, se cumple para A^t. Pero $C_{A^t} = R_A$ y $R_{A^t} = C_A$. Como de (7) $\dim C_{A^t} \leq \dim R_{A^t}$, se tiene

$$\dim R_A \leq \dim C_A \tag{8}$$

Combinando (7) y (8) la prueba queda completa.

EJEMPLO 4 **Cálculo de Im(A) y $\rho(A)$ para una matriz de 3 × 3**

Encuentre una base para Im(A) y determine el rango de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$.

Solución Como $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_3 = -3\mathbf{r}_1$, se ve que $\rho(A) = \dim R_A = 1$. Así, toda columna en C_A es una base para $C_A = \text{Im}(A)$. Por ejemplo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ es una base para Im(A).

El siguiente teorema simplificará los cálculos de la imagen, el rango y la nulidad.

TEOREMA 5

Si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$.

DEMOSTRACIÓN

Recuerde que según la definición 3.4.3, A es equivalente por renglones a B si A se puede "reducir" a B mediante operaciones elementales con renglones. Suponga que C es la matriz obtenida al realizar operaciones elementales en A. Primero se muestra que $R_A = R_C$. Como B se obtiene realizando varias operaciones elementales con los renglones de A, el primer resultado, aplicado varias veces, implicará que $R_A = R_B$.

Caso 1: Intercambio de dos renglones de A. Entonces $R_A = R_C$ porque los renglones de A y C son los mismos (escritos en diferente orden).

Caso 2: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$. Si los renglones de A son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$, entonces los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. Es obvio que $c\mathbf{r}_i = c(\mathbf{r}_i)$ y $\mathbf{r}_i = (1/c)(c\mathbf{r}_i)$. De esta forma, cada renglón de C es un múltiplo de un renglón de A y viceversa, lo que significa que cada renglón de C está en el espacio generado por los renglones de A y viceversa, Se tiene

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A, \quad \text{por lo tanto } R_C = R_A$$

Caso 3: Multiplicación del renglón i de A por $c \neq 0$ y suma del mismo al renglón j. Ahora los renglones de C son $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i, \ldots, \mathbf{r}_m\}$. En este caso

$$\mathbf{r}_j = \underbrace{(\mathbf{r}_j + c\mathbf{r}_i)}_{\text{renglón } j \text{ de } C} - \underbrace{c\mathbf{r}_i}_{\text{renglón } i \text{ de } C}$$

De manera que todos los renglones de A se pueden expresar como una combinación lineal de los renglones de C y viceversa. Entonces, como antes,

$$R_A \subseteq R_C \text{ y } R_C \subseteq R_A, \quad \text{por lo tanto } R_C = R_A$$

Se ha demostrado que $R_A = R_B$. Por lo tanto $\rho(R_A) = \rho(R_B)$. Por último, el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no cambia bajo las operaciones elementales. Así, $N_A = N_B$, y entonces $\nu(A) = \nu(B)$.

El teorema 5 es de suma importancia. Indica, por ejemplo, que el rango y el espacio de los renglones de una matriz son lo mismo que el rango y el espacio de los renglones de la forma escalonada de dicha matriz. No es difícil probar el siguiente teorema (vea el problema 50).

TEOREMA 6

El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.

EJEMPLO 5 **Cálculo de $\rho(A)$ y R_A para una matriz de 3 × 3**

Determine el rango y el espacio de los renglones de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$. Como B tiene pivotes, $\rho(A) = \dim R_A = 2$. Una base para R_A consiste en los primeros dos renglones de B:

$$R_A = \text{gen } \{(1, -1, 3), (0, 1, -1)\}$$

El teorema 5 es útil cuando se quiere encontrar una base para el espacio generado por un conjunto de vectores.

EJEMPLO 6 **Determinación de una base para el espacio generado por cuatro vectores en $\mathbb{R}^3$**

Encuentre una base para el espacio generado por

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Solución Se expresan los vectores como renglones de una matriz A y después se reduce la matriz a la forma escalonada por renglones. La matriz que se obtiene tendrá el mismo espacio de renglones que A. La forma escalonada por renglones de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que tiene dos pivotes.

Entonces una base para gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Existe un camino relativamente sencillo para encontrar el espacio nulo de una matriz.

EJEMPLO 7 **Cálculo del espacio nulo de una matriz de 4 × 4**

Encuentre el espacio nulo de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & -8 \\ 0 & -1 & -14 & 14 \\ 3 & 6 & -12 & 9 \end{pmatrix}$

Solución La forma escalonada por renglones reducidos de A es

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -32 & 31 \\ 0 & 1 & 14 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que en la prueba del teorema 5, las soluciones a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son las mismas que las soluciones a $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, entonces $U\mathbf{x} = \mathbf{0}$ da como resultado

$$x_1 - 32x_3 + 31x_4 = 0$$
$$x_2 + 14x_3 - 14x_4 = 0$$

o

$$x_1 = 32x_3 - 31x_4$$
$$x_2 = -14x_3 + 14x_4$$

De manera que si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 32x_3 - 31x_4 \\ -14x_3 + 14x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base para } N_A} + x_4 \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esto es, $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

El procedimiento usado en el ejemplo 7 siempre se puede utilizar para encontrar el espacio nulo de una matriz.

Se hace aquí una observación geométrica interesante:

> Todo vector en el espacio de los renglones de una matriz real es ortogonal a todo vector en su espacio nulo.

En notación abreviada esto se describe como $R_A \perp N_A$. Para ver por qué, considere la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces se tiene

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{r}_i$ denota el i-ésimo renglón de A, se ve de la ecuación anterior que $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{x} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Así, si $\mathbf{x} \in N_A$, entonces $\mathbf{r}_i \perp \mathbf{x}$ para $i = 1, 2, \ldots, m$. Pero si $\mathbf{y} \in R_A$, entonces $\mathbf{y} = c_1\mathbf{r}_1 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m$, para algunas constantes $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Entonces $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = (c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + \cdots + c_m\mathbf{r}_m) \cdot \mathbf{x} = c_1\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{r}_m \cdot \mathbf{x} = 0$, lo que prueba la afirmación.

En el ejemplo 7, $R_A = \text{gen}\{(1, 0, -32, 31), (0, 1, 14, -14)\}$ y $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 32 \\ -14 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -31 \\ 14 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

El lector debe verificar que los vectores de la base para R_A, en efecto, son ortogonales a los vectores de la base para N_A.

El siguiente teorema da la relación entre el rango y la nulidad.

TEOREMA 7

Sea A una matriz de $m \times n$. Entonces

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Es decir, el rango de A más la nulidad de A es igual al número de columnas de A.

DEMOSTRACIÓN

Se supone que $k = \rho(A)$ y que las primeras k columnas de A son linealmente independientes. Sea $\mathbf{c}_i$ $(i > k)$ cualquier otra columna de A. Como $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_k$ forman una base para C_A, se tiene, para algunos escalares $a_1, a_2, \ldots, a_k$,

$$\mathbf{c}_i = a_1\mathbf{c}_1 + a_2\mathbf{c}_2 + \cdots + a_k\mathbf{c}_k$$

Así, sumando $-a_1\mathbf{c}_1, -a_2\mathbf{c}_2, \ldots, -a_k\mathbf{c}_k$ sucesivamente a la i-ésima columna de A, se obtiene una nueva matriz B de $m \times n$ con $\rho(B) = \rho(A)$ y $\nu(B) = \nu(A)$ con la columna i de B igual a $\mathbf{0}$.[†] Esto se hace a todas las demás columnas de A (excepto las primeras k) para obtener la matriz

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donde $\rho(D) = \rho(A)$ y $\nu(D) = \nu(A)$. Mediante un posible reacomodo de los renglones de D, se puede suponer que los primeros k renglones son independientes. Después se hace lo mismo con los renglones de (esto es, sumar múltiplos de los primeros k renglones a los últimos $m - k$) para obtener una nueva matriz:

$$F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde $\rho(F) = \rho(A)$ y $\nu(F) = \nu(A)$. Ahora es obvio que si $i > k$, entonces $F\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$,[‡] de manera que $E_k = \{\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de $n - k$ vectores de N_F. Ahora se demostrará que E_k genera N_F. Sea $\mathbf{x} \in N_F$ un vector de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

[†] Esto se deduce considerando A^t (las columnas de A son los renglones de A^t).
[‡] Recuerde que $\mathbf{e}_i$ es el vector con un uno en la posición i y cero en las otras posiciones.

Entonces

$$\mathbf{0} = F\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kk}x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz del sistema homogéneo de $k \times k$ dado es diferente de cero, ya que los renglones de esta matriz son linealmente independientes. De esta forma, la única solución al sistema es $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$. Entonces $\mathbf{x}$ tiene la forma

$$(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + x_{k+2}\mathbf{e}_{k+2} + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$$

Esto significa que E_k genera N_F de manera que $\nu(F) = n - k = n - \rho(F)$ lo que completa la prueba.

Nota. Se sabe que $\rho(A)$ es igual al número de pivotes n la forma escalonada por renglones de A y es igual al número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que contienen pivotes. Entonces, del teorema 7, $\nu(A)$ = número de columnas de la forma escalonada por renglones de A que no contienen pivotes.

EJEMPLO 8 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$**

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ se calculó (en los ejemplos 1 y 3) que $\rho(A) = 2$ y $\nu(A) = 1$; esto ilustra que $\rho(A) + \nu(A) = n(=3)$.

EJEMPLO 9 **Ilustración de que $\rho(A) + \nu(A) = n$**

Para $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ calcule $\nu(A)$.

Solución En el ejemplo 5 se encontró que $\rho(A) = 2$. Así, $\nu(A) = 3 - 2 = 1$. El lector puede demostrar esto directamente resolviendo el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para encontrar que $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

TEOREMA 8 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n$.

DEMOSTRACIÓN Por el teorema 1, A es invertible si y sólo si $\nu(A) = 0$. Pero por el teorema 7, $\rho(A) = n - \nu(A)$. Así, A es invertible si y sólo si $\rho(A) = n - 0 = n$.

Ahora se demostrará la aplicación del concepto de rango, para determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones o si es inconsistente. De nuevo, se considera el sistema de m ecuaciones en n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{9}$$

lo que se escribe como $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Se utiliza el símbolo $(A, \mathbf{b})$ para denotar la matriz aumentada de $m \times (n + 1)$ obtenida (como en la sección 2.3) agregando el vector $\mathbf{b}$ a A.

TEOREMA 9

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando menos una solución si y sólo si $\mathbf{b} \in C_A$. Esto ocurrirá si y sólo si A y la matriz aumentada $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango.

DEMOSTRACIÓN

Si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ son las columnas de A, entonces podemos escribir el sistema (9) como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b} \tag{10}$$

El sistema (10) tendrá solución si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de A. Es decir, para tener una solución debemos tener $\mathbf{b} \in C_A$. Si $\mathbf{b} \in C_A$, entonces $(A, \mathbf{b})$ tiene el mismo número de columnas linealmente independientes de A así que A y $(A, \mathbf{b})$ tienen el mismo rango. Si $\mathbf{b} \notin C_A$, entonces $\rho(A, \mathbf{b}) = \rho(A) + 1$ y el sistema no tiene soluciones. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 10 Uso del teorema 9 para determinar si un sistema tiene soluciones

Determine si el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

Solución Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 7 & 12 \end{pmatrix}$. La forma escalonada por renglones de A es $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\rho(A) = 2$. La forma escalonada por renglones de la matriz aumentada $(A, \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 2 & 7 & 12 & 40 \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, que tiene tres pivotes, por lo que $\rho(A, \mathbf{b}) = 3$ y el sistema no tiene solución.

EJEMPLO 11 Uso del teorema 9 para determinar si un sistema tiene soluciones

Determine si el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

tiene soluciones.

Solución Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = 0$ de manera que $\rho(A) < 3$. Como la primera columna no es un múltiplo de la segunda, es evidente que las primeras dos columnas son linealmente independientes; así $\rho(A) = 2$. Para calcular $\rho(A, \mathbf{b})$ se reduce por renglones:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right)$$

Se ve que $\rho(A, \mathbf{b}) = 2$ y existe un número infinito de soluciones para el sistema (si hubiera una solución única se tendría $\det A \neq 0$).

Los resultados de esta sección permiten mejorar el teorema de resumen, visto por última vez en la sección 4.5.

TEOREMA 10 **Teorema de resumen**

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes diez afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras nueve (si una se cumple, todas se cumplen).

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

Más aún, si una de ellas no se cumple, entonces para cada vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Tiene un número infinito de soluciones si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$.

AUTOEVALUACIÓN

Elija la opción que complete correctamente los siguientes enunciados.

I. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ es _____.

a) 1 ***b)*** 2 ***c)*** 3 ***d)*** 4

II. La nulidad de la matriz en el problema 1 es _____.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

III. Si una matriz de 5×7 tiene nulidad 2, entonces su rango es _____.

a) 5 *b*) 3 *c*) 2 *d*) 7

e) No se puede determinar sin más información.

IV. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ es _____.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3

V. La nulidad de la matriz en el problema IV es _____.

a) 0 *b*) 1 *c*) 2 *d*) 3

VI. Si A es una matriz de 4×4 y $\det A = 0$, entonces el valor máximo posible para $\rho(A)$ es _____.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

VII. En el problema IV $\dim C_A =$ _____.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3

VIII. En el problema I $\dim R_A =$ _____.

a) 1 *b*) 2 *c*) 3 *d*) 4

Falso-verdadero

IX. En cualquier matriz de $m \times n$, $C_A = R_A$.

X. En cualquier matriz de $m \times n$, $C_A = \text{Im}(A)$.

Desarrollo de competencias 4.7

De los problemas 1 al 20 encuentre el rango y la nulidad de la matriz dada.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 3 & -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

De los problemas 21 al 27 encuentre una base para la imagen y el espacio nulo de la matriz dada.

21. La matriz del problema 2

22. La matriz del problema 7

23. La matriz del problema 8

24. La matriz del problema 10

25. La matriz del problema 15

26. La matriz del problema 16

27. La matriz del problema 17

De los problemas 28 al 32 encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

28. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

29. $(1, -2, 3), (2, -1, 4), (3, -3, 3), (2, 1, 0)$

30. $(1, -2, 1), (-1, -1, 4), (3, -3, 3), (0, 1, 0)$

31. $(1, -1, 1, -1), (2, 0, 0, 1), (4, -2, 2, 1), (7, -3, 3, -1)$

32. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

De los problemas 33 al 37 utilice el teorema 9 para determinar si el sistema dado tiene alguna solución.

33.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

34.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 6x_1 + x_2 + 3x_3 &= 18 \end{aligned}$$

35.
$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

36.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 3x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

38. Demuestre que el rango de una matriz diagonal es igual al número de componentes diferentes de cero en la diagonal.

39. Sea A una matriz triangular inferior de $n \times n$ con ceros en la diagonal. Demuestre que $\rho(A) < n$.

40. Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ y $m < n$, entonces *a)* $\rho(A) \leq m$ y *b)* $\nu(A) \geq n - m$.

41. Demuestre que para cualquier matriz A, $\rho(A) = \rho(A^t)$.

42. Sean A y B matrices de $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente. Demuestre que $\rho(AB) \leq$ mín $(\rho(A), \rho(B))$.

43. Sea A una matriz de $m \times n$ y sean B y C matrices invertibles de $m \times m$ y $n \times n$, respectivamente. Pruebe que $\rho(A) = \rho(BA) = \rho(AC)$. Es decir, si se multiplica una matriz por una matriz invertible, el rango no cambia.

***44.** Sean A y B matrices de $m \times n$. Demuestre que si $\rho(A) = \rho(B)$, entonces existen matrices invertibles C y D tales que $B = CAD$.

45. Sea A una matriz de 5×7 con rango 5. Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene cuando menos una solución para cada 5-vector $\mathbf{b}$.

46. Suponga que cualesquiera k renglones de A son linealmente independientes mientras que cualesquiera $k + 1$ renglones de A son linealmente dependientes. Demuestre que $\rho(A) = k$.

47. Si $B = CAD$, donde C y D son invertibles, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$.

48. Sea A una matriz de $m \times n$. Suponga que para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ existe una $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ al que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Demuestre que $\rho(A) = m$.

49. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que $\rho(A) < n$ si y sólo si existe un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

50. Pruebe que el rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones [*sugerencia:* Demuestre que si la forma escalonada por renglones tiene k pivotes, entonces dicha forma tiene exactamente k renglones linealmente independientes].

Respuestas a la autoevaluación

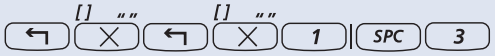
I. *c)* **II.** *a)* **III.** *a)* **IV.** *a)* **V.** *b)* **VI.** *c)*
VII. *a)* **VIII.** *c)* **IX.** F **X.** V

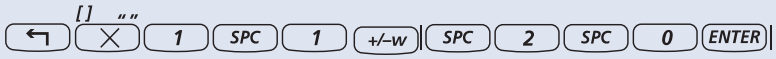
MANEJO DE LA CALCULADORA

Existe una forma sencilla para determinar el rango, la imagen y el espacio de los renglones de una matriz en la HP 50g, que consiste en encontrar la forma escalonada por renglones (REF) o la forma escalonada por renglones reducidos (RREF) de la matriz. Por ejemplo, suponga que se introduce la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 9 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Oprima la siguiente secuencia de teclas:





A continuación oprima el comando que calcula la forma escalonada por reglones de la matriz que se encuentra en el primer renglón de la calculadora

El resultado es

$$\text{REF}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{11}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{16} \end{pmatrix}$$

Es claro que $\rho(A) = 3$, $R_A = \text{gen}\ \{(1, 3, 4,3), (0,1,11/6,4/3),(0,0,1,7/16)\}$; como $\rho(A) = 3$, A tiene tres columnas linealmente independientes, por lo que

$$C_A = \text{imagen}\ A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

y $\nu(A) = 4 - 3 = 1$.

En los problemas 51 al 54 utilice una calculadora para encontrar el rango, la imagen, el espacio generado y la nulidad de la matriz dada.

51. $\begin{pmatrix} 187 & -46 & 512 & 653 & 512 \\ -35 & 51 & -223 & -207 & -325 \\ 257 & -148 & 958 & 1067 & 1162 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 0.37 & 0.48 & -0.70 & -1.16 \\ 0.46 & -0.39 & 2.09 & 0.83 \\ 0.52 & 0.87 & -1.57 & 1.04 \\ 0.67 & 0.35 & 0.29 & -0.33 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} .0284 & -.0311 & -.0207 & .0431 & .0615 \\ -.0511 & -.1216 & -.1811 & .0904 & .0310 \\ -.0965 & -.4270 & -.5847 & .3574 & .2160 \\ .0795 & .0905 & .1604 & -.4730 & .0305 \\ -.0110 & -.3365 & -.4243 & .3101 & .5210 \end{pmatrix}$

54.
$$\begin{pmatrix} 37 & 81 & -29 & 58 & 33 & -19 & 102 \\ -48 & 91 & 306 & 38 & 205 & 0 & -58 \\ 53 & 215 & -47 & -11 & -38 & 423 & 99 \\ -85 & 10 & 335 & -20 & 172 & 19 & -160 \\ -80 & 316 & 594 & 7 & 339 & 442 & -119 \\ -71 & 46 & -416 & -83 & 201 & -88 & 144 \end{pmatrix}$$

4.8 CAMBIO DE BASE

En $\mathbb{R}^2$ se expresaron vectores en términos de la base canónica $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En $\mathbb{R}^n$ se definió la base canónica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$. En P_n se definió la base estándar como $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Estas bases se usan ampliamente por la sencillez que ofrecen a la hora de trabajar con ellas. Pero en ocasiones ocurre que es más conveniente alguna otra base. Existe un número infinito de bases para elegir, ya que en un espacio vectorial de dimensión n, cualesquiera n vectores, linealmente independientes, forman una base. En esta sección se vera cómo cambiar de una base a otra mediante el cálculo de cierta matriz.

Iniciaremos por un ejemplo sencillo. Sean $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es la base canónica en $\mathbb{R}^2$. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes (porque $\mathbf{v}_1$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$), $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una segunda base en $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ un vector en $\mathbb{R}^2$. Esta notación significa que

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$$

Es decir, $\mathbf{x}$ está expresado en términos de los vectores de la base B_1. Para hacer hincapié en este hecho, se escribe

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Como B_2 es otra base en $\mathbb{R}^2$, existen escalares c_1 y c_2 tales que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \qquad (1)$$

Una vez que se encuentran estos escalares, se puede escribir

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

para indicar que $\mathbf{x}$ está ahora expresado en términos de los vectores en B_2. Para encontrar los números c_1 y c_2, se escribe la base anterior ($\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$) en términos de la nueva base ($\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Es sencillo verificar que

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{3}{5}\mathbf{v}_2 \qquad (2)$$

y

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_2$$

es decir,

$$(\mathbf{u}_1)B_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{u}_2)B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 \overset{\text{de (2) y (3)}}{=} x_1\left(\frac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{3}{5}\mathbf{v}_2\right) + x_2\left(\frac{1}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{v}_2\right)$$

$$= \left(\frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\mathbf{v}_1 + \left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right)\mathbf{v}_2$$

Así, de (1),

$$c_1 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

$$c_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

o

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \\ -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{13}{5} \end{pmatrix}$$

Verificación:

$$\frac{2}{5}\mathbf{v}_1 - \frac{13}{5}\mathbf{v}_2 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{13}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{13}{5} \\ \frac{6}{5} - \frac{26}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2$$

La matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$ se denomina **matriz de transición** de B_1 a B_2, y se ha demostrado que

$$(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1} \qquad \textbf{(4)}$$

En la figura 4.4 se ilustran las dos bases $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Es sencillo generalizar este ejemplo, sin embargo antes es necesario ampliar la notación. Sea $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para un espacio vectorial real V de dimensión n. Sea $\mathbf{x} \in V$. Entonces $\mathbf{x}$ se puede escribir en términos de ambas bases:

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + b_n\mathbf{u}_n \qquad \textbf{(5)}$$

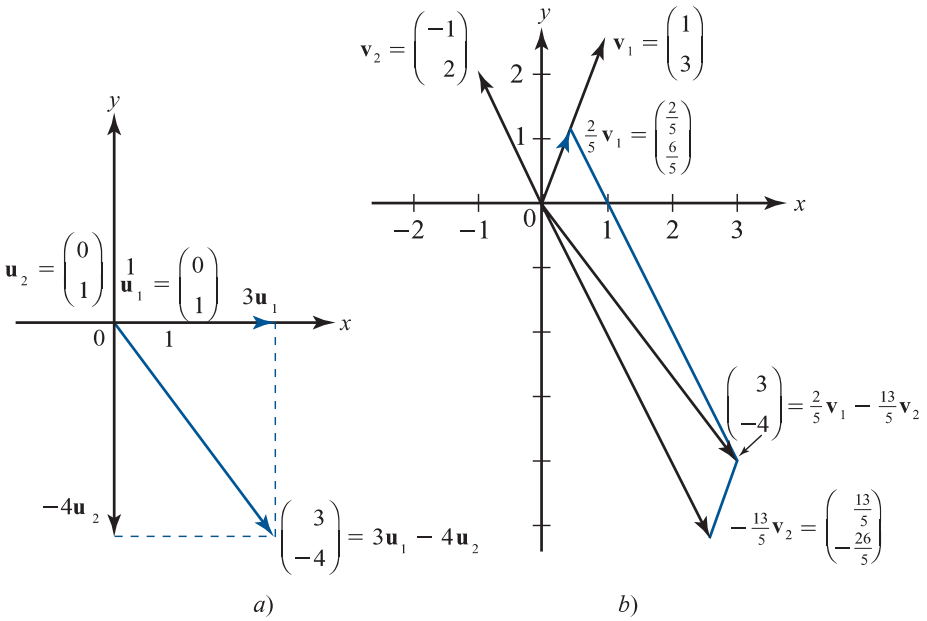


Figura 4.4

a) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base canónica $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

b) Expresión de $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

y

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_n\mathbf{v}_n \tag{6}$$

donde las b_i y c_i son números reales. De donde $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ denota la representación de $\mathbf{x}$ en términos de la base B_1. Esto no es ambiguo porque los coeficientes b_j en (5) son únicos, según el teorema 4.6.1. De igual manera, $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ tiene un significado similar. Suponga que $\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ y $\mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$. Entonces $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1 + b_1)\mathbf{u}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (a_n + b_n)\mathbf{u}_n$, de manera que

$$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)_{B_1} = (\mathbf{w}_1)_{B_1} + (\mathbf{w}_2)_{B_1}$$

Es decir, en la nueva notación se pueden sumar vectores igual que como se suman en $\mathbb{R}^n$. Los coeficientes de la "suma" de vectores son las sumas de los coeficientes de los dos vectores individuales. Más aún, es sencillo demostrar que

$$\alpha(\mathbf{w})_{B_1} = (\alpha\mathbf{w})_{B_1}$$

Ahora, como B_2 es una base, cada $\mathbf{u}_j$ en B_1 se puede escribir como una combinación lineal de las $\mathbf{v}_i$. Así, existe un conjunto único de escalares $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$, tales que para $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{u}_j = a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n \tag{7}$$

o sea,

$$(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \tag{8}$$

DEFINICIÓN 1

Matriz de transición

La matriz A de $n \times n$ cuyas columnas están dadas por (8) se denomina **matriz de transición** de la base B_1 a la base B_2. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ (\mathbf{u}_1)_{B_2} & (\mathbf{u}_2)_{B_2} & (\mathbf{u}_3)_{B_2} & \cdots & (\mathbf{u}_n)_{B_2} \end{matrix} \tag{9}$$

Nota. Si se cambia el orden en el que se escriben los vectores de la base, entonces también debe cambiarse el orden de las columnas en la matriz de transición.

TEOREMA 1

Sean B_1 y B_2 bases para un espacio vectorial V. Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2. Entonces para todo $\mathbf{x} \in V$

$$\boxed{(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}} \tag{10}$$

DEMOSTRACIÓN

Se usa la representación de $\mathbf{x}$ dada en (5) y (6):

$$\mathbf{x} \overset{\text{de (5)}}{=} b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$$

$$\overset{\text{de (7)}}{=} b_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{v}_n) + b_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{v}_n) + \cdots + b_n(a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{v}_n)$$

$$= (a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n)\mathbf{v}_1 + (a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n)\mathbf{v}_2 + \cdots + (a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n)\mathbf{v}_n$$

$$\overset{\text{de (6)}}{=} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{11}$$

Así

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \overset{\text{de (11)}}{=} \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{11} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A(\mathbf{x})_{B_1} \tag{12}$$

Antes de dar más ejemplos, se probará un teorema que es de suma utilidad para los cálculos.

TEOREMA 2

Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

DEMOSTRACIÓN

Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1. Entonces de (10) se tiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = C(\mathbf{x})_{B_2} \tag{13}$$

Pero $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$ y sustituyendo esto en (13) se obtiene

$$(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1} \tag{14}$$

Se deja como ejercicio (vea el problema 45 de la presente sección) demostrar que (14) se cumple para todo $\mathbf{x}$ en V sólo si $CA = I$. Por lo tanto, del teorema 3.4.7, $C = A^{-1}$, y el teorema queda demostrado.

Observación. Este teorema hace especialmente sencillo encontrar la matriz de transición a partir de una base canónica $B_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ en $\mathbb{R}^n$ a cualquier otra base en $\mathbb{R}^n$. Sea B_2 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cualquier otra base. Sea C la matriz cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Entonces C es la matriz de transición de B_2 a B_1 ya que cada vector $\mathbf{v}_i$ está expresado ya en términos de la base canónica. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así, la matriz de transición de B_1 a B_2 es C^{-1}.

Procedimiento para encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$

i) Se escribe la matriz C cuyas columnas son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

ii) Se calcula C^{-1}. Ésta es la matriz de transición que se busca.

Nota. La matriz de transición es única respecto al orden en que se escriben los vectores de la base B_2.

EJEMPLO 1 **Expresión de vectores en $\mathbb{R}^3$ en términos de una nueva base**

En $\mathbb{R}^3$ sea $B_1 = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ y sea $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, escriba $\mathbf{x}$ en términos de los vectores en B_2.

Solución Primero se verifica que B_2 es una base. Esto es evidente ya que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Como $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de inmediato se ve que la matriz de transición C, de B_2 a B_1 está

dada por

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Así, de acuerdo al teorema 2 la matriz de transición A de B_1 a B_2 es

$$A = C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

Para verificar, observe que

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2 **Expresión de polinomios en P_2 en términos de una nueva base**

En P_2 la base canónica en $B_1 = \{1, x, x^2\}$. Otra base es $B_2 = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Si $p = a_0 + a_1x + a_2x^2$, escriba p en términos de los polinomios en B_2.

Solución Primero verifique que B_2 es una base. Si $c_1(4x - 1) + c_2(2x^2 - x) + c_3(3x^2 + 3) = 0$ para toda x, entonces al reacomodar los términos se obtiene

$$(-c_1 + 3c_3)1 + (4c_1 - c_2)x + (2c_2 + 3c_3)x^2 = 0$$

Pero como $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto linealmente independiente, se debe tener

$$\begin{aligned} -c_1 \qquad + 3c_3 &= 0 \\ 4c_1 - c_2 \qquad &= 0 \\ 2c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

El determinante de este sistema homogéneo es $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$, lo que significa que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ es la única solución. Ahora $(4x - 1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2x^2 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $(3 + 3x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Así,

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_2 a B_1 de manera que

$$A = C^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición de B_1 a B_2. Como $(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, se tiene

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_2} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{27}[-3a_0 + 6a_1 + 3a_2] \\ \frac{1}{27}[-12a_0 - 3a_1 + 12a_2] \\ \frac{1}{27}[8a_0 + 2a_1 + a_2] \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, si $p(x) = 5x^2 - 3x + 4$, entonces

$$(5x^2 - 3x + 4)_{B_2} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{27} \\ \frac{21}{27} \\ \frac{31}{27} \end{pmatrix}$$

o

verifique esto

$$5x^2 - 3x + 4 = -\frac{15}{27}(4x - 1) + \frac{21}{27}(2x^2 - x) + \frac{31}{27}(3x^2 + 3)$$

EJEMPLO 3 **Conversión de una base a otra en $\mathbb{R}^2$**

Sean $B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ dos bases en $\mathbb{R}^2$. Si $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, exprese $\mathbf{x}$ en términos de los vectores de B_2.

Solución Este problema es un poco más difícil porque ninguna de las dos bases es canónica. Deben expresarse los vectores de B_1 como una combinación lineal de los vectores en B_2. Es decir, deben encontrarse constantes $a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}$ tales que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lo que conduce a los siguientes sistemas:

$$\begin{aligned} 2a_{11} - 5a_{21} &= 3 \\ 4a_{11} + 3a_{21} &= 1 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2a_{12} - 5a_{22} &= 2 \\ 4a_{12} + 3a_{22} &= -1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $a_{11} = \frac{7}{13}$, $a_{21} = -\frac{5}{13}$, $a_{12} = \frac{1}{26}$ y $a_{22} = -\frac{5}{13}$. Entonces

$$A = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}$$

y

$$(\mathbf{x})_{B_2} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{26}(14b_1 + b_2) \\ -\frac{10}{26}(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, $\mathbf{x} \overset{\text{en base canónica}}{=} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; entonces

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = b_1\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}_{B_2} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{41}{26} \\ -\frac{20}{26} \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{\text{¡verifique!}}{=} \frac{41}{26}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{20}{26}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Haciendo uso de la notación de esta sección se puede deducir una manera conveniente para determinar si un conjunto de vectores dado en cualquier espacio vectorial de dimensión finita es linealmente dependiente o independiente.

TEOREMA 3

Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión n. Suponga que

$$(\mathbf{x}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, (\mathbf{x}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathbf{x}_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si det $A \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ las columnas de A. Suponga que

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \tag{15}$$

Después, si se emplea la suma definida anteriormente, se puede escribir (15) como

$$(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n)_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_1} \tag{16}$$

La ecuación (16) da dos representaciones del vector cero en V en términos de los vectores de la base B_1. Como la representación de un vector en términos de los vectores de la base es única (por el teorema 4.6.1) se concluye que

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{17}$$

Donde el cero de la derecha es el vector cero en $\mathbb{R}^n$. Pero esto prueba el teorema ya que la ecuación (17) incluye a las columnas de A, que son linealmente independientes si y sólo si det $A \neq 0$.

EJEMPLO 4 **Determinación de si tres polinomios en P_2 son linealmente dependientes o independientes**

En P_2, determine si los polinomios $3 - x$, $2 + x^2$ y $4 + 5x - 2x^2$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Si se utiliza la base $B_1 = \{1, x, x^2\}$ se tiene $(3 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(2 + x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $(4 + 5x - 2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$, con lo que los polinomios son independientes.

EJEMPLO 5 **Determinación de si cuatro matrices de 2 × 2 son linealmente dependientes o independientes**

En M_{22} determine si las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ son linealmente dependientes o independientes.

Solución Utilizando la base estándar $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ se obtiene

$$\det A = \begin{vmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\2 & 3 & -1 & 4\\3 & -1 & 0 & 4\\6 & 1 & 1 & 9\end{vmatrix} = 0$$

de manera que las matrices son dependientes. Observe que $\det A = 0$ porque el cuarto renglón es la suma de los tres primeros. Además, observe que

$$-29\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 6\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -1\\0 & 1\end{pmatrix} + 20\begin{pmatrix}1 & 4\\4 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

lo que ilustra que las cuatro matrices son linealmente dependientes.

AUTOEVALUACIÓN

Elija el inciso que complete correctamente los siguientes enunciados.

I. La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ es ____.

a) $\begin{pmatrix}2 & -3\\3 & -4\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}-4 & 3\\-3 & 2\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}-4 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}$

II. La matriz de transición en $\mathbb{R}^2$ de la base $\left\{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}\right\}$ a la base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es ____.

a) $\begin{pmatrix}2 & -3\\3 & -4\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & -4\end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix}-4 & 3\\-3 & 2\end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix}-4 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}$

III. La matriz de transición en P_1 de la base $\{1, x\}$ a la base $\{2 + 3x, -4 + 5x\}$ es _____.

a) $\begin{pmatrix}2 & 3\\-4 & 5\end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix}2 & -4\\3 & 5\end{pmatrix}$ *c)* $\frac{1}{22}\begin{pmatrix}5 & -3\\4 & 2\end{pmatrix}$ *d)* $\frac{1}{22}\begin{pmatrix}5 & 4\\-3 & 2\end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 4.8

En los problemas 1 al 7 escriba $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ en términos de la base dada.

1. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$

De los problemas 8 al 14 escriba $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ en términos de la base dada.

8. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **10.** $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b\\d\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\e\\f\end{pmatrix}$, donde $adf \neq 0$

De los problemas 15 al 17 escriba los polinomios $a_0 + a_1x + a_2x^2$ en P_2 en términos de la base dada.

15. $1, x-1, x^2-1$ **16.** $1, \mathbf{x}+1, (\mathbf{x}+1)(\mathbf{x}+2)$ **17.** $x+1, x-1, x^2-1$

18. En M_{22} escriba la matriz $\begin{pmatrix}2 & -1\\4 & 6\end{pmatrix}$ en términos de la base $\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -2\\0 & 4\end{pmatrix}\right\}$

19. En P_3 exprese el polinomio $2x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ en términos de la base polinomial $1, 1 + x, x + x^2, x^2 + x^3$.

20. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\right\}$.

21. En P_3 exprese el polinomio $4x^2 - x + 5$ en términos de la base polinomial $1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3$.

22. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$, donde $B_1 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\5\end{pmatrix}\right\}$.

23. En $\mathbb{R}^2$, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ donde $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$.

24. En P_2, $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$, donde $B_1 = \{1 - x, 3x, x^2 - x - 1\}$. Escriba $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \{3 - 2x, 1 + x, x + x^2\}$.

De los problemas 25 al 34 utilice el teorema 2 para determinar si el conjunto de vectores dado es linealmente dependiente o independiente.

25. En P_2: $2 + 3x + 5x^2, 1 - 2x + x^2, -1 + 6x^2$

26. En P_2: $-3 + x^2, 2 - x + 4x^2, 4 + 2x$

27. En P_2: $2 + x, x^2 + x + 1$

28. En P_2: $x + 4x^2, -2 + 2x, 2 + x + 12x^2$

29. En P_2: $-2 + 4x - 2x^2, 3 + x, 6 + 8x$

30. En P_2: $x^2 + 1, x + 1, x + 2, x^2 + 4$

31. En P_3: $1 + x^2, -1 - 3x + 4x^2 + 5x^3, 2 + 5x - 6x^3, 4 + 6x + 3x^2 + 7x^3$

32. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$

33. En M_{22}: $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

34. En M_{22}: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & e \\ f & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ j & k \end{pmatrix}$ donde $acfk \neq 0$

35. En P_n sean $p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$, $n + 1$ polinomios tales que $p_i(0) = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes.

* CÁLCULO **36.** En el problema 35, en lugar de $p_i(0) = 0$, suponga que $p_i^{(j)} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n + 1$ y para alguna j con $1 \leq j \leq n$, donde $p_i^{(j)}$ denota la j-ésima derivada de p_i. Demuestre que los polinomios son linealmente dependientes en P_n.

37. En M_{mn} sean $A_1, A_2, \ldots, A_{mn}$, mn matrices cuyas componentes en la posición 1,1 son cero. Demuestre que las matrices son linealmente dependientes.

***38.** Suponga que los ejes x y y en el plano se rotan en sentido positivo (al contrario de las manecillas del reloj) un ángulo θ (medido en radianes). Esto da nuevos ejes que se denotan por (x', y'). ¿Cuáles son las coordenadas x, y de los vectores de la base **i** y **j** rotados?

39. Demuestre que la matriz del cambio de coordenadas en el problema 38 está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

40. Si en los problemas 38 y 39, $\theta = \pi/6 = 30°$, escriba el vector $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados x' y y'.

41. Si $\theta = \pi/4 = 45°$, escriba $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

42. Si $\theta = 2\pi/3 = 120°$, escriba $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ en términos de los nuevos ejes coordenados.

43. Sea $C = (c_{ij})$ una matriz invertible de $n \times n$ y sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial. Sea

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}_{B_1} = c_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}_{B_1} \quad c_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}_{B_1}$$

Demuestre que $B_2 = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ es una base para V.

44. Sean B_1 y B_2 dos bases para el espacio vectorial V de dimensión n y sea C la matriz de transición de B_1 a B_2. Demuestre que C^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.

45. Demuestre que $(\mathbf{x})_{B_1} = CA(\mathbf{x})_{B_1}$ para toda $\mathbf{x}$ en un espacio vectorial V si y sólo si $CA = I$ [*sugerencia*: Sea $\mathbf{x}_i$ el vector i en B_1. Entonces $(\mathbf{x}_i)_{B_1}$ tiene un uno en la posición i y un cero en otra parte. ¿Qué puede decirse sobre $CA(\mathbf{x}_i)_{B_1}$?].

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *c*) **II.** *a*) **III.** *d*)

4.9 BASES ORTONORMALES

En $\mathbb{R}^n$ se vio que n vectores linealmente independientes constituyen una base. La base canónica $E = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es la de mayor uso. Estos vectores tienen dos propiedades:

i) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ si $i \neq j$

ii) $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1$

DEFINICIÓN 1 **Conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$**

Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un **conjunto ortonormal** si

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \tag{1}$$
$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1 \tag{2}$$

Si sólo se satisface la ecuación (1), se dice que el conjunto es **ortogonal**.

Como se trabajará ampliamente con el producto escalar en esta sección, recordaremos algunos hechos básicos (vea el teorema 3.2.1). Sin mencionarlos de nuevo en forma explícita, se utilizarán en el resto de esta sección.

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\mathbb{R}^n$ y α es un número real, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \tag{3}$$
$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \tag{4}$$
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \tag{5}$$
$$(\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{6}$$
$$\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \tag{7}$$

Ahora se presenta otra definición útil.

DEFINICIÓN 2 **Longitud o norma de un vector**

Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces la **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$, denotada por $|\mathbf{v}|$, está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \tag{8}$$

Nota. Si $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Esto significa que

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ y } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{9}$$

De esta forma se puede obtener la raíz cuadrada en (8), y se tiene

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \geq 0 \qquad \text{para toda } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \tag{10}$$

$$|\mathbf{v}| = 0 \qquad \text{si y sólo si } \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{11}$$

EJEMPLO 1 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^2$**

Sea $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ cumple con la definición usual de longitud de un vector en el plano.

EJEMPLO 2 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^3$**

Sea $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ como en la sección 3.3.

EJEMPLO 3 **La norma de un vector en $\mathbb{R}^5$**

Sea $\mathbf{v} = (2, -1, 3, 4, -6) \in \mathbb{R}^5$, entonces $|\mathbf{v}| = \sqrt{4+1+9+16+36} = \sqrt{66}$.

Ahora puede establecerse otra vez la definición 1:

Un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de ellos es ortogonal y cada uno tiene longitud 1.

Los conjuntos de vectores ortonormales son bastante sencillos de manejar. Se verá un ejemplo de esta característica en la unidad 5. Ahora se probará que cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero es linealmente independiente.

TEOREMA 1

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, entonces S es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$. Entonces, para cualquier $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_i &= (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_1\mathbf{v}_i + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) \cdot \mathbf{v}_i \\ &= c_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i) + c_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i) + \cdots + c_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) + \cdots + c_k(\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_i) \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_i |\mathbf{v}_i|^2 + \cdots + c_k 0 = c_i |\mathbf{v}_i|^2 \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_i \neq 0$ por hipótesis, $|\mathbf{v}_i|^2 > 0$ y se tiene $c_i = 0$. Esto es cierto para $i = 1, 2, \ldots, k$, lo que completa la prueba.

Ahora se verá cómo *cualquier* base en $\mathbb{R}^n$ se puede "convertir" en una base ortonormal. El método descrito a continuación se denomina **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt**.†

† Jörgen Pederson Gram (1850-1916) fue un actuario danés que estuvo muy interesado en la ciencia de la medida. Erhardt Schimdt (1876-1959) fue un matemático alemán.

TEOREMA 2

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Sea H un subespacio de dimensión m de $\mathbb{R}^n$. Entonces H tiene una base ortonormal.†

DEMOSTRACIÓN

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ una base de H. Se probará el teorema construyendo una base ortonormal a partir de los vectores en S. Antes de dar los pasos para esta construcción, se observa el hecho sencillo de que un conjunto de vectores linealmente independiente no contiene al vector cero (vea el problema 25).

Paso 1. Elección del primer vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \tag{12}$$

Entonces
$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) \cdot \left(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{v}_1|^2}\right)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) = 1$$

De manera que $|\mathbf{u}_1| = 1$.

Paso 2. Elección de un segundo vector ortogonal a $\mathbf{u}_1$

Se verifica que en $\mathbb{R}^2$, el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$. Esto se ilustra en la figura 4.5.

Resulta que el vector $\mathbf{w}$ dado es ortogonal a $\mathbf{v}$ cuando $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^n$ para cualquier $n \geq 2$. Observe que como $\mathbf{u}_1$ es un vector unitario, $\dfrac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}_1|}\mathbf{u}_1 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1$ para cualquier vector $\mathbf{v}$.

Sea
$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 \tag{13}$$

entonces
$$\mathbf{v}_2' \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\,1 = 0$$

de manera que $\mathbf{v}_2'$ es ortogonal a $\mathbf{u}_1$. Más aún, por el teorema 1, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_2'$ son linealmente independientes. $\mathbf{v}_2' \neq \mathbf{0}$ porque de otra manera $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 = \dfrac{(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)}{|\mathbf{v}_1|}\mathbf{v}_1$, lo que contradice la independencia de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Paso 3. Elección de un segundo vector unitario

Sea
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2'}{|\mathbf{v}_2'|} \tag{14}$$

entonces es evidente que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortonormal.

Suponga que se han construido los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k$ $(k < m)$ y que forman un conjunto ortonormal. Se mostrará cómo construir $\mathbf{u}_{k+1}$.

Paso 4. Continuación del proceso

Sea
$$\mathbf{v}_{k+1}' = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1} \cdot \mathbf{u}_k)\,\mathbf{u}_k \tag{15}$$

† Observe que H puede ser $\mathbb{R}^n$ en este teorema. Es decir, $\mathbb{R}^n$ mismo tiene una base ortonormal.

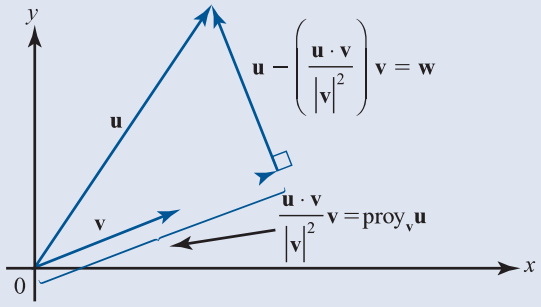


Figura 4.5

El vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

entonces para $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\mathbf{v}'_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i - (\mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_1)(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_i) - (\mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_2)(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i)(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_i) - \cdots - (\mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_k)(\mathbf{u}_k\cdot\mathbf{u}_i)$$

Pero $\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{u}_i = 0$ si $j \neq i$ y $\mathbf{u}_i\cdot\mathbf{u}_i = 1$. Por lo tanto,

$$\mathbf{v}'_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_{k+1}\cdot\mathbf{u}_i = 0$$

Así, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_k, \mathbf{v}'_{k+1}\}$ es un conjunto linealmente independiente, ortogonal y $\mathbf{v}'_{k+1} \neq \mathbf{0}$.

Paso 5

Sea $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}'_{k+1}/|\mathbf{v}'_{k+1}|$. Entonces es claro que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$ es un conjunto ortonormal y se puede continuar de esta manera hasta que $k + 1 = m$ con lo que se completa la prueba.

Nota. Como cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de vectores $\mathbf{v}_i$, gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un subespacio de gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y como cada espacio tiene dimensión k, los espacios son iguales.

EJEMPLO 4 Construcción de una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$

Construya una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ comenzando con la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Solución Se tiene $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2}$, entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$

Como $|\mathbf{v}'_2| = \sqrt{3/2}$, $\mathbf{u}_2 = \sqrt{2/3}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix}$. Continuando, se tiene

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Por último $|\mathbf{v}_3'| = \sqrt{12/9} = 2/\sqrt{3}$ de manera que $\mathbf{u}_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Así, una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$. Este resultado debe verificarse.

EJEMPLO 5 **Una base ortonormal para un subespacio de $\mathbb{R}^3$**

Encuentre una base ortonormal para el conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ que está sobre el plano

$$\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Solución Como se vio en el ejemplo 4.6.3, una base para este subespacio de dos dimensiones es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces $|\mathbf{v}_1| = \sqrt{5}$ y $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1| = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Continuando, se define

$$\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por último, $|\mathbf{v}_2'| = \sqrt{70/25} = \sqrt{70}/5$ de manera que $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2'/|\mathbf{v}_2'| = \dfrac{5}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/\sqrt{70} \\ 3/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \end{pmatrix}$.

De esta forma, una base ortonormal es $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6/\sqrt{70} \\ 3/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \end{pmatrix} \right\}$. Para verificar esta respuesta, se observa que 1) los vectores son ortogonales, 2) cada uno tiene longitud 1 y 3) cada uno satisface $2x - y + 3z = 0$.

En la figura 4.6*a* se dibujaron los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u}_1$. En la figura 4.6*b* se dibujaron los vectores $-\begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ -\frac{12}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ y se sumó a $\mathbf{v}_2$ usando la regla del paralelogramo para obtener $\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Por último, $\mathbf{u}_2$ es un vector unitario a lo largo de $\mathbf{v}_2'$.

Ahora se definirá un nuevo tipo de matriz que será muy útil en los capítulos que siguen.

DEFINICIÓN 3 **Matriz ortogonal**

Una matriz Q de $n \times n$ se llama **ortogonal** si Q es invertible y

$$Q^{-1} = Q^t \tag{16}$$

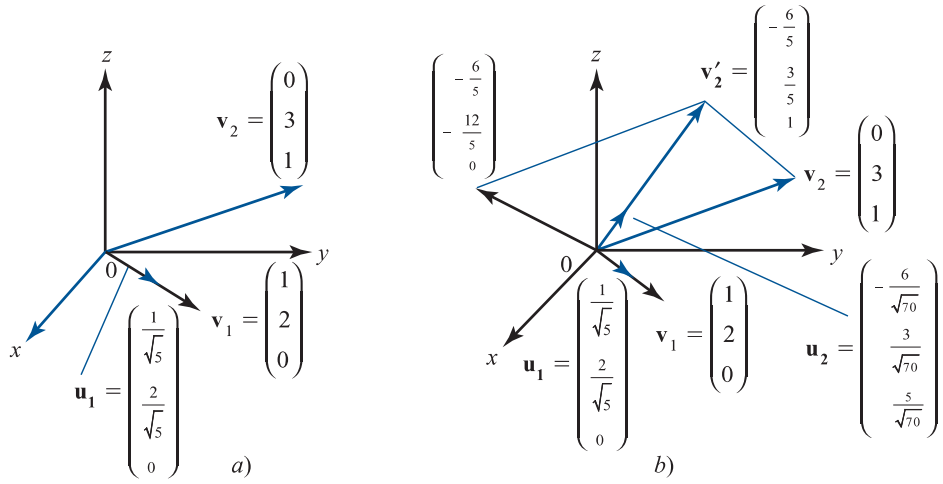


Figura 4.6
Los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman una base ortogonal para el plano generado por los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Observe que si $Q^{-1} = Q^t$, entonces $Q^tQ = I$.

No es difícil construir matrices ortogonales, de acuerdo al siguiente teorema.

TEOREMA 3

La matriz Q de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de Q forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN

Sea

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$Q^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Sea $B = (b_{ij}) = Q^tQ$. Entonces

$$b_{ij} = a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \cdots + a_{ni}\,a_{nj} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j \tag{17}$$

donde $\mathbf{c}_i$ denota la i-ésima columna de Q. Si las columnas de Q son ortonormales, entonces

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \tag{18}$$

Es decir, $B = I$. Inversamente, si $Q^t = Q^{-1}$, entonces $B = I$ de manera que (18) se cumple y (17) muestra que las columnas de Q son ortonormales. Esto completa la prueba.

EJEMPLO 6 **Una matriz ortogonal**

Del ejemplo 4, los vectores $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$.

Así, la matriz $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal. Para verificar esto se observa que

$$Q^tQ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En la prueba del teorema 2 se definió $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. Pero como se ha visto, $(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{u}_1} \mathbf{v}_2$ (ya que $|\mathbf{u}_1|^2 = 1$). Ahora se ampliará este concepto de proyección sobre un vector a proyección sobre un subespacio.

AUTOEVALUACIÓN

Indique si las siguientes aseveraciones son falsas o verdaderas

I. El conjunto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

II. El conjunto $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ es un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

III. Toda base en $\mathbb{R}^n$ se puede convertir en una base ortonormal utilizando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

IV. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es ortogonal.

V. La matriz $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ es ortogonal.

Elija el inciso que responda la siguiente pregunta

VI. ¿Para cuáles de las siguientes matrices Q^{-1} es igual a Q^t?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & 2/\sqrt{40} \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 6/\sqrt{40} \\ 3/\sqrt{10} & -2/\sqrt{40} \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 4.9

De los problemas 1 al 17 construya una base ortonormal para el espacio o subespacio vectorial dado.

1. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con los vectores básicos $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y = 0\}$.

3. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x - y = 0\}$.

4. $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: ax + by = 0\}$.

5. En $\mathbb{R}^2$, comenzando con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, donde $ad - bc \neq 0$.

6. $\pi = \{(x, y, z): 2x - y - z = 0\}$

7. $\pi = \{(x, y, z): 3x - 2y + 6z = 0\}$

8. $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x + 2y + 3z = 0\}$

9. $L = \{(x, y, z): x/2 = y/3 = z/4\}$

10. $L = \{(x, y, z): x = 3t, y = -2t, z = t; t \text{ real}\}$

11. $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = t, y = 2t, z = -2t; t \in \mathbb{R}\}$

12. $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4: 2x - y + 3z - w = 0\}$

13. $\pi = \{(x, y, z): ax + by + cz = 0\}$, donde $abc \neq 0$

14. $L = \{(x, y, z): x/a = yb = z/c\}$, donde $abc \neq 0$

15. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0\}$

16. $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = 0\}$

17. H es el espacio de soluciones de

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 0 \\ -2x + 2y - 3z &= 0 \\ 4x - 8y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

***18.** Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^4$ que incluya los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

[*Sugerencia*: primero encuentre dos vectores $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ para completar la base.]

19. Demuestre que $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal.

20. Demuestre que si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es ortogonal.

21. Verifique el resultado del problema 20 con

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -\sqrt{8}/3 \\ \sqrt{8}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

22. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal simétrica, entonces $Q^2 = I$.

23. Demuestre que si Q es ortogonal, entonces $\det Q = \pm 1$.

24. Demuestre que para cualquier número real t, la matriz $A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$ es ortogonal.

25. Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{2}$.

26. Si $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ son ortonormales, demuestre que

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \cdots + \mathbf{u}_n|^2 = |\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{u}_n|^2 = n$$

27. Encuentre una condición sobre los números a y b tales que $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}\right\}$ y $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\}$ forman una base ortonormal en $\mathbb{R}^2$.

28. Demuestre que *cualquier* base ortonormal en $\mathbb{R}^2$ es de una de las formas dadas en el problema 27.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. F **II.** V **III.** V **IV.** F **V.** V **VI.** *c*)

4.10 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Esta sección utiliza los conocimientos sobre las propiedades elementales de los números complejos (unidad 1) y requiere alguna familiaridad con el material del primer año de cálculo.

En la sección 3.2 se vio cómo se podían multiplicar dos vectores en $\mathbb{R}^n$ para obtener un escalar. Este producto escalar se denomina también *producto interno*. Otros espacios vectoriales tienen productos internos definidos. Antes de ofrecer una definición general, se observa que en $\mathbb{R}^n$ el producto interno de dos vectores es un escalar real. En otros espacios (vea el ejemplo 2 siguiente) el resultado del producto interno es un escalar complejo. Por lo tanto, para incluir todos los casos, en la siguiente definición se supone que el producto interno es un número complejo.

DEFINICIÓN 1 **Espacio con producto interno**

Un espacio vectorial complejo V se denomina **espacio con producto interno** si para cada par ordenado de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V, existe un número complejo único $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, denominado **producto interno** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tal que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

i) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$

ii) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$

iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

v) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

vi) $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

vii) $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

La barra en las condiciones *v*) y *vii*) denota el conjugado complejo.

Nota. Si $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es real, entonces $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ y se puede eliminar la barra en *v*).

EJEMPLO 1 Un producto interno en $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ es un espacio con producto interno con $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Las condiciones *iii*)-*vii*) están contenidas en el teorema 3.2.1. Las condiciones *i*) y *ii*) están incluidas en el resultado 4.9.9.

EJEMPLO 2 Un producto interno en $\mathbb{C}^n$

Se definió un espacio vectorial en $\mathbb{C}^n$ en el ejemplo 4.2.12. Sean $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en $\mathbb{C}^n$ (recuerde que esto significa que los elementos x_i y y_i son números complejos). Entonces se define

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \cdots + x_n\overline{y}_n \qquad (1)$$

Para demostrar que la ecuación (1) define un producto interno, se necesitan algunos hechos sobre los números complejos. Si el lector no está familiarizado, consulte el apéndice 2. Para *i*),

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = x_1\overline{x}_1 + x_2\overline{x}_2 + \cdots + x_n\overline{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

Así, *i*) y *ii*) satisfacen ya que $|x_i|$ es un número real. Las condiciones *iii*) y *iv*) se deducen del hecho de que $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ para cualesquiera números complejos z_1, z_2 y z_3. La condición *v*) se deduce del hecho de que $\overline{z_1z_2} = \overline{z}_1\overline{z}_2$ y $\overline{\overline{z}}_1 = z_1$ de manera que $\overline{x_1\overline{y}_1} = \overline{x}_1y_1$. La condición *vi*) es obvia. Para *vii*) $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = (\overline{\alpha\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{u}}) = (\overline{\alpha}\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{u}}) = \overline{\alpha}(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{u}}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Aquí se usaron *vi*) y *v*).

EJEMPLO 3 Producto interno de dos vectores en $\mathbb{C}^3$

En $\mathbb{C}^3$ sean $\mathbf{x} = (1 + i, -3, 4 - 3i)$ y $\mathbf{y} = (2 - i, -i, 2 + i)$. Entonces

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (1 + i)\,\overline{(2 - i)} + (-3)\,\overline{(-i)} + (4 - 3i)\,\overline{(2 + i)} \\ &= (1 + i)(2 + i) + (-3)(i) + (4 - 3i)(2 - i) \\ &= (1 + 3i) - 3i + (5 - 10i) = 6 - 10i\end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Un producto interno en $C[a, b]$

CÁLCULO

Suponga que $a < b$; sea $V = C[a, b]$ el espacio de las funciones de valores reales continuas en el intervalo $[a, b]$ y defina

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad (2)$$

Se verá que esto también es un producto interno.†

i) $(f, f) = \int_a^b f^2(t)\,dt \geq 0$. Es un teorema básico del cálculo que si $f \in C[a, b]$, $f \geq 0$ sobre $[a, b]$ y $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, entonces $f = 0$ sobre $[a, b]$. Esto prueba *i*) y *ii*), *iii*)-*vii*) se deducen de los hechos básicos sobre integrales definidas.

Nota. En $C[a, b]$ se supone que los escalares son números reales y que las funciones son de valores reales, de manera que no nos preocupamos por los complejos conjugados; sin embargo, si las funciones son de valores complejos, entonces de todas maneras se puede definir un producto interno. Vea más detalles en el problema 27.

EJEMPLO 5 El producto interno de dos funciones en C[0, 1]

CÁLCULO Sea $f(t) = t^2 \in C[0, 1]$ y $g(t) = (4 - t) \in C[0, 1]$. Entonces

$$(f, g) = \int_0^1 t^2(4 - t)\,dt = \int_0^1 (4t^2 - t^3)\,dt = \left(\frac{4t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{12}$$

DEFINICIÓN 2

Sea V un espacio con producto interno y suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V. Entonces

i) $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales** si $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.

ii) La **norma** de $\mathbf{u}$, denotada por $\|\mathbf{u}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \tag{3}$$

Nota 1. Aquí se usa la doble barra en lugar de una sola para evitar confusión con el valor absoluto. Por ejemplo, en el ejemplo 7 $\|\text{sen } t\|$ denota la norma de sen t como un "vector" en $C[0, 2\pi]$ mientras que $|\text{sen } t|$ denota el valor absoluto de la función sen t.

Nota 2. La ecuación (3) tiene sentido ya que $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$.

EJEMPLO 6 Dos vectores ortogonales en $\mathbb{C}^2$

En $\mathbb{C}^2$ los vectores $(3, -i)$ y $(2, 6i)$ son ortogonales porque

$$((3, -i), (2, 6i)) = 3 \cdot \overline{2} + (-i)\,(\overline{6i}) = 6 + (-i)\,(-6i) = 6 - 6 = 0$$

además $\|(3, -i)\| = \sqrt{3 \cdot 3 + (-i)\,(i)} = \sqrt{10}$.

EJEMPLO 7 Dos funciones ortogonales en C[0, 2π]

En $C[0, 2\pi]$ las funciones sen t y cos t son ortogonales ya que

$$(\text{sen } t, \cos t) = \int_0^{2\pi} \text{sen } t \cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \text{sen } 2t\,dt = -\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{2\pi} = 0$$

† Ésta no es la única manera de definir un producto interno sobre $C[a, b]$, pero es la más común.

Además,

$$\begin{aligned}\|\text{sen } t\| &= (\text{sen } t, \text{sen } t)^{1/2}\\ &= \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\, t\, dt\right]^{1/2}\\ &= \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\, dt\right]^{1/2}\\ &= \left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{\text{sen } 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}\right]^{1/2}\\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Si se observan las demostraciones de los teoremas 4.9.1 y 4.9.2, se ve que no se utilizó el hecho de que $V = \mathbb{R}^n$. Los mismos teoremas se cumplen en cualquier espacio con producto interno V. A continuación se enumeran, por conveniencia, después de dar una definición.

DEFINICIÓN 3 **Conjunto ortonormal**

El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** en V si

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \quad \text{para } i \neq j \tag{4}$$

y

$$\|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = 1 \tag{5}$$

Si sólo (4) se cumple, se dice que el conjunto es **ortogonal**.

TEOREMA 1 Cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero en un espacio con producto interno es linealmente independiente.

TEOREMA 2 Cualquier conjunto finito linealmente independiente en un espacio con producto interno se puede convertir en un conjunto ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt. En particular, cualquier espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

EJEMPLO 8 Una base ortonormal $P_2[0, 1]$

CÁLCULO Construya una base ortonormal para $P_2[0,1]$.

Solución Se comienza con la base estándar $\{1, x, x^2\}$. Como $P_2[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$, se puede usar el producto interno del ejemplo 4. Como $\int_0^1 1^2\, dx = 1$, se hace $\mathbf{u}_1 = 1$. Después $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1$. En este caso $(\mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1) = \int_0^1 (x \cdot 1)\, dx = \frac{1}{2}$. Así, $\mathbf{v}_2' = x - \frac{1}{2}\cdot 1 = x - \frac{1}{2}$. Luego se calcula

$$\left\|x-\frac{1}{2}\right\| = \left[\int_0^1 \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 dx\right]^{1/2} = \left[\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx\right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Entonces $\mathbf{u}_2 = 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2x - 1)$. Así

$$\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2$$

Se tiene $(\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ y

$$(\mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2) = \sqrt{3}\int_0^1 x^2\,(2x - 1)\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 (2x^3 - x^2)\,dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Así,

$$\mathbf{v}_3' = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\sqrt{3}\,(2x - 1)\right] = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

y

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_3'\| &= \left[\int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx\right]^{1/2} \\ &= \left[\int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{36}\right) dx\right]^{1/2} \\ &= \left[\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{4x^3}{9} - \frac{x^2}{6} + \frac{x}{36}\right)\Big|_0^1\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}}\end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{u}_3 = 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$. Por último, una base ortonormal es $\{1, \sqrt{3}(2x - 1), \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\}$.

EJEMPLO 9 Un conjunto ortonormal infinito $C[0, 2\pi]$

CÁLCULO En $C[0, 2\pi]$ el conjunto infinito

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \ldots\right\}$$

es un conjunto ortonormal. Esto es cierto ya que si $m \neq n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\,dx = 0$$

Para probar una de estas igualdades se observa que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x\right] dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m + n)x}{m + n} + \frac{\cos(m - n)x}{m - n}\right]\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

ya que cos x es periódica con periodo 2π. Se vio que $\|\operatorname{sen} x\| = \sqrt{\pi}$. Así, $\left\|\left(1/\sqrt{\pi}\right)\operatorname{sen} x\right\| = 1$. Las otras igualdades se deducen de forma similar. Este ejemplo proporciona una situación en la

que tenemos un conjunto ortonormal *infinito*. De hecho, aunque esto está más allá del alcance de este libro elemental, es cierto que algunas funciones en $C[0, 2\pi]$ se pueden expresar como combinaciones lineales de las funciones en S. Suponga que $f \in C[0, 2\pi]$. Después, si se escribe f como una combinación lineal infinita de los vectores en S, se obtiene lo que se denomina la **representación por series de Fourier** de f.

AUTOEVALUACIÓN

Complete las siguientes afirmaciones con el inciso correcto

I. En $C[0, 1]$, $(x, x^3) =$ _____.

a) $\frac{1}{2}$ ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $\frac{1}{4}$ ***d)*** $\frac{1}{5}$ ***e)*** $\frac{1}{6}$

II. En $C[0, 1]$, $\|x^2\|^2 =$ _____.

a) $\frac{1}{2}$ ***b)*** $\frac{1}{3}$ ***c)*** $\frac{1}{4}$ ***d)*** $\frac{1}{5}$ ***e)*** $\frac{1}{6}$

III. En $\mathbb{C}^2$, $((1 + i, 2 - 3i), (2 - i, -1 + 2i)) =$ _____.

a) $-7 + 2i$ ***b)*** $7 + 8i$ ***c)*** $4 - 3i$ ***d)*** $4 + 3i$ ***e)*** $-2 + 5i$

IV. En $\mathbb{C}^2$, $\|(1 + i, 2 - 3i)\| =$ _____.

a) $-5 - 10i$ ***b)*** 15 ***c)*** $\sqrt{15}$ ***d)*** 7 ***e)*** $\sqrt{7}$

Desarrollo de competencias 4.10

1. Sea D_n el conjunto de las matrices diagonales de $n \times n$ con componentes reales bajo las operaciones usuales de matrices. Si A y B están en D_n, defina

$$(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{nn}$$

Pruebe que D_n es un espacio con producto interno.

2. Si $A \in D_n$, demuestre que $\|A\| = 1$ si y sólo si $a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{mn}^2 = 1$.

3. Encuentre una base ortonormal para D_n.

4. Encuentre una base ortonormal para D_2 comenzando con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. En $\mathbb{C}^2$ encuentre una base ortonormal comenzando con la base $(1, i), (2 - i, 3 + 2i)$.

CÁLCULO **6.** Encuentre una base ortonormal para $P_3[0, 1]$.

CÁLCULO **7.** Encuentre una base ortonormal para $P_2[-1, 1]$. Los polinomios que se obtienen se denominan **polinomios normalizados de Legendre**.

*CÁLCULO **8.** Encuentre una base ortonormal para $P_2[a, b]$, $a < b$.

9. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz real de $n \times n$, la **traza** de A, que se escribe tr A, es la suma de las componentes de la diagonal de A: tr $A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. En M_{nn} defina $(A, B) =$ tr (AB^t). Demuestre que con este producto interno M_{nn} es un espacio con producto interno.

10. Si $A \in M_{nn}$, demuestre que $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^t)$ es la suma de los cuadrados de los elementos de A [*nota*: aquí $\|A\|$ $(A, A)^{1/2}$, utilice la notación del problema 9].

11. Encuentre una base ortonormal para M_{22}.

12. Se puede pensar en el plano complejo como en un espacio vectorial sobre los reales con vectores básicos 1, i. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, defina $(z, w) = ac + bd$. Demuestre que éste es un producto interno y que $\|z\|$ es la longitud usual de un número complejo.

13. Sean a, b y c tres números reales distintos. Sean p y q en P_2 y defina $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)$.

a) Demuestre que (p, q) es un producto interno en P_2.

b) ¿Es $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b)$ un producto interno?

14. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_* = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Demuestre que (x, y) es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

15. Con el producto interno del problema 14, calcule $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|_*$.

16. En $\mathbb{R}$ sea $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - x_2y_2$. ¿Es éste un producto interno? Si no lo es ¿por qué?

***17.** Sea V un espacio con producto interno. Demuestre que $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| < \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$. Esto se denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

***18.** Utilizando el resultado del problema 17, demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$. Ésta se denomina **desigualdad del triángulo**.

CÁLCULO **19.** En $P_3[0, 1]$ sea H el subespacio generado por $\{1, x^2\}$. Encuentre $H^\perp$.

*CÁLCULO **20.** En $C[-1, 1]$ sea H el subespacio generado por las funciones pares. Demuestre que $H^\perp$ consiste en las funciones impares [*sugerencia*: f es impar si $f(-x) = -f(x)$ y es par si $f(-x) = f(x)$].

*CÁLCULO **21.** $H = P_2[0, 1]$ es un subespacio de $P_3[0, 1]$. Escriba el polinomio $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ como $h(x) + p(x)$, donde $h(x) \in H$ y $p(x) \in H^\perp$.

***22.** Encuentre un polinomio de segundo grado que mejor se aproxime a $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x$ en el intervalo $[0, 1]$ en el sentido del error cuadrático medio.

***23.** Resuelva el problema 22 para la función $\cos \frac{\pi}{2}x$.

24. Sea A una matriz de $m \times n$ con elementos complejos. Entonces la **transpuesta conjugada** de A, denotada por A^*, está definida por $(A^*)_{ij} = \overline{a_{ij}}$. Calcule A^* si

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 3 + 4i \\ 2i & -6 \end{pmatrix}$$

25. Sea A una matriz invertible de $n \times n$ con elementos complejos. A se denomina **unitaria** si $A^{-1} = A^*$. Demuestre que la siguiente matriz es unitaria:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

***26.** Demuestre que una matriz de $n \times n$ con elementos complejos es unitaria si y sólo si las columnas de A constituyen una base ortonormal para $\mathbb{C}^n$.

*CÁLCULO **27.** Se dice que una función f es de **valores complejos** sobre el intervalo (real) $[a, b]$ si $f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i, \qquad x \in [a, b]$$

donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales. La función de valores complejos f es **continua** si f_1 y f_2 son continuas. Sea $CV[a, b]$ el conjunto de funciones de valores complejos que son continuas en $[a, b]$. Para f y g en $CV[a, b]$, defina

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad \textbf{(15)}$$

Demuestre que (15) define un producto interno en $CV[a, b]$.

CÁLCULO **28.** Demuestre que $f(x) = \operatorname{sen} x + i \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x - i \cos x$ son **ortogonales** en $CV[0, \pi]$.

CÁLCULO **29.** Calcule $\|\operatorname{sen} x + i \cos x\|$ en $CV[0, \pi]$.

RESUMEN

- Un **espacio vectorial real** V es un conjunto de objetos, denominados **vectores**, junto con dos operaciones denominadas **suma** (denotada por $\mathbf{x} + \mathbf{y}$) y **multiplicación por un escalar** (denotada por $\alpha\mathbf{x}$) que satisfacen los siguientes axiomas:
  - **i)** Si $\mathbf{x} \in V$ y $\mathbf{y} \in V$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$ **(cerradura bajo la suma)**.
  - **ii)** Para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ en V, $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ **(ley asociativa de la suma de vectores)**.
  - **iii)** Existe un vector $\mathbf{0} \in V$ tal que para todo $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (el $\mathbf{0}$ se llama **vector cero** o **idéntico aditivo**).
  - **iv)** Si $\mathbf{x} \in V$, existe un vector $-\mathbf{x}$ en V tal que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($-\mathbf{x}$ se llama inverso aditivo de $\mathbf{x}$).
  - **v)** Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ **(ley conmutativa de la suma de vectores)**.
  - **vi)** Si $\mathbf{x} \in V$ y α es un escalar, entonces $\alpha\mathbf{x} \in V$ **(cerradura bajo la multiplicación por un escalar)**.
  - **vii)** Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ **(primera ley distributiva)**.
  - **viii)** Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ **(segunda ley distributiva)**.
  - **ix)** Si $\mathbf{x} \in V$ y α y β son escalares, entonces $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta\mathbf{x})$ **(ley asociativa de la multiplicación por escalares)**.
  - **x)** Para cada $\mathbf{x} \in V$, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$
- El **espacio** $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: $x_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$.
- El **espacio** $\boldsymbol{P_n}$ = {polinomios de grado menor que o igual a n}.
- El **espacio** $\boldsymbol{C[a, b]}$ = {funciones reales continuas en el intervalo $[a, b]$}.
- El **espacio** $\boldsymbol{M_{mn}}$ = {matrices de $m \times n$ con coeficientes reales}.
- El **espacio** $\mathbb{C}^n = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n)$: $c_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, \ldots, n\}$. $\mathbb{C}$ denota el conjunto de números complejos.
- Un **subespacio** H de un espacio vectorial V es un subconjunto de V que es en sí un espacio vectorial.

- Un subespacio no vacío H de un espacio vectorial V es un subespacio de V si las dos siguientes reglas se cumplen:

  i) Si $\mathbf{x} \in H$ y $\mathbf{y} \in H$, entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$.

  ii) Si $\mathbf{x} \in H$, entonces $\alpha\mathbf{x} \in H$ para cada escalar α.)

- Un **subespacio propio** de un espacio vectorial V es un subespacio de V diferente de $\{\mathbf{0}\}$ y de V.

- Una **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V es la suma de la forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$$

  donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

- Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V **generan a** V si todo vector en V se puede expresar como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

- El **espacio generado por un conjunto de vectores** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V es el conjunto de combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

- gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un subespacio de V.

- ***Dependencia e independencia lineal***

  Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todos cero tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

  Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**.

- Dos vectores en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro.

- Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$.

- Un conjunto de n vectores en $\mathbb{R}^m$ es linealmente independiente si $n > m$.

- ***Base***

  Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ es una base para un espacio vectorial V si

  i) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

  ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V.

- Todo conjunto de n vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$.

- La **base canónica** en $\mathbb{R}^n$ consiste en n vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- ***Dimensión***

  Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la **dimensión** de V es el número de vectores en cada base y V se denomina un **espacio vectorial de dimensión finita**. De otra manera V se denomina **espacio vectorial de dimensión infinita**. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces se dice que V tiene **dimensión cero**.

  La dimensión de V se denota por dim V.

- Si H es un subespacio del espacio de dimensión finita V, entonces dim $H \leq$ dim V.
- Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^3$ son los conjuntos de vectores que están en una recta o en un plano que pasa por el origen.
- El **espacio nulo** de una matriz A de $n \times n$ es el subespacio de $\mathbb{R}^n$ dado por

$$N_A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

- La nulidad de una matriz A de $n \times n$ es la dimensión de N_A y se denota por $\nu(A)$.
- Sea A una matriz de $m \times n$. La **imagen de A** denotado por Im(A), es el subespacio de $\mathbb{R}^m$ dado por

$$\text{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A\mathbf{x} = \mathbf{y} \text{ para alguna } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$$

- El **rango de A**, denotado por $\rho(A)$, es la dimensión de la imagen de A.
- El **espacio de los renglones de A**, denotado por R_A, es el espacio generado por los renglones de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.
- El **espacio de las columnas de A**, denotado por C_A, es el espacio generado por las columnas de A y es un subespacio de $\mathbb{R}^m$.
- Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$C_A = \text{Im}(A) \text{ y dim } R_A = \text{dim } C_A = \text{dim Im}(A) = \rho(A)$$

  Más aún,

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

- El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución si y sólo si $\rho(A) = \rho(A, \mathbf{b})$, donde $(A, \mathbf{b})$ es la matriz aumentada que se obtiene al agregar la columna del vector $\mathbf{b}$ a A.
- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

  i) A es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

  iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

  iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

  v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

  vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

  vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

  viii) det $A \neq 0$.

  ix) $\nu(A) = 0$.

  x) $\rho(A) = n$.

- Sea $B_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ y $B_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ dos bases para el espacio vectorial V. Si $\mathbf{x} \in V$ y

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

  Entonces se escribe $(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ y $(\mathbf{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

Suponga que $(\mathbf{u}_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. Entonces la **matriz de transición** de B_1 a B_2 es la matriz de $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Más aún, $(\mathbf{x})_{B_2} = A(\mathbf{x})_{B_1}$.

- Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2, entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1.
- Si $(\mathbf{x}_j)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes si y sólo si $\det A \neq 0$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en $\mathbb{R}^n$ forman un **conjunto ortogonal** si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$. Si además, $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se dice que el conjunto es **ortonormal**.
- $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}|^{1/2}$ se llama **longitud** o **norma** de $\mathbf{v}$.
- Todo subespacio de $\mathbb{R}^n$ tiene una base ortonormal. El **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** se puede utilizar para construir tal base.
- Una **matriz ortogonal** es una matriz Q invertible de $n \times n$ tal que $Q^{-1} = Q^t$.
- Una matriz de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si sus columnas forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^n$.
- ***Espacio con producto interno***

  El espacio vectorial complejo V se llama un **espacio con producto interno** si para cada par de vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V existe un número complejo único $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ denominado el **producto interno** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, tal que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

  i) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$

  ii) $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ si y solo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  iii) $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$

  iv) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$

  v) $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$

  vi) $(\alpha\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

  vii) $(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v}) = \overline{\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- *Producto interno en* $\mathbb{C}^n$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 \overline{y}_1 + x_2 \overline{y}_2 + \cdots + x_n \overline{y}_n$$

- Sea V un espacio con producto interno y suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V. Entonces

$$\mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ son } \textbf{ortogonales} \text{ si } (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

- La **norma** de $\mathbf{u}$, denotada por $\|\mathbf{u}\|$, está dada por

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

- ***Conjunto ortonormal***

  El conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un **conjunto ortonormal** en V si

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = 0 \qquad \text{para } i \neq j$$

  y

$$\|\mathbf{v}_i\| = \sqrt{(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)} = 1$$

  Si sólo se cumple la primera condición, entonces se dice que el conjunto es **ortogonal**.

COMPETENCIAS FINALES. UNIDAD 4

De los ejercicios 1 al 13 determine si el conjunto dado es un espacio vectorial. Si lo es, determine su dimensión. Si es finita, encuentre una base para él.

1. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z = 0$.
2. Los vectores (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 2y - z \leq 0$.
3. Los vectores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + y + z \leq 0$.
4. Los vectores (x, y, z, w) en $\mathbb{R}^4$ que satisfacen $x + y + z + w = 0$.
5. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x - 2 = y + 3 = z - 4$.
6. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen $x + 1 = y - 2 = z + 3$.
7. El conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$ bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar.
8. El conjunto de polinomios de grado ≤ 5.
9. El conjunto de polinomios de grado menor o igual que 4.
10. El conjunto de polinomios de grado 5.
11. El conjunto de matrices de 3×2, $A = (a_{ij})$, con $a_{12} = 0$, bajo las operaciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar.
12. El conjunto en el ejercicio 8, excepto $a_{12} = 1$.
13. El conjunto $S = \{f \in C[0, 2]: f(2) = 0\}$.

En los ejercicios 14 al 24 determine si el conjunto dado de vectores es linealmente dependiente o independiente.

14. $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

21. En $P_3: 1, 2 - x^2, 3 - x, 7x^2 - 8x$

22. En $P_3: 1, 2 + x^3, 3 - x, 7x^2 - 8x$

23. En $M_{22}: \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

24. En $M_{22}: \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}$

25. Usando determinantes, establezca si cada conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente.

a) $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}-5\\5\\6\end{pmatrix}$

b) $(2, 1, 4); (3, -2, 6); (-1, -4, -2)$

De los ejercicios 26 al 33 encuentre una base para el espacio vectorial y determine su dimensión.

26. Los vectores en $\mathbb{R}^3$ que están en el plano $2x + 3y - 4z = 0$.

27. $H = \{(x, y): 2x - 3y = 0\}$

28. $H = \{(x, y); 3x + 2y = 0\}$

29. $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 : 3x - y - z + w = 0\}$

30. $\{p \in P_3 : p(0) = 0\}$

31. El conjunto de matrices diagonales de 4×4.

32. M_{32}

33. M_{23}

De los ejercicios 34 al 41 encuentre el espacio nulo, la imagen la nulidad y el rango de la matriz dada.

34. $A = \begin{pmatrix}1 & -2\\-2 & 4\end{pmatrix}$

35. $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\2 & 0 & 4\\0 & -2 & 2\end{pmatrix}$

36. $A = \begin{pmatrix}0 & -3 & 6\\2 & 0 & 6\\1 & -1 & 4\end{pmatrix}$

37. $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 1 & 4\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$

38. $A = \begin{pmatrix}2 & 4 & -2\\-1 & -2 & 1\end{pmatrix}$

39. $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 2\\3 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}$

40. $A = \begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 2\\4 & 6\end{pmatrix}$

41. $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\0 & 1 & -1 & 0\\1 & -2 & 3 & 3\\2 & -3 & 5 & 6\end{pmatrix}$

De los ejercicios 42 al 46 escriba el vector dado en términos de los vectores básicos dados.

42. En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

43. En $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$

44. En P_2: $\mathbf{x} = 4 + x^2; 1 + x^2, 1 + x, 1$

45. En M_{22}: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

46. En M_{22}: $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

De los ejercicios 47 al 50 encuentre una base ortonormal para el espacio vectorial dado.

47. $\mathbb{R}^2$ comenzando con la base $\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\ 4\end{pmatrix}$.

48. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x - y - z = 0\}$

49. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = y = z\}$

Unidad

5

TRANSFORMACIONES LINEALES

COMPETENCIA ESPECÍFICA A DESARROLLAR

Aplicar las transformaciones lineales y sus propiedades para representarlas mediante una matriz de reflexión, dilatación, contracción y rotación.

5.1 DEFINICIÓN Y EJEMPLOS

El presente capítulo aborda una clase especial de funciones denominadas *transformaciones lineales* que ocurren con mucha frecuencia en el álgebra lineal y otras ramas de las matemáticas. Éstas tienen una gran variedad de aplicaciones importantes. Antes de definirlas, se estudiarán dos ejemplos sencillos para ver lo que es posible realizar.

EJEMPLO 1 Reflexión respecto al eje *x*

En $\mathbb{R}^2$ se define una función T mediante la fórmula $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$. Geométricamente, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje x. Esto se ilustra en la figura 5.1. Una vez que se ha dado la definición básica, se verá que T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

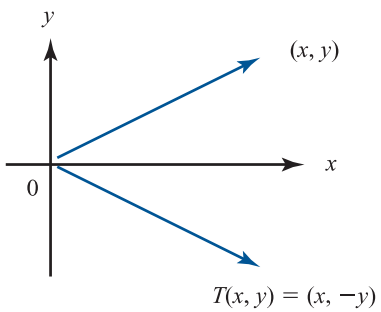


Figura 5.1
El vector $(x, -y)$ es la reflexión respecto al eje x del vector (x, y).

EJEMPLO 2 Transformación de un vector de producción en un vector de materia prima

Un fabricante elabora cuatro tipos de productos distintos, de los cuales cada uno requiere tres tipos de materiales. Se identifican los cuatro productos como P_1, P_2, P_3 y P_4 y a los materiales por R_1, R_2 y R_3. La tabla siguiente muestra el número de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.

Número de unidades de materia prima	Necesarios para producir 1 unidad de P_1	P_2	P_3	P_4
R_1	2	1	3	4
R_2	4	2	2	1
R_3	3	3	1	2

Surge una pregunta natural: si se produce cierto número de los cuatro productos, ¿cuántas unidades de cada material se necesitan? Sean p_1, p_2, p_3 y p_4 el número de artículos fabricados de los cuatro productos y sean r_1, r_2 y r_3 el número de unidades necesario de los tres materiales. Entonces se define

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, suponga que $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$. ¿Cuántas unidades de R_1 se necesitan para producir estos números de unidades de los cuatro productos? De la tabla se tiene que

$$\begin{aligned} r_1 &= p_1 \cdot 2 + p_2 \cdot 1 + p_3 \cdot 3 + p_4 \cdot 4 \\ &= 10 \cdot 2 + 30 \cdot 1 + 20 \cdot 3 + 50 \cdot 4 = 310 \text{ unidades} \end{aligned}$$

De manera similar

$$r_2 = 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 50 \cdot 1 = 190 \text{ unidades}$$

y

$$r_3 = 10 \cdot 3 + 30 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 50 \cdot 2 = 240 \text{ unidades}$$

En general se ve que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

o

$$A\mathbf{p} = \mathbf{r}$$

Esto se puede ver de otra manera. Si a $\mathbf{p}$ se le conoce como el **vector de producción** y a $\mathbf{r}$ como el **vector de materia prima**, se define la función T por $\mathbf{r} = T(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$. Esto es, T es la función que "transforma" el vector de producción en el vector de materia prima y se hace mediante la multiplicación de matrices ordinaria. Como se verá, esta función es también una transformación lineal.

Antes de definir una transformación lineal, hablaremos un poco sobre las funciones. En la sección 1.7 se escribió un sistema de ecuaciones como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se pidió encontrar $\mathbf{x}$ cuando A y b se conocían. No obstante, esta ecuación se puede ver de otra forma: suponga que A se conoce. Entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ "dice": proporcione una $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ y yo le daré una $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$; es decir, A representa una *función* con dominio $\mathbb{R}^n$ e imagen en $\mathbb{R}^m$.

La función que se acaba de definir tiene las propiedades de que $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si α es un escalar y $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$. Esta propiedad caracteriza las transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 1

Transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \tag{1}$$

y

$$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v} \tag{2}$$

TRES OBSERVACIONES SOBRE NOTACIÓN

1. Se escribe $T: V \to W$ para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.

2. Se escriben indistintamente $T\mathbf{v}$ y $T(\mathbf{v})$. Denotan lo mismo; las dos se leen "T de $\mathbf{v}$". Esto es análogo a la notación funcional $f(x)$, que se lee "f de x".

3. Gran parte de las definiciones y teoremas en este capítulo también se cumplen para los espacios vectoriales complejos (espacios vectoriales en donde los escalares son números complejos). Sin embargo, a excepción de la breve intervención de la sección 5.5, sólo se manejarán espacios vectoriales reales y, por lo tanto, se eliminará la palabra "real" en el análisis de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales.

TERMINOLOGÍA

Las transformaciones lineales con frecuencia se denominan **operadores lineales**.

EJEMPLO 3 Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ 3y_1 + 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 3y_1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 3y_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Así

$$T\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

De manera similar

$$T\left[\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ 3\alpha y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ 3y \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Así, T es una transformación lineal.

EJEMPLO 4 La transformación cero

Sean V y W espacios vectoriales y defina $T: V \to W$ por $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Entonces $T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = T\mathbf{v}_1 + T\mathbf{v}_2$ y $T(\alpha\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \alpha\mathbf{0} = \alpha T\mathbf{v}$. En este caso, T se denomina la **transformación cero**.

EJEMPLO 5 La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y defina $I: V \to V$ por $I\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Aquí es obvio que I es una transformación lineal, la cual se denomina **transformación identidad** u **operador identidad**.

EJEMPLO 6 Transformación de reflexión

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$. Es fácil verificar que T es lineal. En términos geométricos, T toma un vector en $\mathbb{R}^2$ y lo refleja respecto al eje y (vea la figura 5.2).

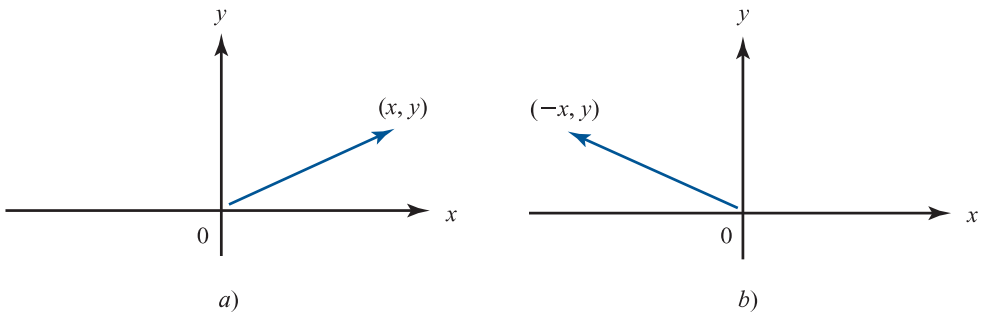


Figura 5.2
El vector $(-x, y)$ es la reflexión respecto al eje y del vector (x, y).

EJEMPLO 7 Transformación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por la multiplicación por una matriz de $m \times n$

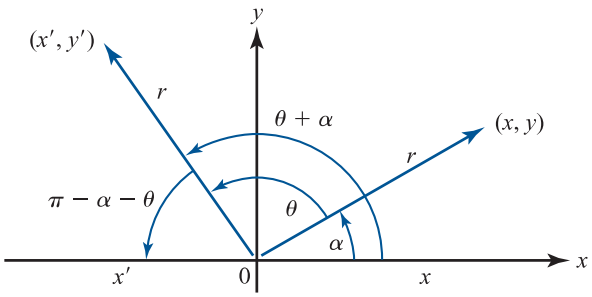
Sea A una matriz de $m \times n$ y defina $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Como $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ y $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x}$ si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$, se observa que T es una transformación lineal. Entonces: *toda matriz A de $m \times n$ se puede utilizar para definir una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$*. En la sección 5.3 se verá que se cumple el converso: *toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar por una matriz.*

EJEMPLO 8 Transformación de rotación

Suponga que el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en el plano xy se rota un ángulo θ (medido en grados o radianes) en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Llame a este nuevo vector rotado $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Entonces, como se ve en la figura 5.3, si r denota la longitud de $\mathbf{v}$ (que no cambia por la rotación),

$$x = r\cos\alpha \qquad y = r\,\text{sen}\,\alpha$$
$$x' = r\cos(\theta + \alpha) \qquad y' = r\,\text{sen}\,(\theta + \alpha)^{\dagger}$$



Pero $r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\alpha$, de manera que

$$x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

† Esto se deduce de la definición estándar de cos θ y sen θ como las coordenadas x y y de un punto en el círculo unitario. Si (x, y) es un punto en el círculo de radio r con centro en el origen, entonces $x = r\cos\varphi$ y $y = r\,\text{sen}\,\varphi$, donde φ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el lado positivo del eje x.

De manera similar, $r \operatorname{sen}(\theta + \alpha) = r \operatorname{sen}\theta \cos\alpha + r \cos\theta \operatorname{sen}\alpha$, o sea

$$y' = x \operatorname{sen}\theta + y \cos\theta \tag{4}$$

Sea

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

Entonces de (3) y (4), se ve que $A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. La transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T\mathbf{v} = A_\theta \mathbf{v}$, donde A_θ está dado por (5), se llama **transformación de rotación**.

EJEMPLO 9 Transformación de proyección ortogonal

Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$. La **transformación de proyección ortogonal** P: $V \to H$ se define por

$$P\mathbf{v} = \text{proy}_H \mathbf{v} \tag{6}$$

Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para H. Entonces de la definición 4.9.4, se tiene

$$P\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k \tag{7}$$

Como $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}$ y $(\alpha\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})$, se ve que P es una transformación lineal.

EJEMPLO 10 Dos operadores de proyección

Se define $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. Entonces T es el operador de proyección que toma un vector en el espacio de tres dimensiones y lo proyecta sobre el plano xy. De manera similar, $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ proyecta un vector en el espacio sobre el plano xz. Estas dos transformaciones se describen en la figura 5.4.

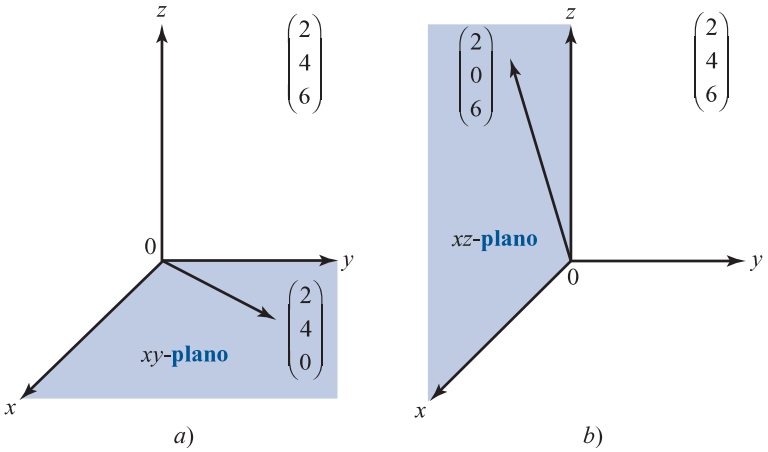


Figura 5.4

b) Proyección sobre el plano *xz*: $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 11 **Operador de transposición**

Defina T: $M_{mn} \to M_{nm}$ por $T(A) = A^t$. Como $(A + B)^t = A^t + B^t$ y $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, se ve que T, denominado **operador de transposición**, es una transformación lineal.

EJEMPLO 12 **Operador integral**

CÁLCULO

Sea J: $C[0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $Jf = \int_0^1 f(x)\,dx$. Como $\int_0^1 [f(x) + g(x)]dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)\,dx$ y $\int_0^1 \alpha f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(x)\,dx$ **si** f y g son continuas, se ve que J es lineal. Por ejemplo, $J(x^3) = \frac{1}{4}$. J se denomina **operador integral**.

EJEMPLO 13 **Operador diferencial**

CÁLCULO

Suponga que D: $C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ se define por $Df = f'$. Como $(f + g)' = f' + g'$ y $(\alpha f)' = \alpha f'$ si f y g son diferenciables, se ve que D es lineal. D se denomina **operador diferencial**.

ADVERTENCIA

No toda transformación que parece lineal lo es en realidad. Por ejemplo, defina T: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $Tx = 2x + 3$. Entonces la gráfica de $\{(x, Tx)\colon x \in \mathbb{R}\}$ es una línea recta en el plano xy; pero T no es lineal porque $T(x + y) = 2(x + y) + 3 = 2x + 2y + 3$ y $Tx + Ty = (2x + 3) + (2y + 3) = 2x + 2y + 6$. Las únicas transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son funciones de la forma $f(x) = mx$ para algún número real m. Así, entre todas las funciones cuyas gráficas son rectas, las únicas que son lineales son aquellas que pasan por el origen. En álgebra y cálculo una **función lineal** con dominio $\mathbb{R}$ está definida como una función que tiene la *forma* $f(x) = mx + b$. Así, se puede decir que una función lineal es una transformación de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ si y sólo si b (la ordenada al origen) es cero.

EJEMPLO 14 **Una transformación que no es lineal**

Suponga que T: $C[0, 1] \to \mathbb{R}$ está definida por $Tf = f(0) + 1$. Entonces T no es lineal. Para ver esto se calcula

$$T(f + g) = (f + g) + 1 = f(0) + g(0) + 1$$
$$Tf + Tg = [f(0) + 1] + [g(0) + 1] = f(0) + g(0) + 2$$

Esto proporciona otro ejemplo de una transformación que puede parecer lineal pero que, de hecho, no lo es.

AUTOEVALUACIÓN

Falso-verdadero

I. **Si T es una transformación lineal, entonces $T(3x) = 3Tx$.**

II. **Si T es una transformación lineal, entonces $T(x + y) = Tx + Ty$.**

III. **Si T es una transformación lineal, entonces $T(xy) = TxTy$.**

IV. **Si A es una matriz de 4×5, entonces $Tx = Ax$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$.**

V. **Si A es una matriz de 4×5, entonces $Tx = Ax$ es una transformación lineal de $\mathbb{R}^5$ en $\mathbb{R}^4$.**

Desarrollo de competencias 5.1

De los problemas 1 al 38 determine si la transformación de V en W dada es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

6. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$

7. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix}$

8. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

9. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$

10. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

11. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$

12. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$

13. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

14. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 \end{vmatrix}$

15. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n;\ T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$

16. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

17. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xz \\ yw \end{pmatrix}$

18. $T: M_{nn} \to M_{nn};\ T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times n$

19. $T: M_{nn} \to M_{nn};\ T(A) = A^tA$

20. $T: M_{mn} \to M_{mp};\ T(A) = AB$, donde B es una matriz fija de $n \times p$

21. $T: M_{mn} \to M_{qn};\ T(A) = BA$, donde B es una matriz fija de $q \times m$

22. $T: D_n \to D_n;\ T(D) = D^2$ (D_n es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$)

23. $T: D_n \to D_n;\ T(D) = I + D$

24. $T: P_2 \to P_1;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x$

25. $T: P_2 \to P_1;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x$

26. $T\colon \mathbb{R}^3 \to P_3$; $T(a\ \ b\ \ c) = (a + b) + (c + d)x^3$

27. $T\colon \mathbb{R} \to P_n$; $T(a) = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$

28. $T\colon P_2 \to P_4$; $T(p(x)) = [p(x)]^2$

29. $T\colon P_2 \to P_4$; $T(p(x)) = p(x) + [p(x)]^2$

30. $T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = f^2(x)$

31. $T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = f(x) + 1$

32. $T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = xf(x)$

33. $T\colon C[0, 1] \to \mathbb{R}$; $Tf = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$, donde g es una función fija en $C[0, 1]$

34. $T\colon C^1[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf = (fg)'$, donde g es una función fija en $C^1[0, 1]$

35. $T\colon C[0, 1] \to C[1, 2]$; $Tf(x) = f(x - 1)$

36. $T\colon C[0, 1] \to \mathbb{R}$; $Tf = f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

37. $T\colon C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = f(1) + f(2)$

38. $T\colon M_{nn} \to \mathbb{R}$; $T(A) = \det A$

39. Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-x, -y)$. Describa T geométricamente.

40. Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$. Encuentre:

a) $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ y ***b)*** $T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$.

41. En el ejemplo 8:

a) Encuentre la matriz de rotación A_θ cuando $\theta = \pi/6$.

b) ¿Qué le ocurre al vector $\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ si se le rota un ángulo de $\pi/6$ en la dirección contraria a las manecillas del reloj?

42. Sea $A_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Describa geométricamente la transformación lineal T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\mathbf{x} = A_\theta\mathbf{x}$.

43. Conteste las preguntas del problema 42 para $A_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta\\ 0 & 1 & 0\\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta\end{pmatrix}$.

44. Suponga que en un espacio vectorial real V, T satisface $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$ y $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x}$ para $\alpha \geq 0$. Demuestre que T es lineal.

45. Encuentre una transformación lineal $T\colon M_{33} \to M_{22}$.

46. Si T es una transformación lineal de V en W, demuestre que $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T\mathbf{x} - T\mathbf{y}$.

47. Si T es una transformación lineal de V en W, demuestre que $T\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$. ¿Son estos dos vectores cero el mismo?

48. Sea V un espacio con producto interno y sea $\mathbf{u}_0 \in V$ fijo. Suponga que T: $V \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) está definido por $T\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_0)$. Demuestre que T es lineal.

***49.** Demuestre que si V es un espacio vectorial complejo con producto interno y T: $V \to \mathbb{C}$ está definido por $T\mathbf{v} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})$ para un vector fijo $\mathbf{u}_0 \in V$, entonces T no es lineal.

50. Sea V un espacio con producto interno con el subespacio de dimensión finita H. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base para H. Demuestre que T: $V \to H$ definida por $T\mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k$ es una transformación lineal.

51. Sean V y W dos espacios vectoriales. Denote por $L(V, W)$ el conjunto de transformaciones lineales de V en W. Si T_1 y T_2 están en $L(V, W)$, defina αT_1 y $T_1 + T_2$ por $(\alpha T_1)\mathbf{v} = \alpha(T_1\mathbf{v})$ y $(T_1 + T_2)\mathbf{v} = T_1\mathbf{v} + T_2\mathbf{v}$. Pruebe que $L(V, W)$ es un espacio vectorial.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. V II. V III. F IV. F V. V

5.2 PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES: IMAGEN Y NÚCLEO

En esta sección se desarrollan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales.

TEOREMA 1

Sea T: $V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

i) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

iii) $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

Nota. En la parte *i*) el $\mathbf{0}$ de la izquierda es el vector cero en V; mientras que el $\mathbf{0}$ de la derecha es el vector cero en W.

DEMOSTRACIÓN

i) $T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$. Así,

$$\mathbf{0} = T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0}) - T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0})$$

ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T[\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + T[(-1)\mathbf{v}] = T\mathbf{u} + (-1)T\mathbf{v} = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$.

iii) Esta parte se prueba por inducción (vea el apéndice 1). Para $n = 2$ se tiene $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1) + T(\alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2$. Así, la ecuación (1) se cumple para $n = 2$. Se supone que se cumple para $n = k$ y se prueba para $n = k + 1$: $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k + \alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}) = T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k) + T(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1})$, y usando la ecuación en la parte *iii*) para $n = k$, esto es igual a $(\alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_k T\mathbf{v}_k) + \alpha_{k+1} T\mathbf{v}_{k+1}$, que es lo que se quería demostrar. Esto completa la prueba.

Observación. Los incisos *i*) y *ii*) del teorema 1 son casos especiales del inciso *iii*).

Un dato importante sobre las transformaciones lineales es que están completamente determinadas por el efecto sobre los vectores de la base.

TEOREMA 2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ vectores en W. Suponga que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W tales que $T_1\mathbf{v}_i = T_2\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$; es decir $T_1 = T_2$.

DEMOSTRACIÓN

Como B es una base para V, existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. Entonces, del inciso *iii*) del teorema 1,

$$T_1\mathbf{v} = T_1(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1T_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2T_1\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_nT_n\mathbf{v}_n$$
$$= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n$$

De manera similar

$$T_2\mathbf{v} = T_2(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1T_2\mathbf{v}_1 + \alpha_2T_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_nT_n\mathbf{v}_n$$
$$= \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n$$

Por lo tanto, $T_1\mathbf{v} = T_2\mathbf{v}$.

El teorema 2 indica que si $T: V \to W$ y V tiene dimensión finita, entonces sólo es necesario conocer el efecto que tiene T sobre los vectores de la base en V. Esto es, si se conoce la imagen de cada vector básico, se puede determinar la imagen de cualquier vector en V. Esto determina T por completo. Para ver esto, sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base en V y sea $\mathbf{v}$ otro vector en V. Entonces, igual que en la prueba del teorema 2,

$$T\mathbf{v} = \alpha_1T\mathbf{v}_1 + \alpha_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_nT\mathbf{v}_n$$

Así, se puede calcular $T\mathbf{v}$ para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ si se conocen $T\mathbf{v}_1, T\mathbf{v}_2, \ldots, T\mathbf{v}_n$.

EJEMPLO 1 **Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector**

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ y suponga que $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$. Calcule $T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$.

Solución Se tiene $\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix} = 3T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}25\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}35\\-22\end{pmatrix}$$

Surge otra pregunta: si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ son n vectores en W, ¿existe una transformación lineal T tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$? La respuesta es sí, como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \to W$ tal que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

DEMOSTRACIÓN

Se define la función T como sigue:

i) $T\mathbf{v}_i = \mathbf{w}_i$

ii) Si $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$T\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n \qquad (1)$$

Como B es una base para V, T está definida para todo $\mathbf{v} \in V$; y como W es un espacio vectorial, $T\mathbf{v} \in W$. Entonces sólo falta demostrar que T es lineal; lo que se deduce directamente de la ecuación (1). Si $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, y $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{v}_n$, entonces:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T[(\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{v}_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{w}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\mathbf{w}_n \\ &= (\alpha_1\mathbf{w}_1 + \alpha_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{w}_n) + (\beta_1\mathbf{w}_1 + \beta_2\mathbf{w}_2 + \cdots + \beta_n\mathbf{w}_n) \\ &= T\mathbf{u} + T\mathbf{v} \end{aligned}$$

De manera similar, $T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$, así que T es lineal. La unicidad de T se obtiene del teorema 2 y la prueba queda completa.

Observación. En los teoremas 2 y 3 los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ no tienen que ser independientes y, de hecho, ni siquiera tienen que ser distintos. Más aún, se hace hincapié en que los teoremas se cumplen si V es cualquier espacio vectorial de dimensión finita, no sólo $\mathbb{R}^n$. Observe también que la dimensión de W no tiene que ser finita.

EJEMPLO 2 **Definición de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en un subespacio de $\mathbb{R}^3$**

Encuentre una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en el plano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \; 2x - y + 3z = 0 \right\}$$

Solución Del ejemplo 4.6.3, se sabe que W es un subespacio de dos dimensiones de $\mathbb{R}^3$ con vectores básicos $\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Utilizando la base estándar en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se define la transformación lineal T por $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Entonces, como lo muestra el análisis que sigue al teorema 2, T está completamente determinada. Por ejemplo,

$$T\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}=T\left[5\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]=5T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-7T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-7\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-11\\-7\end{pmatrix}$$

De manera más general,

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\2x+3y\\y\end{pmatrix}$$

Ahora se darán dos definiciones importantes en la teoría de transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 1 **Núcleo e imagen de una transformación lineal**

Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T\colon V \to W$ una transformación lineal. Entonces

i) El **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

$$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V\colon T\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \tag{2}$$

ii) La **imagen** de T, denotado por Im T, está dado por

$$\text{Im T} = \{\mathbf{w} \in W\colon \mathbf{w} = T\mathbf{v} \text{ para alguna } \mathbf{v} \in V\} \tag{3}$$

Observación 1. Observe que nu T es no vacío porque, de acuerdo al teorema 1, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ de manera que $\mathbf{0} \in$ nu T para cualquier transformación lineal T. Se tiene interés en encontrar otros vectores en V que "se transformen en 0". De nuevo, observe que cuando escribimos $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, el $\mathbf{0}$ de la izquierda está en V y el de la derecha en W.

Observación 2. La imagen de T es simplemente el conjunto de "imágenes" de los vectores en V bajo la transformación T. De hecho, si $\mathbf{w} = T\mathbf{v}$, se dice que $\mathbf{w}$ es la **imagen** de $\mathbf{v}$ bajo T.

IMAGEN

Antes de dar ejemplos de núcleos e imágenes, se demostrará un teorema de gran utilidad.

TEOREMA 4

Si $T\colon V \to W$ es una transformación lineal, entonces

i) nu T es un subespacio de V.

ii) Im T es un subespacio de W.

DEMOSTRACIÓN

i) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en nu T; entonces $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{x} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ de forma que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $\alpha\mathbf{u}$ están en nu T.

ii) Sean $\mathbf{w}$ y $\mathbf{x}$ en Im T. Entonces $\mathbf{w} = T\mathbf{u}$ y $\mathbf{x} = T\mathbf{v}$ para dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V. Esto significa que $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{x}$ y $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T\mathbf{u} = \alpha\mathbf{w}$. Por lo tanto, $\mathbf{w} + \mathbf{x}$ y $\alpha\mathbf{w}$ están en Im T.

EJEMPLO 3 Núcleo e imagen de la transformación cero

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación cero). Entonces nu $T = V$ e Im T $= \{\mathbf{0}\}$.

EJEMPLO 4 Núcleo e imagen de la transformación identidad

Sea $T\mathbf{v} = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ (T es la transformación identidad). Entonces nu $T = \{\mathbf{0}\}$ e Im T $= V$.

Las transformaciones cero e identidad proporcionan dos extremos. En la primera todo se encuentra en el núcleo. En la segunda sólo el vector cero se encuentra en el núcleo. Los casos intermedios son más interesantes.

EJEMPLO 5 Núcleo e imagen de un operador de proyección

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esto es (vea el ejemplo 5.1.10), T es el operador de proyección de $\mathbb{R}^3$ en el plano xy.

Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces $x = y = 0$. Así, nu $T = \{(x, y, z): x = y = 0, z \in \mathbb{R}\}$, es decir, el eje z, e Im T $= \{(x, y, z): z = 0\}$, es decir, el plano xy. Observe que dim nu $T = 1$ y dim Im T $= 2$.

DEFINICIÓN 2 Nulidad y rango de una transformación lineal

Si T es una transformación lineal de V en W, entonces se define

Nulidad de $T = \nu(T)$ dim nu T	**(4)**
Rango de $T = \rho(T) =$ dim Im T	**(5)**

Observación. En la sección 4.7 se definieron el rango, la imagen, el espacio nulo y la nulidad de una matriz. Según el ejemplo 5.1.7, toda matriz A de $m \times n$ da lugar a una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$. Es evidente que nu $T = N_A$, Im T $=$ Im $A = C_A$, $\nu(T) = \nu(A)$ y $\rho(T) = \rho(A)$. Entonces se ve que las definiciones de núcleo, imagen, nulidad y rango de una transformación lineal son extensiones del espacio nulo, la imagen, la nulidad y el rango de una matriz.

EJEMPLO 6 Núcleo e imagen de un operador traspuesto

Sea $V = M_{mn}$ y defina $T: M_{mn} \to M_{nm}$ por $T(A) = A^t$ (vea el ejemplo 5.1.11). Si $TA = A^t = 0$, entonces A^t es la matriz cero de $n \times m$ por lo que A es la matriz cero de $m \times n$. Así, nu $T = \{\mathbf{0}\}$ y es claro que Im $T = M_{nm}$. Esto significa que $\nu(T) = 0$ y $\rho(T) = nm$.

EJEMPLO 7 Núcleo e imagen de una transformación de P_3 en P_2

Defina $T: P_3 \to P_2$ por $T(p) = T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Entonces si $T(p) = 0$, $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ para toda x, lo que implica que $a_0 = a_1 = ca_2 = 0$. Así nu $T = \{\mathbf{p} \in P_3: p(x) = a_3x^3\}$ e Im T $= P_2$, $\nu(T) = 1$ y $\rho(T) = 3$.

EJEMPLO 8 Núcleo e imagen de un operador integral

CÁLCULO

Sea $V = C[0, 1]$ y defina J: $C[0, 1]$: $\to \mathbb{R}$ por $Jf = \int_0^1 f(x)\,dx$ (vea el ejemplo 5.1.12). Entonces nu $J = \{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$. Sea α un número real. Entonces la función constante $f(x) = \alpha$ para $x \in [0, 1]$: está en $C[0, 1]$ y $\int_0^1 \alpha\,dx = \alpha$. Como esto se cumple para todo número real α, se tiene que Im $J = \mathbb{R}$.

En la siguiente sección se verá que toda transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita en otro se puede representar por una matriz, lo que permitirá calcular el núcleo y la imagen de cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita encontrando el espacio nulo y la imagen de la matriz correspondiente.

AUTOEVALUACIÓN

De los siguientes enunciados, indique si son verdaderos o falsos.

I. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. En ocasiones es posible encontrar tres vectores diferentes $\mathbf{v}_1 \in V$, $\mathbf{v}_2 \in V$ y $\mathbf{w} \in W$ tales que $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}$.

II. Si $T\mathbf{v}_1 = T\mathbf{v}_2$ como en el problema 1, entonces $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in$ nu T.

III. Si T es una transformación lineal de $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$, entonces la imagen de T es $\mathbf{w}$.

IV. Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base para $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ una base para P_{n-1}. Entonces existen dos transformaciones lineales S y T tales que $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1$ y $S\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

V. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces T es la transformación cero.

VI. Existe una transformación lineal T de $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con $\rho(T) = \nu(T)$.

VII. Suponga que $T: M_{22} \to M_{22}$ con $\rho(T) = 4$. Si $TA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Desarrollo de competencias 5.2

De los problemas 1 al 13 encuentre núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ -2x \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$

5. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

6. $T: M_{22} \to M_{22};\ T(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. $T: \mathbb{R} \to P_3;\ T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

8. $T: \mathbb{R}^2 \to P_3;\ T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$

***9.** $T: M_{nn} \to M_{nn};\ T(A) = A^t + A$

CÁLCULO **10.** $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1];\ Tf = f'$

11. $T: C^2[0, 1] \to C[0, 1];\ Tf = f''$

12. $T: C[0, 1]: \to \mathbb{R};\ Tf = f\left(\frac{1}{2}\right)$

13. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; T es una rotación de $\pi/3$

14. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y suponga que $T\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es la transformación cero.

15. En el problema 14 suponga que $W = V$ y $T\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre que T es el operador identidad.

16. Sea $T: V \to \mathbb{R}^3$. Demuestre que Im T es cualquiera de las siguientes: *a*) $\{\mathbf{0}\}$; *b*) una recta que pasa por el origen; *c*) un plano que pasa por el origen; *d*) $\mathbb{R}^3$.

17. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to V$. Demuestre que nu T es uno de los cuatro espacios enumerados en el problema 16.

18. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$.

19. Encuentre todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que llevan a la recta $y = ax$ a la recta $y = bx$.

20. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{nu } T = \{(x, y, z): 2x - y + z = 0\}.$$

21. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\text{Im T} = \{(x, y, z): 2x - 2y + z = 0\}.$$

22. Defina $T: M_{nn} \to M_{nn}$ por $TA = A - A^t$. Demuestre que nu $T = \{$matrices simétricas de $n \times n\}$ e Im $T = \{$matrices antisimétricas de $n \times n\}$.

* CÁLCULO **23.** Defina $T: C^1[0, 1] \to C[0, 1]$ por $Tf(x) = xf'(x)$. Encuentre el núcleo y la imagen de T.

***24.** En el problema 5.1.51 se le pidió que demostrara que un conjunto de transformaciones lineales de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, denotadas por $L(V, W)$ es un espacio vectorial. Suponga que dim $V = n < \infty$ y dim $W = m < \infty$. Encuentre dim $L(V, W)$.

25. Sea H un subespacio de V donde dim $H = k$ y dim $V = n$. Sea U el subconjunto de $L(V, V)$ que tiene la propiedad de que si $T \in U$, entonces $T\mathbf{h} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{h} \in H$.

a) Demuestre que U es un subespacio de $L(V, V)$.
b) Encuentre dim U.

***26.** Sean S y T en $L(V, V)$ tales que ST es la transformación cero. Demuestre o contradiga que TS es la transformación cero.

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. V II. V III. F IV. F
V. F VI. F VII. V

5.3 REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Si A es una matriz de $m \times n$ y $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está definida por $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, entonces, como se observó en el ejemplo 5.1.7, T es una transformación lineal. Ahora se verá que para *toda* transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ existe una matriz A de $m \times n$ tal que $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Este hecho es de gran utilidad. Como se mencionó en la sección anterior, si $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, entonces nu $T = N_A$ e Im $T = R_A$. Más aún, $\nu(T) = \dim \text{nu } T = \nu(A)$ y $\rho(T) = \dim \text{Im } T = \rho(A)$. Así se puede determinar el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de una transformación lineal de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determinando el espacio nulo y la imagen de la matriz correspondiente. Adicionalmente, una vez que se sabe que $T\mathbf{x} = A\mathbf{x}$, se puede evaluar $T\mathbf{x}$ para cualquier $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ mediante una simple multiplicación de matrices.

Pero esto no es todo. Como se verá, cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar mediante una matriz.

TEOREMA 1

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Existe entonces una matriz única de $m \times n$, A_T tal que

$$T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{w}_1 = T\mathbf{e}_1, \mathbf{w}_2 = T\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{w}_n = T\mathbf{e}_n$. Sea A_T la matriz cuyas columnas son $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ y hagamos que A_T denote también a la transformación de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, que multiplica un vector en $\mathbb{R}^n$ por A_T. Si

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

entonces

$$A_T\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ésima posición} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_i$$

De esta forma, $A_T\mathbf{e}_i = \mathbf{w}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. De acuerdo al teorema 5.2.2, T y la transformación A_T son la misma porque coinciden en los vectores básicos.

Ahora se puede demostrar que A_T es única. Suponga que $T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x}$ y que $T\mathbf{x} = B_T\mathbf{x}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Entonces $A_T\mathbf{x} = B_T\mathbf{x}$, o estableciendo $C_T = A_T - B_T$, se tiene que $C_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. En particular, $C_T\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Pero como se deduce de la demostración de la primera parte del teorema, $C_T\mathbf{e}_i$ es la columna i de C_T. Así, cada una de las n columnas de C_T es el m-vector cero, la matriz cero de $m \times n$. Esto muestra que $A_T = B_T$ y el teorema queda demostrado.

Observación 1. En este teorema se supone que todo vector en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ está expresado en términos de los vectores de la base estándar en esos espacios. Si se eligen otras bases para $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, por supuesto, se obtendrá una matriz A_T diferente. Para ilustrar este caso, vea el ejemplo 4.8.1 o más adelante, el ejemplo 8.

Observación 2. La demostración del teorema muestra que es sencillo obtener A_T como la matriz cuyas columnas son los vectores $T\mathbf{e}_i$.

DEFINICIÓN 1 **Matriz de transformación**

La matriz A_T en el teorema 1 se denomina **matriz de transformación** correspondiente a T o **representación matricial** de T.

Nota. La matriz de transformación A_T está definida usando las bases estándar tanto en $\mathbb{R}^n$ como en $\mathbb{R}^m$. Si se utilizan otras bases, se obtendrá una matriz de transformación diferente. Vea el teorema 3 de esta sección.

En la sección 5.2 se definieron la imagen, el rango, el núcleo y la nulidad de una transformación lineal. En la sección 4.7 se definieron la imagen, el rango, el espacio nulo y la nulidad de una matriz. La prueba del siguiente teorema es consecuencia del teorema 1 y se deja como ejercicio (vea el problema 44 de esta sección).

TEOREMA 2

Sea A_T la matriz de transformación correspondiente a la transformación lineal T. Entonces

i) $\text{Im T} = \text{Im } A = C_{AT}$
ii) $\rho(T) = \rho(A_T)$
iii) $\text{nu } T = N_{A_T}$
iv) $\nu(T) = \nu(A_T)$

EJEMPLO 1 **Representación matricial de una transformación de proyección**

Encuentre la matriz de transformación A_T correspondiente a la proyección de un vector en $\mathbb{R}^3$ sobre el plano xy.

Solución Aquí $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. En particular, $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así,

$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que $A_T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

EJEMPLO 2 Representación matricial de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$

Defina $T: \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$

Encuentre A_T, nu T, Im T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Solución $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Así $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Observe (a manera de verificación) que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$$

Ahora se calculan el núcleo y la imagen de A. La forma escalonada por renglones de

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta forma tiene tres pivotes, de manera que

ya que $\rho(A) + \nu(A) = 3$

$$\rho(A) = 3 \quad \text{y} \quad \nu(A) = 3 - 3 = 0$$

Esto significa que nu $T = \{\mathbf{0}\}$, Im T = gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, $\nu(T) = 0$ y $\rho(T) = 3$.

EJEMPLO 3 Representación matricial de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$

Defina $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 4x - 2y + 6z \\ -6x + 3y - 9z \end{pmatrix}$. Encuentre A_T, nu T, Im T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Solución Como $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ se tiene

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

teorema 2 *ii*)

Del ejemplo 4.7.4, se ve que $\rho(A) = \rho(T) = 1$ e Im T $= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}\right\}$.

Entonces $\nu(T) = 2$.

teorema 2 *iii*)

Para encontrar $N_A = \text{nu } T$, se reduce por renglones para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esto significa que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in N_A$ si $2x - y + 3z = 0$, o sea, $y = 2x + 3z$. Estableciendo primero $x = 1, z = 0$ y después $x = 0, z = 1$, se obtiene una base para N_A:

$$\text{nu } T = N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

EJEMPLO 4 **Representación matricial de una transformación cero**

Es fácil verificar que si T es la transformación cero de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces A_T es la matriz cero de $m \times n$. De igual manera, si T es la transformación identidad de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces $A_T = I_n$.

EJEMPLO 5 **Representación matricial de una transformación cero**

Se vio en el ejemplo 5.1.8, que si T es la función que rota a todo vector en $\mathbb{R}^2$ un ángulo θ, entonces $A_T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Ahora se generalizará el concepto de representación matricial a espacios arbitrarios de dimensión finita.

TEOREMA 3

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, W un espacio vectorial de dimensión m y T: $V \to W$ una transformación lineal. Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y sea $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base para W. Entonces existe una matriz única A_T de $m \times n$ tal que

$$(T\mathbf{x})_{B2} = A_T(\mathbf{x})_{B1} \qquad (2)$$

Observación 1. La notación (2) es la notación de la sección 4.8. Si $\mathbf{x} \in V = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, entonces $(\mathrm{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. Sea $\mathrm{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, entonces $A_T\mathrm{c}$ es un m-vector que se denotará por $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$. La ecuación (2) dice que $(T\mathrm{x})_{B_2} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_m \end{pmatrix}$, es decir

$$T\mathbf{x} = d_1\mathbf{w}_1 + d_2\mathbf{w}_2 + \cdots + d_m\mathbf{w}_m.$$

Observación 2. Como en el teorema 1, la unicidad de A_T es relativa a las bases B_1 y B_2. Si se cambian las bases A_T cambia (vea los ejemplos 8 y 9, y el teorema 5). Si se usan las bases estándar, entonces esta A_T es la A_T de la definición 1.

DEMOSTRACIÓN

Sean $T\mathbf{v}_1 = \mathbf{y}_1$, $T\mathbf{v}_2 = \mathbf{y}_2$, $T\mathbf{v}_n = \mathbf{y}_n$. Como $\mathbf{y}_1 \in W$, se tiene que para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\mathbf{y}_1 = a_{1i}\mathbf{w}_1 + a_{2i}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{mi}\mathbf{w}_m,$$

Para algún conjunto (único) de escalares $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{\mathrm{m}i}$ y se escribe

$$(\mathrm{y}_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ (\mathrm{y}_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, (\mathrm{y}_n)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto significa, por ejemplo, que $\mathbf{y}_1 = a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{w}_m$. Ahora se define

$$A_T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Como

$$(\mathrm{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ (\mathrm{v}_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ (\mathrm{v}_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

se tiene, como en la prueba del teorema 1,

$$A_T(\mathrm{v}_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = (\mathrm{y}_i)_{B_2}$$

i-ésima posición

Si $\mathbf{x}$ está en V, entonces

$$(\mathrm{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

y

$$A_T(\mathrm{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + \cdots + & a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + \cdots + & a_{2n}c_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}c_1 & + & a_{m2}c_2 & + \cdots + & a_{mn}c_n \end{pmatrix}$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= c_1(\mathbf{y}_1)_{B_2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B_2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B_2}$$

De manera similar, $T\mathbf{x} = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T\mathbf{v}_1 + c_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + c_nT\mathbf{v}_n = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}\mathbf{y}_n$, de manera que $T(\mathbf{x})_{B2} = (c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}\mathbf{y}_n)_{B2} = c_1(\mathbf{y}_1)_{B2} + c_2(\mathbf{y}_2)_{B2} + \cdots + c_n(\mathbf{y}_n)_{B2} = A_T(\mathbf{x})_{B1}$. Así, $T(\mathbf{x})_{B2} = A_T(\mathbf{x})_{B1}$. La prueba de la unicidad es exactamente igual que la prueba de unicidad en el teorema 1.

El siguiente resultado es consecuencia del teorema 4.7.7, y generaliza el teorema 2. Su demostración se deja como ejercicio (vea el problema 45 de esta sección).

TEOREMA 4

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea A_T una representación matricial de T respecto a las bases B_1 en V y B_2 en W. Entonces

i) $\rho(T) = \rho(A_T)$ **ii)** $\nu(A) = \nu(A_T)$ **iii)** $\nu(A) + \rho(T) = n$

Nota. *i)* y *ii)* implican que $\rho(A_T)$ y $\nu(A_T)$ son independientes de las bases B_1 y B_2.

EJEMPLO 6 **Representación matricial de una transformación de P_2 en P_3**

Defina $T: P_2 \to P_3$ por $(Tp)(x) = xp(x)$. Encuentre A_T y úsela para determinar el núcleo y la imagen de T.

Solución Utilizando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2\}$ en P_2 y $B_2 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en P_3, se tiene

$$(T(1))_{B_2} = (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (T(x))_{B_2} = (x^2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } (T(x^2))_{B_2} = (x^3)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Así, } A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que $\rho(A) = 3$ y que una base para R_A es $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Por lo tanto, Im T = gen $\{x, x^2, x^3\}$. Como $\nu(A) = 3 - \rho(A) = 0$, se ve que nu $T = \{\mathbf{0}\}$.

EJEMPLO 7 **Representación matricial de una transformación de P_3 en P_2**

Defina $T: P_3 \to P_2$ por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + a_2x^2$. Calcule A_T y utilícela para encontrar el núcleo y la imagen de T.

Solución Utilizando las bases estándar $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ en P_3 y $B_2 = \{1, x, x^2\}$ en P_3, de inmediato se ve que $(T(1))_{B_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $(T(x))_{B_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $(T(x^2))_{B_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ y $(T(x^3))_{B_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, por lo que $A_T = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. Es obvio que $\rho(A) = 2$ y una base para R_A es $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ de manera que Im T = gen $\{1, x^2\}$. Entonces, $\nu(A) = 4 - 2 = 2$, y si $A_T\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, entonces $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$. Por lo tanto a_0 y a_3 son arbitrarios y $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es una base para N_A de manera que $\{1, x^3\}$ es una base para nu T.

En todos los ejemplos de esta sección se ha obtenido la matriz A_T utilizando la base estándar en cada espacio vectorial. Sin embargo, el teorema 3 se cumple para cualesquiera bases en V y W. El siguiente ejemplo ilustra esto.

EJEMPLO 8 **Representación matricial relativa a dos bases no estándar en $\mathbb{R}^2$**

Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x-y\end{pmatrix}$. Usando las bases $B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$ calcule A_T.

Solución Se tiene $T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, se encuentra que $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$. De manera similiar $\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix} = 17\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ por lo que $\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix}17\\6\end{pmatrix}$. Así $A_T = \begin{pmatrix}-6&17\\-2&6\end{pmatrix}$. Para calcular, por ejemplo, $T\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$ primero se escribe $\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix} = -13\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, de manera que $\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix}-13\\-3\end{pmatrix}$. Entonces $\left(T\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}\right)_{B_2} = A_T\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}_{B_1} = A_T\begin{pmatrix}-13\\-3\end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -13 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 8 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = 27\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$.

Observe que $T\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+7 \\ -4-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}$, lo que verifica los cálculos.

Para evitar confusión, a menos que se establezca de forma explícita algo distinto, siempre se calculará la matriz A_T respecto a la base canónica.[†] Si $T: V \to V$ es una transformación lineal y se utiliza alguna otra base B, entonces se hará referencia a A_T como *la matriz de transformación de T respecto a la base B*. Así en el último ejemplo, $A_T = \begin{pmatrix} -6 & 17 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, es la matriz de transformación de T respecto a la base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Antes de terminar esta sección, debe responderse una pregunta obvia. ¿Para qué molestarse en utilizar otra base que no sea la estándar cuando los cálculos son, como en el ejemplo 8, bastante más complicados? La respuesta es que con frecuencia es posible encontrar una base B^* en $\mathbb{R}^n$ para la que la matriz de transformación respecto a B^* es una matriz diagonal. Es muy sencillo trabajar con matrices diagonales, como se verá en el capítulo 6, y existen muchas ventajas al escribir una matriz en forma diagonal.

EJEMPLO 9 **La representación matricial de una transformación lineal respecto a dos bases no estándar en $\mathbb{R}^2$ puede ser diagonal**

Defina $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 10y \\ -15x - 13y \end{pmatrix}$. Encuentre A_T respecto a las bases $B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}$. Entonces $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, así $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. De manera similar, $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, así $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $A_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Existe otra forma de resolver este problema. Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ se expresan en términos de la base estándar $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Esto es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz cuyas primera y segunda columnas representan las expansiones de los vectores en B_1 en términos de la base estándar. A partir del procedimiento descrito en la sección 4.8, la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de S a B_1. De manera similar, la matriz de A es la matriz de transición de B_1 a S (vea el problema 4.8.44). Ahora suponga que $\mathbf{x}$ está expresada en términos de B_1. Entonces $A\mathbf{x}$ es el mismo vector

[†] Esto es, en cualquier espacio en el que haya definido la base estándar.

ahora escrito en términos de S. Sea $C = \begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}$. Entonces $CA\mathbf{x} = T(A\mathbf{x})$ es la imagen de $A\mathbf{x}$ escrita en términos de S. Por último, como se busca $T(A\mathbf{x})$ en términos de B_1 (ése era el problema), se premultiplica por la matriz de transición A^{-1} para obtener $(T\mathbf{x})_{B1} = (A^{-1}CA)(\mathbf{x})_{B1}$. Es decir,

$$A_T = A^{-1}CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -15 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

como antes. Este resultado se resume a continuación.

TEOREMA 5

Sea $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Suponga que C es la matriz de transformación de T respecto a las bases estándar S_n y S_m en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Sea A_1 la matriz de transición de B_1 a la base S_n en $\mathbb{R}^n$ y sea A_1 la matriz de transición de B_2 a la base S_m en $\mathbb{R}^m$. Si A_T denota la matriz de transformación de T respecto a las bases B_1 y B_2, entonces

$$A_T = A_2^{-1}CA_1 \qquad (3)$$

En el ejemplo 9 se vio que al observar la transformación lineal T respecto a la nueva base, la matriz de transformación A_T resulta ser una matriz diagonal. Se puede ver a este procedimiento de "diagonalización" en el apéndice A. Se observará que dada una transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, con frecuencia es posible encontrar una base B tal que la matriz de transformación de T respecto a B es diagonal.

GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES DE $\mathbb{R}^2$ EN $\mathbb{R}^2$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con representación matricial A_T. Ahora se demostrará que si A_T es invertible, entonces T se puede escribir como una sucesión de una o más transformaciones especiales, denominadas **expansiones**, **compresiones**, **reflexiones** y **cortes**.

EXPANSIONES A LO LARGO DE LOS EJES x O y

Una **expansión a lo largo del eje x** es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x de un vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante $c > 1$. Esto es

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de manera que si $A_T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$$

De manera similar, una **expansión a lo largo del eje y** es una transformación lineal que multiplica la coordenada y de todo vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante $c > 1$. Como antes, si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$, entonces la representación matricial de T es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ de manera que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$.

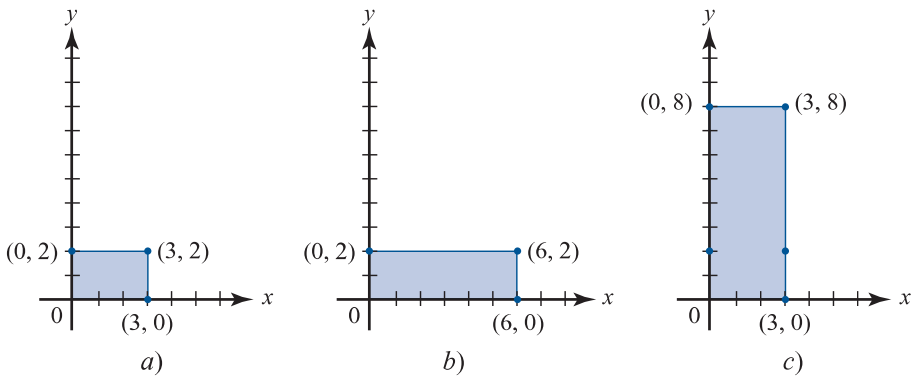


Figura 5.5
Dos expansiones:
a) Se comienza con este rectángulo.
b) Expansión en la dirección de x con $c = 2$.
c) Expansión en la dirección de y con $c = 4$.

COMPRESIÓN A LO LARGO DE LOS EJES x O y

Una **compresión** a lo largo de los ejes x o y es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x o y de un vector en $\mathbb{R}^2$ por una constante positiva $c < 1$. La representación matricial de una compresión es la misma que para una expansión, excepto para la compresión $0 < c < 1$, mientras que para la expansión $c < 1$. En la figura 5.6 se ilustran dos compresiones.

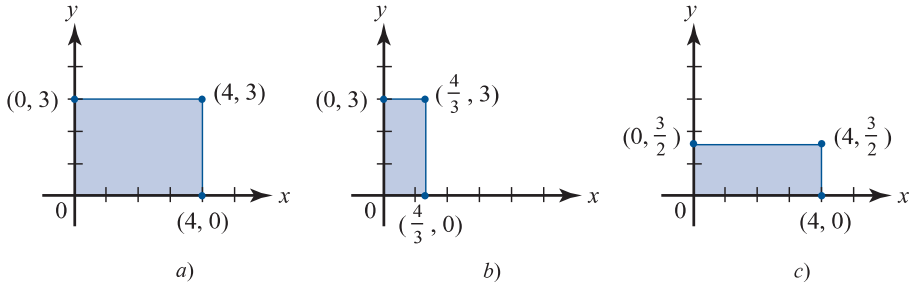


Figura 5.6
Dos compresiones:
a) Se comienza con este rectángulo.
b) Compresión a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{3}$.
c) Compresión a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{2}$.

REFLEXIONES

Existen tres tipos de reflexiones que serán de interés. En el ejemplo 5.1.1 se vio que la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

refleja al vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al eje x (vea la figura 5.1). En el ejemplo 5.1.6, se vio que la transformación

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

refleja al vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al eje y (vea la figura 5.2). Ahora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

de manera que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de la reflexión respecto al eje x y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la representación matricial de la reflexión respecto al eje y. Por último, el mapeo $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, que intercambia x y y, tiene el efecto de reflejar un vector en $\mathbb{R}^2$ **respecto a la recta $x = y$** (vea la figura 5.7).

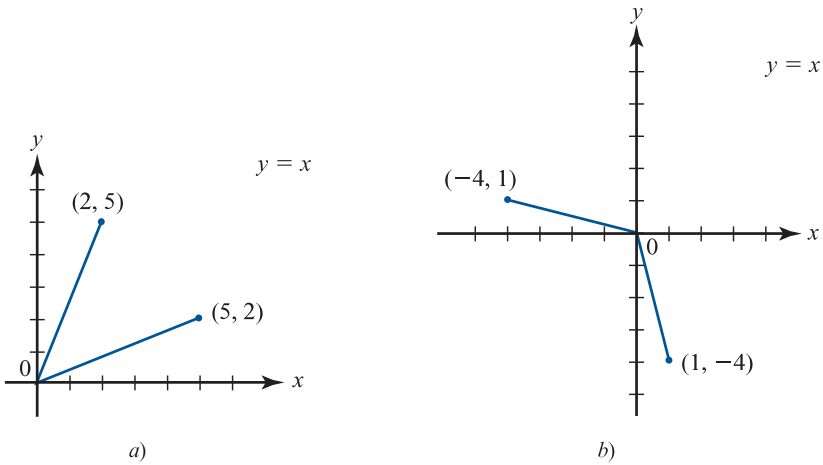


Figura 5.7
Reflexión de un vector en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $x = y$:

a) (2, 5) se obtiene reflejando (5, 2) respecto a la recta $y = x$.

b) (1, −4) se obtiene reflejando (−4, 1) respecto a la recta $y = x$.

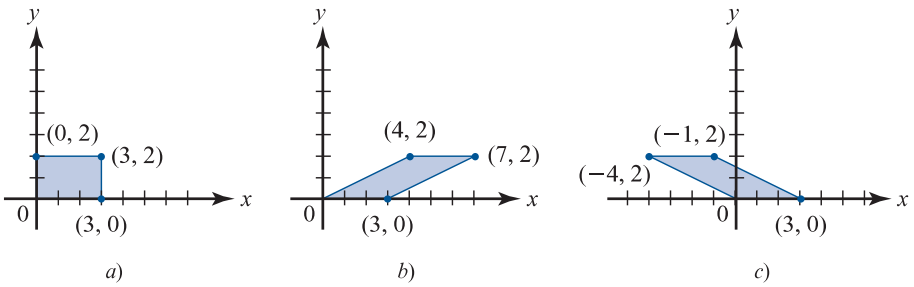


Figura 5.8
Dos cortes a lo largo del eje x:

a) Comenzamos con este rectángulo.

b) Corte a lo largo del eje x con $c = 2$.

c) Corte a lo largo del eje x con $c = -2$.

Si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$, entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que la representación matricial de la transformación lineal que refleja a una vector en $\mathbb{R}^2$ respecto a la recta $x = y$ es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cortes

Un **corte a lo largo del eje *x*** es una transformación que toma al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y lo convierte en un nuevo vector $\begin{pmatrix} x + cy \\ y \end{pmatrix}$, donde c es una constante que puede ser positiva o negativa. En la figura 5.8 se ilustran dos cortes a lo largo del eje x.

Sea T un corte a lo largo del eje x. Entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + c \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix}$ de manera que la representación matricial T es $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Por ejemplo, en la figura 5.8*b*, $c = 2$, así

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A_T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

En la figura 5.8*c*, $c = -2$. Así, $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A_T \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

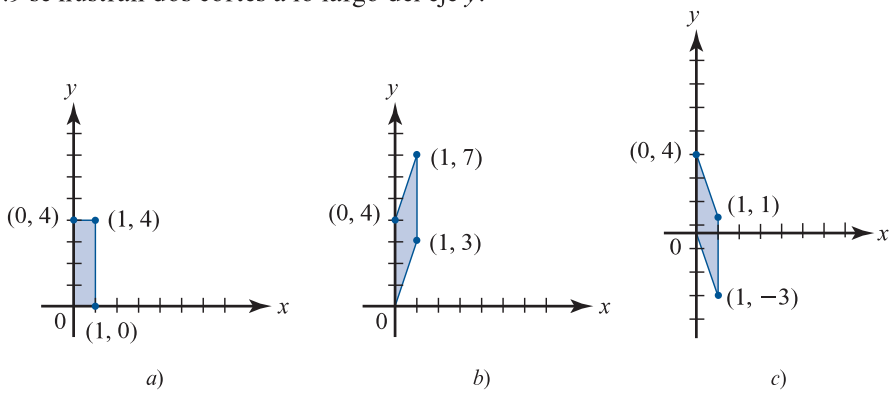
y

$$A_T \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Observe que $A_T\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$. Es decir, un corte a lo largo del eje x deja sin cambio a los vectores con coordenada y igual a cero.

Un **corte a lo largo del eje y** es una transformación que toma a un vector $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ y lo convierte en un nuevo vector $\begin{pmatrix}x\\y+cx\end{pmatrix}$, donde c es una constante que puede ser positiva o negativa. En la figura 5.9 se ilustran dos cortes a lo largo del eje y.

Figura 5.9
Dos cortes a lo largo del eje y:
a) Se comienza con este rectángulo.
b) Corte a lo largo del eje y con $c = 3$.
c) Corte a lo largo del eje y con $c = -3$.



Si T es un corte a lo largo del eje y, entonces

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

de manera que $A_T=\begin{pmatrix}1&0\\c&1\end{pmatrix}$. Por ejemplo, en la figura 5.9*b*, $c = 3$, así

$$A_T=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_T\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$$

En la figura 5.9*c*, $c = -3$, así

$$A_T\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$$

Observe que $A_T\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$. Esto es, los cortes a lo largo del eje y dejan sin cambio a los vectores con coordenadas x igual a cero.

En la tabla 5.1 se resumen estos tipos de transformaciones lineales.

Tabla 5.1 Transformaciones lineales especiales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

Transformación	Representación matricial de la transformación A_T
Expansión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix}c&0\\0&1\end{pmatrix}$, $c>1$
Expansión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}$, $c>1$
Compresión a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix}c&0\\0&1\end{pmatrix}$, $0<c<1$

(*continúa*)

Tabla 5.1 Transformaciones lineales especiales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ *(continuación)*

Compresión a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $0 < c < 1$
Reflexión respecto a la recta $y = x$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Reflexión respecto al eje y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje x	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Corte a lo largo del eje y	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$

En la sección 3.6 se estudiaron las matrices elementales. La multiplicación de una matriz por una matriz elemental tiene el efecto de realizar una operación elemental con renglones en esa matriz. La tabla 5.2 enumera las matrices elementales en $\mathbb{R}^2$.

Tabla 5.2 Matrices elementales en $\mathbb{R}^2$

Operación elemental con renglones	Matriz elemental	Ilustración
$R_1 \to cR_1$	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx & cy \\ z & w \end{pmatrix}$
$R_2 \to cR_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ cz & cw \end{pmatrix}$
$R_1 \to R_1 + cR_2$	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + cz & y + cw \\ z & w \end{pmatrix}$
$R_2 \to R_2 + cR_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z + cx & w + cy \end{pmatrix}$
$R_1 \rightleftarrows R_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ x & y \end{pmatrix}$

TEOREMA 6

Toda matriz elemental E de 2×2 es uno de los siguientes:

- **i)** La representación matricial de una expansión a lo largo del eje x o y
- **ii)** La representación matricial de una compresión a lo largo del eje x o y
- **iii)** La representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$
- **iv)** La representación matricial de un corte a lo largo del eje x o y
- **v)** La representación matricial de una reflexión respecto del eje x o y
- **vi)** El producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje x o y y la representación matricial de una expansión o compresión.

DEMOSTRACIÓN

Se hará referencia a las tablas 5.1 y 5.2

Caso 1: $E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c > 0$ — Ésta es la representación matricial de una expansión a lo largo del eje x si $c > 1$ o una compresión a lo largo del eje x si $0 < c < 1$.

Caso 2: $E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $c < 0$

Caso 2a: $c = -1$ — Entonces $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que es la representación matricial de una reflexión respecto al eje y.

Caso 2b: $c < 0, c \neq -1$ — Entonces $-c > 0$ y

$$E = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es el producto de la representación matricial de una reflexión respecto al eje y y la representación matricial de una expansión (si $-c > 1$) a lo largo del eje x.

Caso 3: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c > 0$ — Lo mismo que el caso 1 con el eje y en lugar del eje x.

Caso 4: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$, $c < 0$ — Lo mismo que el caso 2 con los ejes intercambiados.

Caso 5: $E = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje x.

Caso 6: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de un corte a lo largo del eje y.

Caso 7: $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — Ésta es la representación matricial de una reflexión respecto a la recta $y = x$.

En el teorema 3.6.3, se demostró que toda matriz invertible se puede expresar como el producto de matrices elementales. En el teorema 6 se demostró que toda matriz elemental en $\mathbb{R}^2$ se puede expresar como el producto de representaciones matriciales de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones. Por esto, se tiene el siguiente resultado

TEOREMA 7

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su representación matricial es invertible. Entonces T se puede obtener como una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones.

Nota. De acuerdo al teorema de resumen 4.7.10, A_T es invertible si y sólo si $\rho(A_T) = 2$. Pero según el teorema 4, $\rho(A_T) = \rho(A)$. Esto significa que A_T es invertible respecto a todas las bases en $\mathbb{R}^2$ o no es invertible respecto a alguna.

EJEMPLO 10 **Descomposición de una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ en una sucesión de expansiones, compresiones, cortes y reflexiones**

Considere la transformación T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con representación matricial $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Usando la técnica de la sección 3.6 (vea el ejemplo 3.6.3), A_T se puede escribir como el producto de tres matrices elementales:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ahora

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje y (con $c = 3$)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representa un corte a lo largo del eje x (con $c = 2$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ representa una expansión a lo largo del eje y (con $c = 2$) seguida de una reflexión respecto al eje x.

Así, para aplicar T a un vector en $\mathbb{R}^2$, se tiene que

i) Cortar a lo largo del eje x con $c = 2$.
ii) Expandir a lo largo del eje y con $c = 2$.
iii) Reflejar respecto al eje x.
iv) Cortar a lo largo del eje y con $c = 3$.

Observe que estas operaciones se realizan en el orden inverso en que se escriben las matrices en (4).

Para ilustrar esto, suponga que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$T\mathbf{v} = A_T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usando las operaciones *i*) a *iv*) se tiene que

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Expansión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Reflexión}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Corte}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En la figura 5.10 se bosquejan estos pasos.

Figura 5.10

Descomposición de la transformación lineal

$T = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

en una sucesión de cortes, expansiones y reflexiones:

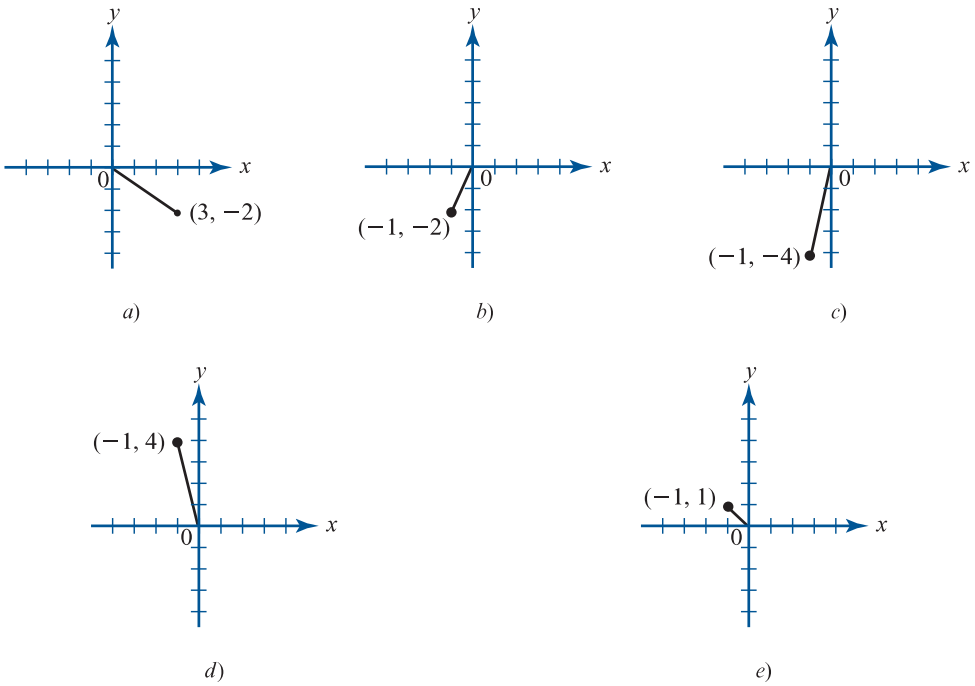
a) Se comienza con ese vector.

b) Vector obtenido por el corte a lo largo del eje x con $c = 2$.

c) Vector obtenido al expandir a lo largo del eje y con $c = 2$.

d) Vector obtenido al reflejar respecto al eje x.

e) Vector obtenido por el corte a lo largo del eje y con $c = 3$.



AUTOEVALUACIÓN

I. Si $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -x \\ y \end{pmatrix}$, entonces $A_T =$

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

II. _____ representa(n) una expansión a lo largo del eje y.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ***d)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

III. _____ representa(n) una expansión a lo largo del eje x.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ***c)*** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ***e)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ***f)*** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Desarrollo de competencias 5.3

De los problemas 1 al 38 encuentre la representación matricial A_T de la transformación lineal T, nu T, Im T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$. A menos que se especifique otra cosa, suponga que B_1 y B_2 son bases canónicas.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$

2. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}$

3. $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3;\ T(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ -x \\ x \end{pmatrix}$

4. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ -2x + 2y - 2z \end{pmatrix}$

5. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

6. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ -x + y \end{pmatrix}$

7. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + y + 4z \\ 5x - y + 8z \end{pmatrix}$

8. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2y + z \\ 2x - 4y - 2z \\ -3x + 6y + 3z \end{pmatrix}$

9. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z + 3w \\ y + 4z + 3w \\ x + 6z + 6w \end{pmatrix}$

10. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z + w \\ -x + z + 2w \\ x - 2y + 5z + 4w \\ 2x - y + z - w \end{pmatrix}$

11. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw + bx \\ cy + dz \end{pmatrix}$

12. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix};\ B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

13. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix};\ B_1 = B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

14. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ y - 3z \end{pmatrix};$

$$B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\};\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

15. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 2x + y \\ y \end{pmatrix};\ B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\};\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$

16. $T: P_2 \to P_3;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_1x + a_0x^3$

17. $T: \mathbb{R} \to P_3;\ T(a) = a + ax + ax^2 + ax^3$

18. $T: P_3 \to \mathbb{R};\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2$

19. $T: P_3 \to P_1;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_1 + a_3)x - a_2$

20. $T: P_4 \to P_4;\ P(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

21. $T: P_3 \to P_2$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (a_0 - a_1 + 2a_2 + 3a_3) + (a_1 + 4a_2 + 3a_3)x + (a_0 + 6a_2 + 5a_3)x^2$

22. $T: M_{22} \to M_{22}$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b + 2c + d & -a + 2c + 2d \\ a - 2b + 5c + 4d & 2a - b + c - d \end{pmatrix}$

23. $T: P_4 \to P_3$; $P(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) = a_3x^3 + a_1x$

24. $T: M_{22} \to M_{22}$; $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c + d & a + b + c \\ a + b & a \end{pmatrix}$

25. $T: P_2 \to P_3$; $T[p(x)] = xp(x)$; $B_1 = \{1, x, x^2\}$; $B_2 = \{1, (1 + x), (1 + x)^2, (1 + x)^3\}$

26. $T: P_2 \to P_3$; $Tp(x) = xp(x) + p(x)$; $B_1 = \{1, x, x^2\}$; $B_2 = \{1, (x - 1), (x - 1)(x - 2), (x - 1)(x - 2)(x - 3)\}$

CÁLCULO **27.** $D: P_4 \to P_3$; $Dp(x) = p'(x)$

CÁLCULO **28.** $T: P_4 \to P_4$; $Tp(x) = xp'(x) - p(x)$

* CÁLCULO **29.** $D: P_n \to P_{n-1}$; $Dp(x) = p'(x)$

CÁLCULO **30.** $D: P_4 \to P_2$; $Dp(x) = p''(x)$

31. $D: P_2 \to P_2$; $Dp(x) = p''(x) + 2p'(x) + p(x)$

* CÁLCULO **32.** $T: P_4 \to P_4$; $Tp(x) = p''(x) + xp'(x) + 2p(x)$

* CÁLCULO **33.** $D: P_n \to P_{n-k}$; $Dp(x) = p^{(k)}(x)$

* CÁLCULO **34.** $T: P_n \to P_n$; $Tp(x) = x^n p^{(n)}(x) + x^{n-1}p^{(n-1)}(x) + \cdots + xp'(x) + p(x)$

35. $J: P_n \to \mathbb{R}$; $Jp = \int_0^1 p(x)\,dx$

CÁLCULO **36.** $J: P_n \to \mathbb{R}$; $Jp = \int_0^1 [p(x)]^2\,dx$

37. $T: \mathbb{R}^3 \to P_2$; $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$

38. $T: P_3 \to \mathbb{R}^3$; $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix}$

39. Defina $T: M_{mn} \to M_{nm}$ por $TA = A^t$. Encuentre A_T respecto a las bases canónicas en M_{mn} y M_{nm}.

***40.** Defina $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + iy \\ (1 + i)y - x \end{pmatrix}$. Encuentre A_T.

CÁLCULO **41.** Sea $V = \text{gen}\{1, \text{sen } x, \cos x\}$. Encuentre A_D, donde $D: V \to V$ está definida por $Df(x) = f'(x)$. Encuentre imagen D y nu D.

CÁLCULO **42.** Conteste las preguntas del problema 41 dado $V = \text{gen}\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$.

43. Defina $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ por $T\mathbf{x} = \text{proy}_H \mathbf{x}$, donde $H = \text{gen}\{(1/\sqrt{2})(1, i)\}$. Encuentre A_T.

44. Demuestre el teorema 2.

45. Demuestre el teorema 4.

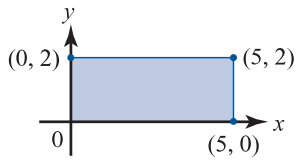
De los problemas 46 al 53 describa en palabras las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tienen la representación matricial A_T.

46. $A_T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **47.** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **48.** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **49.** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

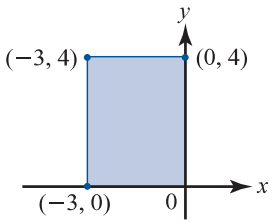
50. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **51.** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ **52.** $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **53.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

En los problemas 54 al 63 escriba la representación matricial de 2×2 de la transformación lineal dada y bosqueje la región obtenida al aplicar esa transformación al rectángulo dado.

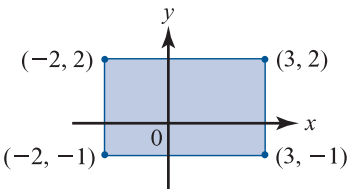
54. Expansión a lo largo del eje y con $c = 2$



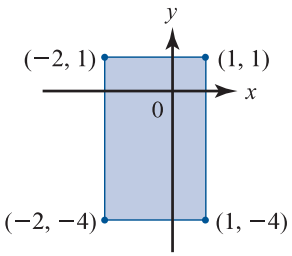
55. Compresión a lo largo del eje x con $c = \frac{1}{4}$



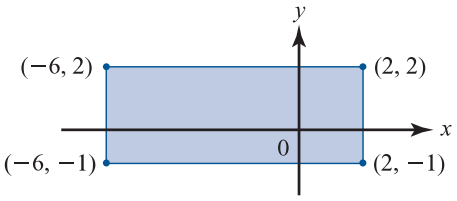
56. Corte a lo largo del eje x con $c = -2$



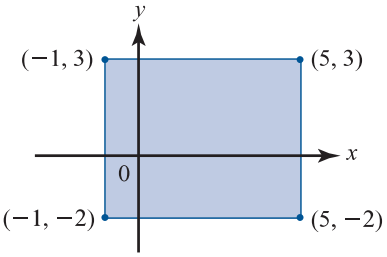
57. Corte a lo largo del eje y con $c = 3$



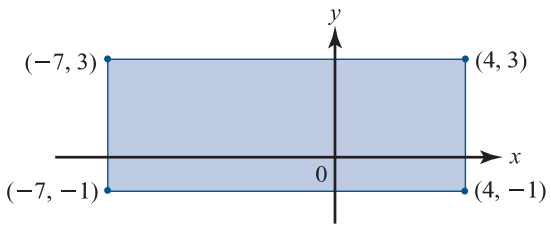
58. Corte a lo largo del eje y con $c = -\frac{1}{2}$



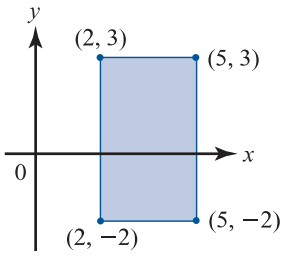
59. Corte a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{5}$



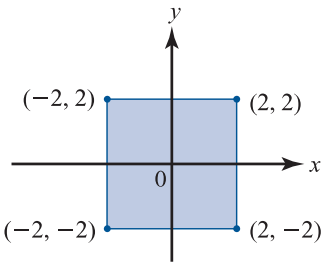
60. Reflexión respecto al eje x



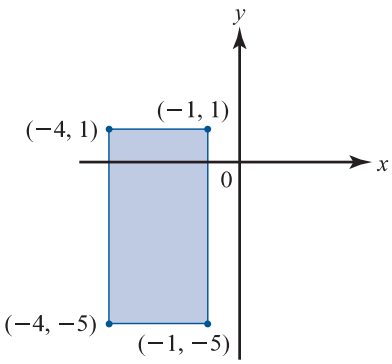
61. Reflexión respecto al eje y



62. Reflexión respecto a la recta $y = x$



63. Reflexión respecto a la recta $y = x$



De los problemas 64 al 71 exprese cada transformación lineal con matriz de transformación dada A_T, como una sección de expansiones, compresiones, reflexiones y cortes.

64. $A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ **65.** $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ **66.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ **67.** $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

68. $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ **69.** $A_T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ **70.** $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ **71.** $A_T = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. *b)* II. *c)* III. *c, d)*

Resumen

- ***Transformación lineal***

  Sean V y W dos espacios vectoriales. Una **transformación lineal** T de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{v} \in V$ un vector único $T\mathbf{v} \in W$ y que satisface, para cada $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y cada escalar α,

  $$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\mathbf{u} + T\mathbf{v}$$

  y

  $$T(\alpha\mathbf{v}) = \alpha T\mathbf{v}$$

- ***Propiedades básicas de las transformaciones lineales***

  Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces, para todo vector $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ en V y todo escalar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$

  i) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

  ii) $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

  iii) $T(\alpha_1\mathbf{v}_1, \alpha_2\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1, \alpha_2 T\mathbf{v}_2, \ldots, \alpha_n T\mathbf{v}_n$

- ***Núcleo e imagen de una transformación lineal***

  Sean V y W dos espacios vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces el **núcleo** de T, denotado por nu T, está dado por

  $$\text{nu } T = \{\mathbf{v} \in V: T\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

  La **imagen** de T, denotada por Im T está dada por

  $$\text{Im T} = \{\mathbf{w} \in W: T\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \in V\}$$

  nu T es un subespacio de V e Im T es un subespacio de W.

- ***Nulidad y rango de una transformación lineal***

  Si T es una transformación lineal de V en W, entonces

  $$\textbf{nulidad de } T = \nu(T) = \dim \text{nu } T$$

  $$\textbf{rango de } T = \rho(T) = \dim \text{Im T}$$

- ***Matriz de transformación***

  Sea T: símbolo $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única de $m \times n$, A_T, tal que

  $$T\mathbf{x} = A_T\mathbf{x} \text{ para toda } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

  La matriz A_T se llama **matriz de transformación** de T.

- Sea A_T la matriz de transformación correspondiente a una transformación lineal T. Entonces

  i) $\text{Im T} = R_{A_T} = C_{A_T}$

  ii) $\rho(T) = \rho(A_T)$

iii) nu $T = N_A$

iv) $\nu(T) = \nu(A_T)$

- ***Representación matricial de una transformación lineal***

  Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, W un espacio vectorial real de dimensión m y $T: V \to W$ una transformación lineal. Sean $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V y B_2 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base para W. Entonces existe una matriz única A_T de $m \times n$, tal que

  $$(T\mathbf{x})_{B_2} = A_T(\mathbf{x})_{B_1}$$

  A_T se denomina **representación matricial** de T respecto a las bases B_1 y B_2.

- Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita con dim $V = n$. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea A_T una representación matricial de T. Entonces

  i) $\rho(T) = \rho(A_T)$

  ii) $\nu(T) = \nu(A_T)$

  iii) $\nu(T) + \rho(T) = n$

- ***Teorema de resumen***

  Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 11 afirmaciones son equivalentes:

  i) Es invertible.

  ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

  iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

  iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad, I_n, de $n \times n$.

  v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

  vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

  vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

  viii) det $A \neq 0$.

  ix) $\nu(A) = 0$.

  x) $\rho(A) = n$.

COMPETENCIAS FINALES. UNIDAD 5

En los ejercicios 1 al 8 determine si la transformación dada de V a W es lineal.

1. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (0, -y)$

2. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (1, y, z)$

3. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (y, z, 1)$

4. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T(x, y) = x/y$

5. $T: P_1 \to P_2$; $(Tp)(x) = xp(x)$

6. $T: P_1 \to P_3$; $(Tp)(x) = x^2p(x) + 2xp(x) + p(x)$

7. $T: P_2 \to P_2$; $(Tp)(x) = 1 + p(x)$

8. $T: C[0, 1] \to C[0, 1]$; $Tf(x) = f(1)$

En los ejercicios 9 al 15 encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal dada.

9. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

10. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

11. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$

12. $T: P_2 \to P_4;\ Tp(x) = x^2 p(x)$

13. $T: P_1 \to P_3;\ (Tp)(x) = x^2 p(x) + 2xp(x) + p(x)$

14. $T: M_{22} \to M_{22};\ T(A) = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

15. $T: C[0, 1] \to \mathbb{R};\ Tf = f(1)$

De los ejercicios 16 al 23 encuentre la representación matricial de la transformación lineal dada y encuentre su núcleo, imagen, nulidad y rango.

16. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (0, -y)$

17. $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y, z) = (y, z)$

18. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T(w, x, y, z) = (aw + bx, cy + dz)$

19. $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y, z, w) = (x - 2z, 2y + 3w)$

20. $T: P_3 \to P_4;\ (Tp)(x) = xp(x)$

21. $T: P_1 \to P_3;\ (Tp)(x) = x^2 p(x) + 2xp^1 + p(x)$

22. $T: M_{22} \to M_{22};\ TA = AB$, donde $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

23. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T(x, y) = (x - y, 2x + 3y);\ B_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\};\ B_2 = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

De los ejercicios 24 al 27 describa en palabras la transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con la representación matricial A_T dada.

24. $A_T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

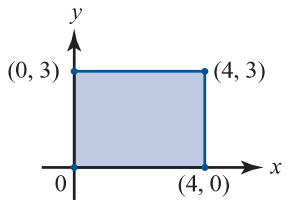
25. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

26. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

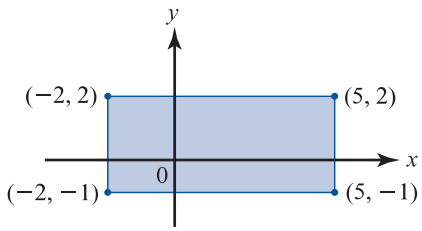
27. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De los ejercicios 28 al 31 escriba la representación matricial de 2×2 de las transformaciones lineales dadas y haga un bosquejo de la región obtenida cuando se aplica la transformación al rectángulo dado.

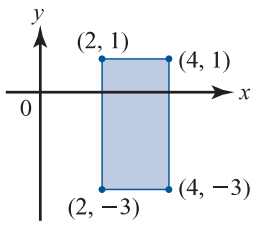
28. Expansión a lo largo del eje x con $c = 3$



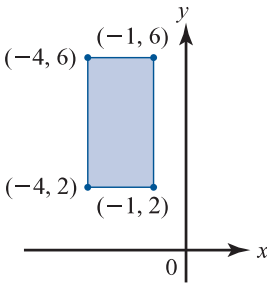
29. Compresión a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{3}$



30. Reflexión respecto a la recta $y = x$



31. Corte a lo largo del eje x con $c = -3$



Apéndice

A

VALORES CARACTERÍSTICOS, VECTORES CARACTERÍSTICOS Y FORMAS CANÓNICAS

A.1 VALORES CARACTERÍSTICOS Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

Sea T: $V \to W$ una transformación lineal. En diversas aplicaciones (una de las cuales se da en la siguiente sección) resulta útil encontrar un vector $\mathbf{v}$ en V tal que $T\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos. Es decir, se busca un vector $\mathbf{v}$ y un escalar λ tal que

$$T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \textbf{(1)}$$

Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y λ satisface (1), entonces λ se denomina un *valor característico* de T y $\mathbf{v}$ un *vector característico* de T correspondiente al valor característico λ. El propósito de este apéndice es investigar las propiedades de los valores característicos y vectores característicos. Si V tiene dimensión finita, entonces T se puede representar por una matriz A_T. Por esta razón se estudiarán los valores y los vectores característicos de las matrices de $n \times n$.

DEFINICIÓN 1 **Valor característico y vector característico**

Sea A una matriz de $n \times n$ con componentes reales.[†] El número λ (real o complejo) se denomina **valor característico** de A si existe un vector *diferente de cero* $\mathbf{v}$ en $\mathbb{C}^n$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \textbf{(2)}$$

El vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ se denomina **vector característico** de A correspondiente al **valor característico** λ.

Nota. Los valores y vectores característicos también se denominan **valores** y **vectores propios** o **eigenvalores** y **eigenvectores**; la palabra "eigen" es la palabra alemana para "propio".

[†] Esta definición es válida si A tiene componentes complejas; pero como las matrices que se manejaban tienen, en su mayoría, componentes reales, la definición es suficiente para nuestros propósitos.

Observación. Como se verá (ejemplo 6) una matriz con componentes reales puede tener valores y vectores característicos complejos. Por esta razón, en la definición, se asegura que $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$. No se usarán en este libro muchos hechos sobre los números complejos. En la unidad 1 se hizo una presentación de unos cuantos de ellos que sí son necesarios.

EJEMPLO 1 Valores característicos y vectores característicos de una matriz de 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$. Entonces $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Así, $\lambda_1 = 1$ es un valor característico de A con el correspondiente vector característico $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. De manera similar, $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de modo que $\lambda_2 = -2$ es un valor característico de A con el correspondiente vector característico $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como se verá en seguida, éstos son los únicos valores característicos de A.

EJEMPLO 2 Valores característicos y vectores característicos de la matriz identidad

Sea $A = I$, entonces para cualquier $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, $A\mathbf{v} = I\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Así, 1 es el único valor característico de A y todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n$ es un vector característico de I.

Se calcularán los valores y vectores característicos de múltiples matrices en esta sección. Pero primero es necesario probar algunas técnicas que simplificarán estos cálculos.

Suponga que λ es un valor característico de A. Entonces existe un vector diferente de cero $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} = \lambda/\mathbf{v}$. Reescribiendo esto se tiene

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Si A es una matriz de $n \times$ n, la ecuación (3) corresponde a un sistema homogéneo de n ecuaciones con las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Como se ha supuesto que el sistema cuenta con soluciones no triviales, se concluye que $\det(A - \lambda I) = 0$. De forma inversa, si $\det(A - \lambda I) = 0$, entonces la ecuación (3) tiene soluciones no triviales y λ es el valor característico de A. Por otro lado, si $\det(A - \lambda I) \neq 0$, entonces la única solución a (3) es $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ de manera que λ *no* es un valor característico de A. Resumiendo estos hechos, se tiene el siguiente teorema.

TEOREMA 1 Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces λ es un valor característico de A si y sólo si

$$\boxed{p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0} \tag{4}$$

DEFINICIÓN 2 **Ecuación y polinomio característicos**

La ecuación (4) se denomina la **ecuación característica** de A; $p(\lambda)$ se denomina el **polinomio característico** de A.

Como será evidente en los ejemplos, $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n en λ. Por ejemplo, si $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $A-\lambda I=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$ y $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$.

De acuerdo con el **teorema fundamental del álgebra**, cualquier polinomio de grado n con coeficientes reales o complejos tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades). Esto significa, por ejemplo, que el polinomio $(\lambda - 1)^5$ tiene cinco raíces, todas iguales al número 1. Como cualquier valor característico de A es una raíz de la ecuación característica de A, se concluye que

> Contando multiplicidades, toda matriz de $n \times n$ tiene exactamente n valores característicos.

TEOREMA 2

Sea λ un valor característico de la matriz A de $n \times n$ y sea $E_\lambda = \{\mathbf{v}: A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}\}$. Entonces E_λ es un subespacio de $\mathbb{C}^n$.

DEMOSTRACIÓN

Si $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, entonces $(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Así E_λ es el espacio nulo de la matriz $A - \lambda I$, que por el ejemplo 4.6.10, es un subespacio[†] de $\mathbb{C}^n$.

DEFINICIÓN 3

Espacio característico

Sea λ un valor característico de A. El subespacio E_λ se denomina *espacio característico* o *propio*[‡] de A correspondiente al valor característico λ.

Ahora se probará otro resultado útil.

TEOREMA 3

Sea A una matriz de $n \times n$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores característicos distintos de A (es decir, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) con vectores característicos correspondientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ son linealmente independientes. Esto es: *los vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes.*

DEMOSTRACIÓN

Se llevará a cabo la demostración por inducción matemática. Comenzando con $m = 2$, suponga que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{5}$$

Multiplicando ambos lados de (5) por A se tiene

$$\mathbf{0} = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2$$

o sea (como $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2$)

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{6}$$

[†] En el ejemplo 4.6.10, se vio que N_A es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si A es una matriz real. La extensión de este resultado a $\mathbb{C}^n$ no presenta dificultades.

[‡] Observe que $\mathbf{0} \in E_\lambda$ ya que E_λ es un subespacio. Sin embargo, $\mathbf{0}$ *no* es un vector característico.

Se multiplica (5) por λ_1 y se resta de (6) para obtener

$$(c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2) - (c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

o sea

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

Como $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ (por definición de vector característico) y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $c_2 = 0$. Entonces, sustituyendo $c_2 = 0$ en (5), se ve que $c_1 = 0$, lo que prueba el teorema en el caso $m = 2$. Ahora suponga que el teorema se cumple para $m = k$. Esto es, se supone que k vectores característicos correspondientes a valores característicos distintos son linealmente independientes. Ahora se prueba el teorema para $m = k + 1$. Así que se supone que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{7}$$

Multiplicando ambos lados de (7) por A y usando el hecho de que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ se obtiene

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Se multiplican ambos lados de (7) por λ_{k+1} y se resta de (8):

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Pero de acuerdo a la suposición de inducción, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes. Así, $c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$; y como $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se concluye que $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$. Pero de (7) esto significa que $c_{k+1} = 0$. Por lo tanto, el teorema se cumple para $m = k + 1$ y la prueba queda completa.

Si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

y $p(\lambda) = 0$ se puede escribir en la forma

$$p(\lambda) = (-1)^n\left[\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0\right] = 0 \tag{9}$$

La ecuación (9) tiene n raíces, algunas de ellas repetidas. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son las diferentes raíces de (9) con multiplicidades $r_1, r_2, \ldots, r_m$, respectivamente, entonces (9) se puede factorizar para obtener

$$(-1)^n p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{r_m} = 0 \tag{10}$$

MULTIPLICIDAD ALGEBRAICA

Los números $r_1, r_2, \ldots, r_m$ se denominan **multiplicidades algebraicas** de los valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, respectivamente.

Ahora es posible calcular los valores característicos y sus espacios característicos correspondientes. Para esto se realiza un procedimiento de tres pasos:

Procedimiento para calcular valores característicos y vectores característicos

i) Se encuentra $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.

ii) Se encuentran las raíces $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ de $p(\lambda) = 0$.

iii) Se resuelve el sistema homogéneo $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$, correspondiente a cada valor característico λ_i.

Observación 1. Por lo general el paso *ii*) es el más difícil.

Observación 2. En los problemas 40 y 41 se sugiere una manera relativamente sencilla de encontrar los valores y vectores característicos de matrices de 2×2.

EJEMPLO 3 **Cálculo de valores y vectores característicos**

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(3 - \lambda) - 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$. Entonces los valores característicos de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$. Para $\lambda_1 = 1$ se resuelve $(A - I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ o $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es claro que cualquier vector característico correspondiente a $\lambda_1 = 1$ satisface $3x_1 + 2x_2 = 0$. Un vector característico de este tipo es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Así, $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$. De manera similar, la ecuación $(A - 6I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ significa que $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $x_1 = x_2$. Entonces $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector característico correspondiente a $\lambda_2 = 6$ y $E_6 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Observe que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes ya que uno no es múltiplo del otro.

Nota. No es importante si se establece $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 6$ o $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 1$. Los resultados no cambian, en el sentido que para un valor característico dado corresponde un vector característico en particular.

EJEMPLO 4 **Una matriz de 3 × 3 con valores característicos distintos**

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$$= -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$$

Por lo tanto, los valores característicos de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$. Para $\lambda_1 = 1$ se tiene

$$(A-I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0&-1&4\\3&1&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Reduciendo renglones se obtiene, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\3&1&-1&0\\2&1&-2&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\3&0&3&0\\2&0&2&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\1&0&1&0\\2&0&2&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&4&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Así, $x_1=-x_3$, $x_2=4x_3$, un vector característico es $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$ y $E_1=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$. Para $\lambda_2=-2$ se tiene $[A-(-2I)]\mathbf{v}=(A+2I)\mathbf{v}=\mathbf{0}$, o sea

$$\begin{pmatrix}3&-1&4\\3&4&-1\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Esto lleva a

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\3&4&-1&0\\2&1&1&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\15&0&15&0\\5&0&5&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&-1&4&0\\1&0&1&0\\5&0&5&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Entonces $x_2=-x_1$, $x_3=-x_1$ y un vector característico es $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$. Entonces $E_{-2}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$. Por último, para $\lambda_3=3$ se tiene

$$(A-3I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\3&-1&-1\\2&1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

y

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&4&0\\3&-1&-1&0\\2&1&-4&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&4&0\\5&0&-5&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-2&-1&4&0\\1&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&0\\1&0&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Por lo tanto, $x_3 = x_1$, $x_2 = 2x_1$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ de manera que $E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Observación. En éste y otros ejemplos existe un número infinito de formas de elegir el vector característico. Se seleccionó arbitrariamente un ejemplo sencillo haciendo una o más de las x_i igual a un número conveniente. En este caso, una de las x_i se hizo igual 1. Otra selección común es escalar el vector característico para que sea unitario.

EJEMPLO 5 Una matriz de 2 × 2 con uno de sus valores característicos iguales a cero

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$. Así, los valores característicos son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 4$. El espacio característico correspondiente a cero es simplemente el espacio nulo de A. Se calcula $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $2x_1 = x_2$ y un vector característico es $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$. Al analizar lo que corresponde a $\lambda_2 = 4$ se tiene $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, de manera que $E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 6 Una matriz de 2 × 2 con valores característicos conjugados complejos

Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ y

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Así, $\lambda_1 = 1 + i$ y $\lambda_2 = 1 - i$. Se calcula

$$[A - (1+i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y se obtiene $(2-i)x_1 - 5x_2 = 0$ y $x_1 + (-2 - i)x_2 = 0$. Entonces $x_1 = (2 + i)x_2$, lo que lleva al vector característico $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_{1+i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. De manera similar, $[A - (1-i)I]\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+i & -5 \\ 1 & -2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ o $x_1 + (-2 + i)x_2 = 0$, lo que lleva a $x_1 = (2 - i)x_2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$ y $E_{1-i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Observación 1. Este ejemplo ilustra que una matriz real puede tener valores y vectores característicos complejos. Algunos libros definen los valores característicos de matrices reales como

† Observe que las columnas de esta matriz son linealmente dependientes porque $\begin{pmatrix} -5 \\ -2-i \end{pmatrix} = (-2-i)\begin{pmatrix} 2-i \\ 1 \end{pmatrix}$.

las raíces ***reales*** de la ecuación característica. Con esta definición la matriz del último ejemplo *no* tiene valores característicos. Esto puede hacer que los cálculos sean más sencillos, pero también reduce en gran medida la utilidad de la teoría de valores característicos y de vectores característicos.

Observación 2. Note que $\lambda_2 = 1 - i$ es el conjugado complejo de $\lambda_1 = 1 + i$. Adicionalmente, las componentes de $\mathbf{v}_2$ son conjugados complejos de las componentes de $\mathbf{v}_1$ lo cual no es una coincidencia. En el problema 38 de esta sección se pide que se pruebe que

> Los valores característicos de una matriz *real* ocurren en pares conjugados complejos
> y
> los vectores característicos correspondientes son conjugados complejos entre sí.

Antes de presentar más ejemplos, se demostrará un teorema que en algunos casos especiales simplifica los cálculos de los valores característicos.

TEOREMA 4

Los valores característicos de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.

DEMOSTRACIÓN

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \text{entonces } A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

y como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las componentes de la diagonal, se ve que $\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda)$ con ceros $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. La demostración para una matriz triangular inferior es prácticamente idéntica.

EJEMPLO 7 **Valores característicos de una matriz triangular**

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 5 & 6 \\ 0 & -3 - \lambda & 2 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-3 - \lambda)(5 - \lambda)$$

con ceros (y valores característicos) 2, -3 y 5.

A continuación se darán más ejemplos del cálculo de los valores y vectores característicos para matrices que no son triangulares.

EJEMPLO 8 **Una matriz de 2 × 2 con un valor característico y dos vectores característicos linealmente independientes**

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Entonces } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 \\ 0 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0;$$

así, $\lambda = 4$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 2. Como $A = 4I$, se sabe que $A\mathbf{v} = 4\mathbf{v}$ para todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ de manera que $E_4 = \mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 9 **Una matriz de 2 × 2 con un valor característico y sólo un vector característico independiente**

Sea $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$. Entonces $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1\\ 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)^2=0$; así, $\lambda=4$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 2. Pero esta vez se tiene $(A-4I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\ 0\end{pmatrix}$. Por lo tanto $x_2=0$, $\mathbf{v}_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ es un vector propio y $E_4=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 10 **Una matriz de 3 × 3 con dos valores característicos y tres vectores característicos linealmente independientes**

Sea $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Entonces $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 4\\ 2 & -\lambda & 2\\ 4 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+6\lambda^2+15\lambda+8^{\dagger}=$ $-(\lambda+1)^2(\lambda-8)=0$ de manera que los valores característicos son $\lambda_1=8$ y $\lambda_2=-1$ (con multiplicidad algebraica 2). Para $\lambda_1=8$, se obtiene

$$(A-8I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-5 & 2 & 4\\ 2 & -8 & 2\\ 4 & 2 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

o reduciendo por renglones, se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 2 & 4 & 0\\ 2 & -8 & 2 & 0\\ 4 & 2 & -5 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 2 & 4 & 0\\ -18 & 0 & 18 & 0\\ 9 & 0 & -9 & 0\end{array}\right)$$

$$\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-5 & 2 & 4 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 9 & 0 & -9 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 2 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Entonces, $x_3=2x_2$ y $x_1=x_3$ y se obtiene el vector característico $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ y $E_8=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\right\}$. Para $\lambda_2=-1$ se tiene $(A+I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\ 2 & 1 & 2\\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, lo que da la ecuación única $2x_1+x_2+2x_3=0$ o $x_2=-2x_1-2x_3$. Si $x_1=1$ y $x_3=0$, se obtiene $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$. Si $x_1=0$ y $x_3=1$, se obtiene $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$. Existen otras elecciones convenientes para los vectores característicos, por ejemplo, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ está en E_{-1} ya que $\mathbf{v}=\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_3$.

† Este cálculo no es obvio pero sí sencillo de realizar. No se dan los detalles algebraicos para un determinante de 3 × 3. De aquí en adelante se seguirá esta política.

EJEMPLO 11 **Una matriz de 3 × 3 con un valor característico y sólo un vector característico linealmente independiente**

Sea $A=\begin{pmatrix}-5 & -5 & -9\\ 8 & 9 & 18\\ -2 & -3 & -7\end{pmatrix}$; entonces $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-5-\lambda & -5 & -9\\ 8 & 9-\lambda & 18\\ -2 & -3 & -7-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=-(\lambda+1)^3=0$. Así, $\lambda=-1$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 3. Para calcular E_{-1} se establece $(A+I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}-4 & -5 & -9\\ 8 & 10 & 18\\ -2 & -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ y se reduce por renglones para obtener, sucesivamente,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-4 & -5 & -9 & 0\\ 8 & 10 & 18 & 0\\ -2 & -3 & -6 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & -6 & 0\\ -2 & -3 & -6 & 0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)$$

Esto conduce a $x_2=-3x_3$ y $2x_1=3x_3$. Estableciendo $x_3=2$, se obtiene sólo un vector característico linealmente independiente: $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 2\end{pmatrix}$. Por lo tanto, $E_{-1}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\ -6\\ 2\end{pmatrix}\right\}$.

EJEMPLO 12 **Una matriz de 3 × 3 con un valor característico y dos vectores característicos linealmente independientes**

Sea $A=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -9\\ 0 & 5 & 18\\ 0 & -2 & -7\end{pmatrix}$; entonces $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & -3 & -9\\ 0 & 5-\lambda & 18\\ 0 & -2 & -7-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)^3=0$. Así, igual que en el ejemplo 10, $\lambda=-1$ es un valor característico de multiplicidad algebraica 3. Para encontrar E_{-1} se calcula $(A+I)\mathbf{v}=\begin{pmatrix}0 & -3 & -9\\ 0 & 6 & 18\\ 0 & -2 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. Por lo tanto, $-2x_2-6x_3=0$ o $x_2=-3x_3$, y x_1 es arbitrario. Haciendo $x_1=0, x_3=1$, se obtiene $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$. Haciendo $x_1=1$, $x_3=1$, se llega a $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 1\end{pmatrix}$. De esta manera $E_{-1}=\text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\ -3\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 1\end{pmatrix}\right\}$.

En cada uno de los últimos cinco ejemplos se encontró un valor característico con una multiplicidad algebraica de 2 o más. Pero como se vio en los ejemplos 9, 11 y 12, el número de vectores característicos linealmente independientes no es necesariamente igual a la multiplicidad algebraica del valor característico (como fue el caso en los ejemplos 8 y 10). Esta observación lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 4 **Multiplicidad geométrica**

Sea λ un valor característico de la matriz A; entonces la **multiplicidad geométrica** de λ es la dimensión del espacio característico correspondiente a λ (que es la nulidad de la matriz $A - \lambda I$). Esto es,

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda = \dim E_\lambda = \nu(A - \lambda I)$$

En los ejemplos 8 y 10 se observó que para los valores característicos de multiplicidad algebraica 2 las multiplicidades geométricas eran también 2. En el ejemplo 9 la multiplicidad geométrica de $\lambda = 4$ era 1 mientras que la multiplicidad algebraica era 2. En el ejemplo 11 la multiplicidad algebraica era 3 y la multiplicidad geométrica 1. En el ejemplo 12 la multiplicidad algebraica era 3 y la geométrica 2. Estos ejemplos ilustran el hecho de que si la multiplicidad algebraica de λ es mayor que 1, entonces no se puede predecir la multiplicidad geométrica de λ sin información adicional.

Si A es una matriz de 2×2 y λ es un valor característico con multiplicidad algebraica 2, entonces la multiplicidad geométrica de λ es ≤ 2 ya que puede haber, a lo más, dos vectores linealmente independientes en un espacio de dos dimensiones. Sea A una matriz de 3×3 que tiene dos valores característicos λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas 1 y 2, respectivamente. Entonces la multiplicidad geométrica de λ_2 es ≤ 2 porque de otra manera se tendrían cuatro vectores linealmente independientes en un espacio de tres dimensiones. De hecho, la multiplicidad geométrica de un valor característico es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica. La demostración del siguiente teorema no es difícil si se prueban algunos otros hechos sobre los determinantes. Como esto nos llevaría más allá del alcance de este libro, se omite la prueba.[†]

TEOREMA 5

Sea λ un valor característico de A. Entonces

$$\text{Multiplicidad geométrica de } \lambda \leq \text{multiplicidad algebraica de } \lambda.$$

Nota. La multiplicidad geométrica de un valor característico nunca es cero. Esto se deduce de la definición 1, que establece que si λ es un valor característico, entonces existe un vector característico *diferente de cero* que corresponde a λ.

En el resto de este capítulo, un problema importante será determinar si una matriz de $n \times n$ dada tiene o no n vectores característicos linealmente independientes. Con lo que se ha estudiado en esta sección, se vuelve evidente el siguiente teorema.

TEOREMA 6

Sea A una matriz de $n \times n$; entonces A tiene n vectores característicos linealmente independientes si y sólo si la multiplicidad geométrica de cada valor característico es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores característicos linealmente independientes si todos los valores característicos son distintos (ya que entonces la multiplicidad algebraica de cada valor característico es 1).

[†] Una demostración se puede encontrar en el teorema 11.2.6 en el libro *Advanced Engineering Mathematics* (Nueva York: McGraw-Hill, Inc., 1975) de C. R. Wylie.

En el ejemplo 5 se observó una matriz para la que un valor característico era cero. En realidad, por el teorema 1 es evidente que cero es un valor característico de A si y sólo si $\det A = \det(A - 0I) = 0$. Esto permite extender, por última vez, el teorema de resumen.

TEOREMA 7

Teorema de resumen (punto de vista 7)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces las siguientes 11 afirmaciones son equivalentes; es decir, cada una implica a las otras 11 (de manera que si una es cierta, todas las demás son ciertas):

i) A es invertible.

ii) La única solución al sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

iii) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada n-vector $\mathbf{b}$.

iv) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n.

v) A se puede expresar como el producto de matrices elementales.

vi) La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii) Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

viii) $\det A \neq 0$.

ix) $\nu(A) = 0$.

x) $\rho(A) = n$.

xi) Cero *no* es un valor característico de A.

AUTOEVALUACIÓN

Indique si los enunciados siguientes son falsos o verdaderos

I. Los valores característicos de una matriz triangular son los números en la diagonal de la matriz.

II. Si la matriz real A de 3×3 tiene valores característicos distintos, entonces los vectores característicos correspondientes a esos valores característicos distintos constituyen una base para $\mathbb{R}^3$.

III. Si la matriz A de 3×3 tiene dos valores característicos distintos, entonces A tiene a lo más dos vectores característicos linealmente independientes.

IV. Si A tiene elementos reales, entonces A puede tener exactamente un valor característico complejo (es decir, un valor característico $a + ib$ con $b \neq 0$.

V. Si $\det A = 0$, entonces 0 es un valor característico de A.

Elija la opción que responda acertadamente al enunciado propuesto

VI. 1 es un valor característico de la matriz identidad 3×3. Su multiplicidad geométrica es _____.

***a*) 1** ***b*) 2** ***c*) 3**

VII. 1 es el único valor característico de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su multiplicidad geométrica es _____.

***a*) 1** ***b*) 2** ***c*) 3**

Desarrollo de competencias A.1

De los problemas 1 al 26 calcule los valores característicos y los espacios de la matriz dada. Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} -12 & 7 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -9 & 7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **21.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **23.** $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $b \neq 0$ **24.** $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $bcd \neq 0$ **26.** $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & c & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$; $bc \neq 0$ **27.** $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

28. Demuestre que para cualesquiera números reales a y b, la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ tiene valores característicos $a \pm ib$.

De los problemas 28 al 34 suponga que la matriz A tiene valores característicos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

29. Demuestre que los valores característicos de A^t son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

30. Demuestre que los valores característicos de αA son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \ldots, \alpha\lambda_k$.

31. Demuestre que A^{-1} existe si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \neq 0$.

***32.** Si A^{-1} existe, demuestre que los valores característicos de A^{-1} son $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \ldots, 1/\lambda_k$.

33. Demuestre que la matriz $A - \alpha I$ tiene valores característicos $\lambda_1 - \alpha, \lambda_2 - \alpha, \ldots \lambda_k - \alpha$.

***34.** Demuestre que los valores característicos de A^2 son $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_k^2$.

***35.** Demuestre que los valores característicos de A^m son $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \ldots, \lambda_k^m$ para $m = 1, 2, 3, \ldots$

36. Sea λ un valor característico de A con $\mathbf{v}$ como el vector característico correspondiente. Sea $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n$. Defina la matriz $p(A)$ por $p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$. Demuestre que $p(A)\mathbf{v} = p(\lambda)\mathbf{v}$.

37. Utilizando el resultado del problema 36, demuestre que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ son valores característicos de A, entonces $p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_k)$ son vectores característicos de $p(A)$.

38. Demuestre que si A es una matriz diagonal, entonces los valores característicos de A son las componentes de la diagonal de A.

39. Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Demuestre que para cada matriz $\lambda = 2$ es un valor característico con multiplicidad algebraica 4. En cada caso calcule la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$.

***40.** Sea A una matriz real de $n \times n$. Demuestre que si λ_1 es un valor característico complejo de A con vector característico $\mathbf{v}_1$, entonces $\bar{\lambda}_1$ es un valor característico de A con vector característico $\bar{\mathbf{v}}_1$.

41. Una **matriz de probabilidad** es una matriz de $n \times n$ que tiene dos propiedades:

i) $a_{ij} \geq 0$ para toda i y j.

ii) La suma de las componentes en cada columna es 1.

Demuestre que 1 es un valor característico de toda matriz de probabilidad.

42. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Suponga que $b \neq 0$. Sea m una raíz (real o compleja) de la ecuación

$$bm^2 + (a - d)m - c = 0$$

demuestre que $a + bm$ es un valor característico de A con vector característico correspondiente $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$. Esto proporciona un método sencillo para calcular los valores y vectores característicos de las matrices de 2×2. [Este procedimiento apareció en el artículo "A Simple Algorithm for Finding Eigenvalues and Eigenvectors for 2×2 Matrices" de Tyre A. Newton en el *American Mathematical Monthly*, 97(1), enero 1990, 57-60.]

43. Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz de 2×2. Demuestre que d es un valor característico de A con vector característico correspondiente $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

44. Sea $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

i) Demuestre que los valores característicos son $\alpha + i\beta$.

ii) Encuentre los valores característicos de la matriz $B = A^t A$.

MANEJO DE LA CALCULADORA

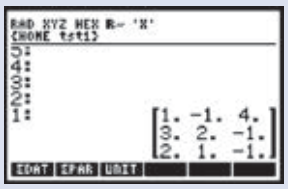
Los valores y vectores característicos se pueden obtener directamente en la HP 50g. Suponga que se introduce una matriz cuadrada A en el primer renglón de la pila, el comando EGV regresa los vectores característicos y los valores característicos de la matriz A como se muestra a continuación.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y se quieren obtener los vectores y valores característicos procedemos como sigue: escribimos la matriz en el primer renglón de la pila

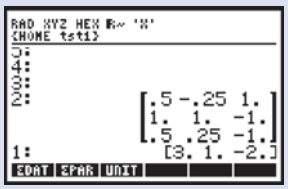
[ ] " " [ ] " " 1 SPC 1 +/-w SPC 4 ▶

[ ] " " 3 SPC 2 SPC 1 +/-w ▶

[ ] " " SPC 2 SPC 1 SPC 1 +/-w ENTER



ALPHA ALPHA E G V ENTER (ejecutando el comando para obtener valores y vectores característicos).



Las columnas de la matriz que se encuentra en el renglón 2 de la pila son los vectores característicos y el vector que aparece en el renglón 1 contiene los valores característicos. Para mayor información consulte el Manual del Usuario de la calculadora.

De los problemas 44 al 47 encuentre, con una calculadora, los valores característicos y un conjunto correspondiente de vectores característicos para cada matriz.

45. $\begin{pmatrix} 102 & -11 & 56 \\ 38 & -49 & 75 \\ 83 & 123 & -67 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} -0.031 & 0.082 & 0.095 \\ -0.046 & 0.067 & -0.081 \\ 0.055 & -0.077 & 0.038 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 12 & 14 & 18 \\ 26 & 21 & 19 & 27 & 16 \\ 31 & 29 & 37 & 41 & 56 \\ 51 & 38 & 29 & 46 & 33 \\ 61 & 41 & 29 & 38 & 50 \end{pmatrix}$

De los problemas 48 al 52 existe un valor característico de multiplicidad algebraica 6. Determine su multiplicidad geométrica. Observe que un número como $4E - 13 = 4 \times 10^{-13}$ es, en efecto, igual a cero.

48. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **49.** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **51.** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ **52.** $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN

I. V II. V III. F IV. F V. V VI. *c*) VII. *b*)

A.2 MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACIÓN

En esta sección se describe una relación interesante y útil que se puede cumplir entre dos matrices.

DEFINICIÓN 1

Matrices semejantes

Se dice que dos matrices A y B de $n \times n$ son **semejantes** si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que

$$B = C^{-1}AC \tag{1}$$

TRANSFORMACIÓN DE SEMEJANZA

La función definida por (1) que lleva la matriz A en la matriz B se denomina **transformación de semejanza**. Se puede escribir esta transformación lineal como

$$T(A) = C^{-1}AC$$

Nota. $C^{-1}(A_1 + A_2)C = C^{-1}A_1C + C^{-1}A_2C$ y $C^{-1}(\alpha A)C = \alpha C^{-1}AC$ de manera que la función definida por (1) es, de hecho, una transformación lineal. Esto explica el uso de la palabra "transformación".

El propósito de esta sección es demostrar que: 1) las matrices semejantes tienen varias propiedades importantes comunes y 2) la mayoría de las matrices son semejantes a las matrices diagonales.

Nota. Suponga que $B = C^{-1}AC$. Entonces al multiplicar por la izquierda por C, se obtiene $CB = CC^{-1}AC$, o sea

$$CB = AC \tag{2}$$

La ecuación (2) con frecuencia se toma como una definición alternativa de semejanza:

Definición alternativa de semejanza

A y B son semejantes si y sólo si existe una matriz invertible C tal que

$$CB = AC$$

EJEMPLO 1 **Dos matrices semejantes**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces $CB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Así, $CB = AC$. Como $\det C = 1 \neq 0$, C es invertible. Esto muestra, por la ecuación (2), que A y B son semejantes.

EJEMPLO 2 **Una matriz semejante a una matriz diagonal**

Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. C es invertible porque $\det C = 3 \neq 0$. Después calculamos.

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Entonces $CA = DC$ y $A = C^{-1}DC$, por lo tanto A y D son semejantes.

Nota. En los ejemplos 1 y 2 no fue necesario calcular C^{-1}. Sólo fue necesario saber que C era no singular.

TEOREMA 1

Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, por consiguiente, tienen los mismos valores característicos.

DEMOSTRACIÓN

Como A y B son semejantes, $B = C^{-1}AC$ y

$$\begin{aligned}\det(B-\lambda I) &= \det(C^{-1}AC-\lambda I) = \det\left[C^{-1}AC-C^{-1}(\lambda I)C\right]\\ &= \det\left[C^{-1}(A-\lambda I)C\right] = \det(C^{-1})\det(A-\lambda I)\det(C)\\ &= \det(C^{-1})\det(C)\det(A-\lambda I) = \det(C^{-1}C)\det(A-\lambda I)\\ &= \det I \det(A-\lambda I) = \det(A-\lambda I)\end{aligned}$$

Esto significa que A y B tienen la misma ecuación característica, y como los valores característicos son raíces de la ecuación característica, tienen los mismos valores característicos.

EJEMPLO 3 Los valores característicos de matrices semejantes son los mismos

En el ejemplo 2 es obvio que los valores característicos de $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ son 1, -1 y 2. Entonces éstos son los valores característicos de $A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Verifique esto viendo si se cumple que $\det(A - I) = \det(A + I) = \det(A - 2I) = 0$.

En muchas aplicaciones resulta útil "diagonalizar" una matriz A, es decir, encontrar una matriz diagonal semejante a A.

DEFINICIÓN 2 Matriz diagonalizable

Una matriz A de $n \times n$ es **diagonalizable** si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D.

Observación. Si D es una matriz diagonal, entonces los valores característicos son sus componentes en la diagonal. Si A es semejante a D, entonces A y D tienen los mismos valores característicos (por el teorema 1). Uniendo estos dos hechos se observa que si A es diagonalizable, entonces A es semejante a una matriz diagonal cuyas componentes en la diagonal son los valores característicos de A.

El siguiente teorema establece cuándo una matriz es diagonalizable.

TEOREMA 2

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores característicos linealmente independientes. En tal caso, la matriz diagonal D semejante a A está dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A. Si C es una matriz cuyas columnas son vectores característicos linealmente independientes de A, entonces

$$D = C^{-1}AC \tag{3}$$

DEMOSTRACIÓN

Primero se supone que A tiene n vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ que corresponden a los valores característicos (no necesariamente diferentes) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Sea

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}$$

y sea

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces C es invertible ya que sus columnas son linealmente independientes. Ahora bien

$$AC = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

y se ve que la columna i de AC es $A \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix} = A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$. Así, AC es la matriz cuya columna i es $\lambda_i \mathbf{v}_i$ y

$$AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Pero

$$CD = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 c_{11} & \lambda_2 c_{12} & \cdots & \lambda_n c_{1n} \\ \lambda_1 c_{21} & \lambda_2 c_{22} & \cdots & \lambda_n c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 c_{n1} & \lambda_2 c_{n2} & \cdots & \lambda_n c_{nn} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AC = CD \tag{4}$$

y como C es invertible, se pueden multiplicar ambos lados de (4) por la izquierda por C^{-1} para obtener

$$D = C^{-1}AC \tag{5}$$

Esto prueba que si A tiene n vectores característicos linealmente independientes, entonces A es diagonalizable. Inversamente, suponga que A es diagonalizable; esto es, suponga que (5) se cumple para alguna matriz invertible C. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ las columnas de C. Entonces $AC = CD$, e invirtiendo los argumentos anteriores, se ve de inmediato que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son los vectores característicos de A y son linealmente independientes porque C es invertible.

Notación. Para indicar que D es la matriz diagonal con componentes diagonales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se escribirá $D = \text{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

El teorema 2 tiene un corolario útil que se deduce directamente del teorema A.1.3.

COROLARIO

Si la matriz A de $n \times n$ tiene n valores característicos diferentes, entonces A es diagonalizable.

Observación. Si se seleccionan al azar los coeficientes reales de un polinomio de grado n entonces, con probabilidad 1, el polinomio tendrá n raíces diferentes. No es difícil ver, intuitivamente, por qué esto se cumple. Si $n = 2$, por ejemplo, entonces la ecuación $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene raíces reales si y sólo si $\alpha^2 = 4b$ —un evento muy improbable si a y b se eligen al azar—. Por supuesto, se pueden escribir polinomios que tienen raíces de multiplicidad algebraica mayor que 1, pero son excepcionales. Por lo tanto, sin pretender precisión matemática, es posible decir que la *mayoría* de los polinomios tienen raíces distintas. De esta forma, la *mayoría* de las matrices tienen valores característicos distintos y como se estableció al principio de esta sección, la *mayor parte* de las matrices son diagonalizables.

EJEMPLO 4 **Diagonalización de una matriz de 2 × 2**

Sea $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$. En el ejemplo A.1.3 se encontraron dos vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Después, haciendo $C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ se encontró que

$$C^{-1}AC=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\ -3 & 6\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

que es la matriz cuyas componentes en la diagonal son los valores característicos de A.

EJEMPLO 5 **Diagonalización de una matriz de 3 × 3 con tres valores característicos distintos**

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$. En el ejemplo A.1.4, se calcularon tres vectores característicos-linealmente independientes $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 4\\ 1\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ -1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$. Entonces $C=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y

$$C^{-1}AC=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 6\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & -2 & 6\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -2 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6 & 0 & 0\\ 0 & 12 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

con valores característicos 1, −2 y 3.

Observación. Como existe un número infinito de maneras en las cuales se puede elegir un vector característico, existe un número infinito de formas para seleccionar una matriz de diagonalización C. El único consejo es elegir los vectores característicos y la matriz C que sean los de más sencillo manejo aritmético. En términos generales, esto quiere decir que debe insertarse el mayor número de ceros y unos posible.

EJEMPLO 6 **Diagonalización de una matriz de 3 × 3 con dos valores característicos distintos y tres vectores característicos linealmente independientes**

Sea $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Entonces, del ejemplo A.1.10, se tienen tres vectores característicos linealmente independientes $\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 0\end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_3=\begin{pmatrix}0\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$. Estableciendo $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ se obtiene

$$C^{-1}AC = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -5 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 \\ 16 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -72 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Este ejemplo ilustra que A es diagonalizable aun cuando sus valores característicos no sean diferentes.

EJEMPLO 7 **Una matriz de 2×2 con sólo un vector característico linealmente independiente que no se puede diagonalizar**

Sea $A = -\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. En el ejemplo A.1.9, se vio que A *no* tiene dos vectores característicos linealmente independientes. Suponga que A fuera diagonalizable (lo que contradice el teorema 2). Entonces $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y existiría una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$. Multiplicando esta ecuación por la izquierda por C y por la derecha por C^{-1}, se encuentra que $A = CDC^{-1} = C\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}C^{-1} = C(4I)C^{-1} = 4CIC^{-1} = 4CC^{-1} = 4I = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = D$. Pero $A \neq D$ y por lo tanto no existe tal C.

AUTOEVALUACIÓN

Para los siguientes enunciados, diga si son falsos o verdaderos

I. Si una matriz de $n \times n$ tiene n valores característicos diferentes, se puede diagonalizar.

II. Si la matriz A de 5×5 tiene tres valores característicos diferentes, entonces A no puede ser semejante a la matriz diagonal.

III. Si A es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces sus valores característicos son 1, 2 y 3.

Desarrollo de competencias A.2

De los problemas 1 al 20 determine si la matriz dada A es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz C tal que $C^{-1}AC = D$. Verifique que $AC = CD$ y que los elementos distintos de cero de D sean los valores característicos de A.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **6.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **12.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **14.** $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **15.** $\begin{pmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ **17.** $\begin{pmatrix} 0 & -15 & -6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 15 & 9 \end{pmatrix}$ **18.** $\begin{pmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ **20.** $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

21. Demuestre que si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

22. Si A es semejante a B, demuestre que A^n es semejante a B^n para cualquier entero positivo n.

***23.** Si A es semejante a B, demuestre que $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$ [*sugerencia:* primero demuestre que si C es invertible, entonces $\nu(CA) = \nu(A)$ demostrando que $\mathbf{x} \in$ NA si y sólo si $\mathbf{x} \in$ NCA. Después demuestre que $\rho(AC) = \rho(A)$ demostrando que RA = RAC. Concluya que $\rho(AC) = \rho(CA) = \rho(A)$. Por último, use el hecho de que C^{-1} es invertible para demostrar que $\rho(^{-1}AC) = \rho(A)$].

24. Sea $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule D^{20}.

25. Si A es semejante a B, demuestre que $\det A = \det B$.

26. Suponga que $C^{-1}AC = D$. Demuestre que para cualquier entero n, $A^n = CD^nC^{-1}$. Esto proporciona una forma sencilla para calcular las potencias de una matriz diagonalizable.

27. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Calcule A^{20} [*sugerencia*: encuentre C tal que $A = CDC^{-1}$].

***28.** Sea A una matriz de $n \times n$ cuya ecuación característica es $(\lambda - c)^n = 0$. Demuestre que A es diagonalizable si y sólo si $A = cI$.

29. Use el resultado del problema 26 y el ejemplo 6 para calcular A^{10}, si $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

***30.** Sean A y B dos matrices reales de $n \times n$ con valores característicos distintos. Demuestre que $AB = BA$ si y sólo si A y B tienen los mismos vectores característicos.

31. Si A es diagonalizable, demuestre que $\det A = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son los valores característicos de A.

Respuestas a la autoevaluación

I. V **II.** F **III.** V

A.3 FORMAS CUADRÁTICAS Y SECCIONES CÓNICAS

En esta sección se utiliza el material anterior para extraer información sobre las gráficas de ecuaciones cuadráticas. Las ecuaciones y las formas cuadráticas que se definen a continuación, surgen de muchas maneras. Por ejemplo, se pueden usar formas cuadráticas para obtener información sobre las secciones cónicas en $\mathbb{R}^2$ (círculos, parábolas, elipses, hipérbolas) y extender esta teoría para describir ciertas superficies, denominadas *superficies cuadráticas*, en $\mathbb{R}^3$. Estos temas se estudiarán más adelante en esta sección, aunque en este texto no se analizarán. Las formas cuadráticas surgen en una gran variedad de aplicaciones que van de la descripción de las funciones de costo en economía al análisis del control del recorrido de un cohete en el espacio.

DEFINICIÓN 1 **Ecuación cuadrática y forma cuadrática**

i) Una **ecuación cuadrática en dos variables sin términos lineales** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{1}$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$. Esto es, al menos uno de los números a, b y c es diferente de cero.

ii) Una **forma cuadrática en dos variables** es una expresión de la forma

$$F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{2}$$

donde $|a| + |b| + |c| \neq 0$.

Es evidente que las ecuaciones y las formas cuadráticas tienen una fuerte relación. Se comenzará el análisis de las formas cuadráticas con un ejemplo sencillo.

Considere la forma cuadrática $F(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sean $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Entonces

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x^2 - 2xy) + (-2xy + 3y^2) = x^2 - 4xy + 3y^2 = F(x, y)$$

De esta manera se ha "representado" la forma cuadrática $F(x, y)$ mediante la matriz simétrica A en el sentido de que

$$F(x, y) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \tag{3}$$

De forma inversa, si A es una matriz simétrica, entonces la ecuación (3) define una forma cuadrática $F(x, y) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Se puede representar $F(x, y)$ por muchas matrices pero sólo por una matriz simétrica. Para ver esto, sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 3 \end{pmatrix}$, donde $a + b = -4$. Entonces, $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = F(x, y)$. Si, por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$, entonces $A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ -7x + 3y \end{pmatrix}$ y $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = x^2 - 4xy + 3y^2$. Sin embargo, si insistimos en que A sea simétrica, entonces debe tenerse $a + b = -4$ y $a = b$. Este par de ecuaciones tiene una solución única $a = b = -2$.

Si $F(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ es una forma cuadrática, sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \tag{4}$$

Entonces

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + (b/2)y \\ (b/2)x + cy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= ax^2 + bxy + cy^2 = F(x, y)$$

Se regresa ahora a la ecuación cuadrática (1). Usando (3), se puede escribir (1) como

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d \tag{5}$$

donde A es simétrica. Existe una matriz ortogonal Q tal que $Q^t AQ = D$, donde $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ y λ_1 y λ_2 son valores característicos de A. Entonces $A = QDQ^t$ (recuerde que $Q^t = Q^{-1}$) y (5) se puede escribir como

$$(QDQ^t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = d \tag{6}$$

Pero dado que, $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{v} \cdot A^t\mathbf{y}$. Así

$$Q(DQ^t\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = DQ^t\mathbf{v} \cdot Q^t\mathbf{v} \tag{7}$$

de manera que (6) se convierte en

$$[DQ^t\mathbf{v}] \cdot Q^t\mathbf{v} = d \tag{8}$$

Sea $\mathbf{v}' = Q^t\mathbf{v}$. Entonces $\mathbf{v}'$ es un vector de 2 componentes y (8) se convierte en

$$D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = d \tag{9}$$

Considere (9) con más detenimiento. Se puede escribir $\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Como una matriz diagonal es simétrica, (9) define una forma cuadrática $\bar{F}(x', y')$ de las variables x' y y'. Si $D = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}$, entonces $D\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix}$ y $\bar{F}(x', y') = D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = \begin{pmatrix} a'x' \\ c'y' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = a'x'^2 + c'y'^2$

Es decir, $\bar{F}(x', y')$ *es una forma cuadrática en la que falta el término en* $x'y'$. Por lo tanto, la ecuación (9) es una ecuación cuadrática de las nuevas variables x', y' sin el término $x'y'$.

EJEMPLO 1 **Expresión de una forma cuadrática en las nuevas variables x' y y' sin el término $x'y'$**

Considere la ecuación cuadrática $x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$. Como se vio, la ecuación se puede escribir en la forma $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 6$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Esta matriz A se puede diagonalizar a $D = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{5} \end{pmatrix}$ usando la matriz ortogonal

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^t\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2x + \left(-1+\sqrt{5}\right)y \\ \left(1-\sqrt{5}\right)x + 2y \end{pmatrix}$$

y, para las nuevas variables, la ecuación se puede escribir como

$$\left(2-\sqrt{5}\right)x'^2 + \left(2+\sqrt{5}\right)y'^2 = 6$$

Se analizará de nuevo la matriz Q. Como Q es real y ortogonal, $1 = \det QQ^{-1} = \det QQ^t = \det Q \det Q^t = \det Q \det Q = (\det Q)^2$. Entonces $\det Q = \pm 1$. Si $\det Q = -1$, se pueden intercambiar los renglones de Q para hacer el determinante de esta nueva Q igual a 1. Así, se puede demostrar (vea el problema 44) que $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ para algún número θ con $0 \le \theta < 2\pi$. Pero del ejemplo 5.1.8, esto significa que Q es una matriz de rotación. Por lo tanto, se ha demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1 **Teorema de los ejes principales en $\mathbb{R}^2$**

Sea

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{10}$$

una ecuación cuadrática en las variables x y y. Entonces existe un número único θ en $[0, 2\pi]$ tal que la ecuación (10) se puede escribir en la forma

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d \tag{11}$$

donde x' y y' son los ejes obtenidos al rotar los ejes x y y un ángulo θ en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Más aún, los números a' y c' son los valores característicos de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$. Los ejes x' y y' se denominan **ejes principales** de la gráfica de la ecuación cuadrática (10).

EJES PRINCIPALES

Se puede usar el teorema 1 para identificar tres secciones cónicas importantes. Recuerde que las **ecuaciones estándar** de un círculo, elipse e hipérbola son

Círculo: $$x^2 + y^2 = r^2 \tag{12}$$

Elipse: $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

Hipérbola:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{14}$$
o
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{15}$$

EJEMPLO 2 Identificación de una hipérbola

Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$x^2 + 4xy + 3y^2 = 6 \tag{16}$$

Solución En el ejemplo 1 se encontró que esto se puede escribir como $\left(2-\sqrt{5}\right)x'^2 + \left(2+\sqrt{5}\right)y'^2 = 6$, o sea

$$\frac{y'^2}{6/\left(2+\sqrt{5}\right)} - \frac{x'^2}{6/\left(\sqrt{5}-2\right)} = 1$$

Ésta es la ecuación (15) con $a = \sqrt{6/\left(2+\sqrt{5}\right)} \approx 1.19$ y $b = \sqrt{6/\left(\sqrt{5}-2\right)} \approx 5.04$. Como

$$Q = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

y $\det Q = 1$, se tiene, usando el problema 44 y el hecho de que 2 y $-1+\sqrt{5}$ son positivos,

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \approx 0.85065$$

Entonces θ está en el primer cuadrante, y utilizando una calculadora, se encuentra que $\theta \approx 0.5536$ rad $\approx 31.7°$. Por lo tanto, (16) es la ecuación de una hipérbola estándar rotada un ángulo de 31.7° (vea la figura A.1).

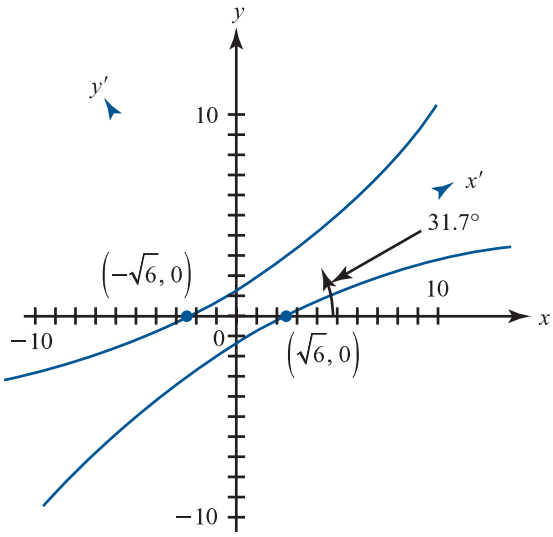


Figura A.1
La hipérbola
$x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$

EJEMPLO 3 Una elipse

Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4 \tag{17}$$

Solución En este caso $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, los valores característicos de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 6$ y dos vectores característicos ortonormales son $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Entonces $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Antes de continuar, debe observarse que $\det Q = -1$. Para que Q sea una matriz de rotación es necesario que $\det Q = 1$. Esto se logra fácilmente invirtiendo los vectores característicos. Así, se hace $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; ahora $\det Q = 1$.

Entonces $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y (17) se puede expresar como $D\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 4$ o

$$6x'^2 + 4y'^2 = 4 \tag{18}$$

donde

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}\, x - 1/\sqrt{2}\, y \\ 1/\sqrt{2}\, x + 1/\sqrt{2}\, y \end{pmatrix}$$

Reescribiendo (18), se obtiene $x'^2/\left(\frac{4}{6}\right) + y'^2/1 = 1$, que es la ecuación (13) con $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ y $b = 1$. Más aún, como $1/\sqrt{2} > 0$ y $-1/\sqrt{2} < 0$, del problema 44, se tiene $\theta = 2\pi - \cos^{-1}\left(1/\sqrt{2}\right) = 2\pi - \pi/4 = 7\pi/4 = 315°$. Por lo tanto (17) es la ecuación de una elipse estándar rotada un ángulo de 315° (o 45° en el sentido de las manecillas del reloj) (vea la figura A.2).

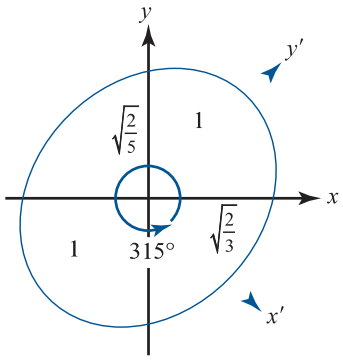


Figura A.2
La elipse
$5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$

EJEMPLO 4 Una sección cónica degenerada

Identifique la sección cónica cuya ecuación es

$$-5x^2 + 2xy - 5y^2 = 4 \tag{19}$$

Solución Haciendo referencia al ejemplo 3, la ecuación (19) se puede volver a escribir como

$$-6x'^2 - 4y'^2 = 4 \tag{20}$$

Como para cualesquiera números reales x' y y', $-6x'^2 - 4y'^2 \leq 0$, se ve que no existen números reales x y y que satisfagan (19). La sección cónica definida por (19) se denomina **sección cónica degenerada**.

Existe una manera sencilla de identificar la sección cónica definida por

$$ax^2 + bxy + cy^2 = d \tag{21}$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$, entonces la ecuación característica de A es

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - b^2/4) = 0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

Esto significa que $\lambda_1\lambda_2 = ac - b^2/4$. Pero como se ha visto, la ecuación (21) se puede volver a escribir como

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 = d \tag{22}$$

Si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, entonces (21) define una elipse (o un círculo) o una cónica degenerada como en los ejemplos 3 y 4. Si λ_1 y λ_2 tienen signo contrario, entonces (21) es la ecuación de una hipérbola (como en el [ejemplo 2). Por lo tanto, se puede probar el teorema 1 que se expuso más arriba.

Nota. En el ejemplo 2 se tenía $\det A = ac - b^2/4 = -1$. En los ejemplos 3 y 4 se tenía $\det A = 24$.

Los métodos que acaban de describirse se pueden usar para analizar las ecuaciones cuadráticas en más de dos variables. A continuación se proporciona un ejemplo.

EJEMPLO 5 **Una elipsoide**

Considere la ecuación cuadrática

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100 \tag{23}$$

Si $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, entonces (23) se puede escribir en la forma

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 100 \tag{24}$$

Por lo que $Q^t AQ = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, donde

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 4/3\sqrt{2} & 1/3 \end{pmatrix}$$

Sea

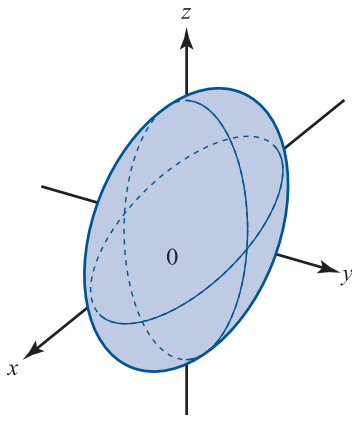
$$\mathbf{v}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = Q^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(1/\sqrt{2}\right)x + \left(1/\sqrt{2}\right)y \\ -\left(1/3\sqrt{2}\right)x - \left(1/3\sqrt{2}\right)y + \left(4/3\sqrt{2}\right)z \\ \left(2/3\right)x + \left(2/3\right)y + \left(1/3\right)z \end{pmatrix}$$

Entonces, como antes, $A = QDQ^t$ y $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = QDQ^t\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = DQ^t\mathbf{v} \cdot Q'\mathbf{v} = D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}$. Por lo tanto, (24) se puede escribir en términos de las nuevas variables x', y', z' como $D\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}' = 100$, o sea

$$x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100 \qquad \textbf{(25)}$$

En $\mathbb{R}^3$ la superficie definida por (25) se denomina **elipsoide** (vea la figura A.3).



$y'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100$

Figura A.3
El elipsoide $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$, que se puede escribir en las nuevas variables como $x'^2 + y'^2 + 10z'^2 = 100$.

Existe una gran variedad de superficies de tres dimensiones de la forma $A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = d$, donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Esas superficies se denominan **superficies cuadráticas**.

Podemos cerrar esta sección con la observación de que las formas cuadráticas se pueden definir en términos de cualquier número de variables.

DEFINICIÓN 2 **Forma cuadrática**

Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Entonces una **forma cuadrática** en x_1, $x_2, \ldots, x_n$ es una expresión de la forma

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \qquad \textbf{(26)}$$

EJEMPLO 6 **Una forma cuadrática en cuatro variables**

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

Entonces

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 \\ -2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_2^2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3 + 7x_3^2 - 4x_1x_4 + 10x_2x_4 - 2x_3x_4 + 3x_4^2$$

(después de simplificar).

EJEMPLO 7 Una matriz simétrica que corresponde a una forma cuadrática en cuatro variables

Encuentre la matriz simétrica A que corresponde a la forma cuadrática

$$5x_1^2 - 3x_1x_2 + 4x_2^2 + 8x_1x_3 - 9x_2x_3 + 2x_3^2 - x_1x_4 + 7x_2x_4 + 6x_3x_4 + 9x_4^2$$

Solución Si $A = (a_{ij})$, entonces, observando los ejemplos anteriores de esta sección, se ve que a_{ii} es el coeficiente del término x_i^2 y $a_{ij} + a_{ji}$ es el coeficiente del término x_ix_j. Como A es simétrica, $a_{ij} = a_{ji}$; así, $a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2}$ (coeficientes del término x_ix_j). Uniendo todo esto se obtiene

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 & -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \\ 4 & -\frac{9}{2} & 2 & 3 \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Autoevaluación

Elija el inciso que mejor responda a lo planteado en el enunciado.

I. Si A es una matriz simétrica real con dos valores característicos positivos, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a) una parábola ***b)*** una elipse ***c)*** una hipérbola

d) dos rectas ***e)*** ninguna de las anteriores

II. Si A es una matriz simétrica real con un valor característico positivo y otro negativo, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de

a) una parábola ***b)*** una elipse ***c)*** una hipérbola

d) dos rectas ***e)*** ninguna de las anteriores

III. **Si A es una matriz simétrica real con un valor característico positivo y uno igual a cero, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de**

a) una parábola ***b)*** una elipse ***c)*** una hipérbola

d) dos rectas ***e)*** ninguna de las anteriores

IV. **Si A es una matriz simétrica real con dos valores característicos negativos, entonces $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d > 0$ es la ecuación de**

a) una parábola ***b)*** una elipse ***c)*** una hipérbola

d) dos rectas ***e)*** ninguna de las anteriores

Desarrollo de competencias A.3

De los problemas 1 al 17 escriba la ecuación cuadrática en la forma $A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = d$ (donde A es una matriz simétrica) y elimine el término xy rotando los ejes un ángulo θ. Escriba la ecuación en términos de las nuevas variables e identifique la sección cónica obtenida.

1. $3x^2 - 2xy - 5 = 0$ **2.** $4x^2 + 4xy + y^2 = 9$ **3.** $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 5$

4. $4x^2 + 4xy - y^2 = 9$ **5.** $xy = 1$ **6.** $3xy = 1$

7. $xy = a;\ a > 0$ **8.** $4x^2 + 2xy + 3y^2 + 2 = 0$ **9.** $xy = a;\ a < 0$

10. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6 = 0$ **11.** $-x^2 + 2xy - y^2 = 0$ **12.** $2x^2 + xy + y^2 = 4$

13. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 5$ **14.** $3x^2 - 6xy + 5y^2 = 36$ **15.** $x^2 - 3xy + 4y^2 = 1$

16. $x^2 + xy + y^2 = 5$ **17.** $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$

18. ¿Cuáles son las formas posibles de la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$?

De los problemas 19 al 23 escriba la forma cuadrática en términos de las nuevas variables x', y' y z' de manera que no estén presentes los términos de productos cruzados (xy, xz, yz).

19. $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$ **20.** $-x^2 + 4xy - y^2 + 4xz + 4yz + z^2$

21. $x^2 + xy + y^2 + 3xz + z^2$ **22.** $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2$

23. $x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2$

De los problemas 24 al 26 encuentre una matriz simétrica A tal que la forma cuadrática se pueda escribir en la forma $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$.

24. $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 + 3x_3^2 + 7x_1x_4 - 2x_2x_4 + x_4^2$

25. $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_4 + x_4^2$

26. $3x_1^2 - 7x_1x_2 - 2x_2^2 + x_1x_3 - x_2x_3 + 3x_3^2 - 2x_1x_4 + x_2x_4 - 4x_3x_4 - 6x_4^2$
$+ 3x_1x_5 - 5x_3x_5 + x_4x_5 - x_5^2$

27. Suponga que para algún valor de d diferente de cero, la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ es una hipérbola. Demuestre que la gráfica es una hipérbola para cualquier otro valor de d diferente de cero.

28. Demuestre que si $a \neq c$, el término xy en la ecuación cuadrática (1) se elimina rotando un ángulo 0, si θ está dado por $\cot 2\theta = (a - c)/b$.

29. Demuestre que si $a = c$ en el problema 28, entonces el término xy se elimina rotando un ángulo $\pi/4$ o un ángulo $-\pi/4$.

***30.** Suponga que una rotación convierte a $ax^2 + bxy + cy^2$ en $a'(x')^2 + b'(x'y') + c'(y')^2$. Demuestre que:

a) $a + c = a' + c'$ ***b)*** $b^2 - 4ac = b'^2 - 4a'c'$

31. Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es **positiva definida** si $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para toda $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $F(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Demuestre que F es positiva definida si y sólo si la matriz simétrica A asociada a F tiene valores característicos positivos.

32. Se dice que una forma cuadrática $F(\mathbf{x})$ es **positiva semidefinida** si $F(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que F es positiva semidefinida si y sólo si los valores característicos de la matriz simétrica asociada a F son todos no negativos.

Las definiciones de **negativa definida** y **negativa semidefinida** son las definiciones en los problemas 31 y 32 sustituyendo ≥ 0 por ≤ 0. Una forma cuadrática es **indefinida** si no es de los tipos anteriores. De los problemas 33 al 43 determine si la forma cuadrática dada es positiva definida, positiva semidefinida, negativa definida, negativa semidefinida o indefinida.

33. $3x^2 + 2y^2$ **34.** $x^2 - y^2$ **35.** $-3x^2 - 3y^2$ **36.** $3x^2 - 2y^2$

37. $3x^2 - 20xy + y^2$ **38.** $x^2 + 2xy + 2y^2$ **39.** $x^2 - 2xy + 2y^2$ **40.** $x^2 - 4xy + 3y^2$

41. $-x^2 + 4xy - 3y^2$ **42.** $-2x^2 + xy - 2y^2$ **43.** $-x^2 + 2xy - 2y^2$

***44.** Sea $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz ortogonal real con $\det Q = 1$. Defina el número $\theta \in [0, 2\pi]$:

a) Si $a \geq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = -\cos^{-1} a$ $\quad (0 < \theta \leq \pi/2)$.

b) Si $a \geq 0$ y $c < 0$, entonces $\theta = 2\pi - \cos^{-1} a$ $\quad (3\pi/2 \leq \theta < 2\pi)$.

c) Si $a \leq 0$ y $c > 0$, entonces $\theta = \cos^{-1} a$ $\quad (\pi/2 \leq \theta < \pi)$.

d) Si $a \leq 0$ y $c < 0$, entonces $\theta = 2\pi - \cos^{-1} a$ $\quad (\pi < \theta \leq 3\pi/2)$.

e) Si $a = 1$ y $c = 0$, entonces $\theta = 0$.

f) Si $a = -1$ y $c = 0$, entonces $\theta = \pi$

(Aquí $\cos^{-1} x \in [0, \pi]$ para $x \in [-1, 1]$.) Si se elige θ como se describió, demuestre que

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

45. Demuestre, utilizando la fórmula (22), que la ecuación (21) es la ecuación de dos rectas en el plano xy cuando $d = 0$ y $\det A \neq 0$. Si $\det A = d = 0$, demuestre que la ecuación (21) es la ecuación de una sola recta.

46. Sea A la representación matricial simétrica de la ecuación cuadrática (1) con $d \neq 0$. Sean λ_1 y λ_2 los valores característicos de A. Demuestre que (1) es la ecuación de *a*) una hipérbola si $\lambda_1\lambda_2 < 0$ y *b*) un círculo, elipse o sección cónica degenerada si λ_1 y $\lambda_2 > 0$.

Respuestas a la autoevaluación

I. *b)* **II.** *c)* **III.** *d)* **IV.** *e)*

Respuestas

A PROBLEMAS IMPARES

UNIDAD 1

1. $9 - 7i$. **3.** $9 + 2i$. **5.** $29 + 2i$.

7. $-27 + 5i$. **9.** $-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

11. $2\sqrt{2}e^{-\frac{3\pi i}{4}}$. **13.** $3\sqrt{2}e^{i(7\pi/4)} = 3\sqrt{2}e^{-i(\pi/4)}$

15. $6e^{(\pi/6)i}$ **17.** $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$

19. $-1 + i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$ **21.** $e^{3\pi i} = -1$

23. $e^{2\pi i} = 1$ **25.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{4} - i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

27. $3\sqrt{3} + 3i$ **29.** $-2\sqrt{3} - 2i$

31. $-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}\,i$ **33.** $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$

35. $3 + 4i$ **37.** $4 - 6i$.

39. $\overline{-7i} = 7i$ **41.** $7e^{-\frac{2\pi i}{7}}$

43. $7e^{\frac{3\pi i}{5}}$ **45.** $e^{-0.012i}$

47. Buscamos los números $z = \alpha + i\beta$ tal que $z = -\overline{z}$, por lo tanto $z = -\overline{z} \Rightarrow \alpha + i\beta = \overline{-(\alpha + i\beta)} \Rightarrow \alpha + i\beta = -(\alpha - i\beta) \Rightarrow \alpha = 0$, esto significa que los únicos números que tienen la propiedad $z = -\overline{z}$ son aquellos que su parte real es cero, es decir, z es un imaginario puro.

49. La ecuación de una circunferencia centrada en el origen de radio unitario se puede escribir como $x^2 + y^2 = 1$. Sea $z = x + iy$ entonces $|z|^2 = z\overline{z} = (x + iy)(x + iy) = x^2 + y^2$; por lo tanto un círculo unitario se puede representar por $|z| = 1$.

51. Es el conjunto de puntos que incluyen al círculo de radio a centrado en z_0 y a todo su interior.

53. Suponga que $p(z) = \overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0}$. Entonces

$\overline{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{0} = 0 =$

$\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} =$

$\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0$ (ya que las a_i son reales) $= \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 = p(\overline{z}) = 0$

Aquí, se ha usado el hecho de que para cualquier entero k $\overline{(zk)} = (\overline{z})^k$.

55. Como $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^1 = \cos 1 \cdot \theta + i\,\text{sen}\,1 \cdot \theta$, la fórmula de DeMoivre se cumple para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$; es decir, $(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k = \cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta$. Entonces $(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^k(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = (\cos k\theta + i\,\text{sen}\,k\theta) \times (\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = [\cos k\theta$

$\cos\theta - \operatorname{sen} k\theta \operatorname{sen}\theta] + i[\operatorname{sen} k\theta \cos\theta + \cos k\theta \operatorname{sen}\theta] = \cos(k\theta + \theta) + i\operatorname{sen}(k\theta + \theta) = \cos(k+1)\theta + i\operatorname{sen}(k+1)\theta$, que es la fórmula de DeMoivre para $n = k + 1$.

UNIDAD 2

Problemas 2.2

1. $x = -\frac{13}{5}, \quad y = -\frac{11}{5}$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -10$

3. $x = -\frac{17}{19} \quad y = \frac{23}{19}$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 19$

5. No hay solución

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$

7. $x = \frac{11}{2} \quad y = -30$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -2$

9. $x = 0 \quad y = 0$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -11$

11. $x = \frac{3}{7} \quad y = \frac{3}{7}$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 21$

13. $x = -1 \quad y = 2$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -1$

15. $x = \frac{c}{a+b} \quad y = \frac{c}{a+b}$

$a \neq 0, \quad b \neq 0 \quad \text{y} \quad a + b \neq 0$

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a^2 - b^2$

17. $K \neq -2$ y $K \neq 1$ porque

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13}$

$- a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} = (K-1)^2(K+2) \neq 0$

$x = \frac{1}{2+K}, \quad y = \frac{1}{2+K} \quad z = \frac{1}{2+K}$

19. Se necesita que $-ab - ab = -2ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ y $b \neq 0$.

21. Se necesita que $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ y $b = 0$, $c \neq 0$ o $d \neq 0$.

23. El punto de intersección es

$$x = \frac{19}{20}, \quad y = -\frac{11}{20}.$$

25. No hay punto de intersección.

27. El punto de intersección es $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{13}{4}$.

29. El punto de intersección es $x = \frac{67}{45}$, $y = \frac{2}{15}$.

31. Sea m_1 la pendiente de L y sea m_2 la pendiente de $L_\perp$, entonces $m_1 = -\frac{2}{3}$; $m_2 = \frac{3}{2}$

$L: 2x + 3y = 1$ y $L_\perp: 2x + 3y = 0$.

Punto de intersección $\left(-\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right)$

$$d = \sqrt{\left(-\frac{2}{13} - 0\right)^2 + \left(-\frac{3}{13} - 0\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

33. Sea m_1 la pendiente de L y sea m_2 la pendiente de $L_\perp$, entonces $m_1 = \frac{5}{6}$; $m_2 = -\frac{6}{5}$.

$L: 5x + 6y = 3$ y $L_\perp: 6x + 5y = 28$.

Punto de intersección $(3, 2)$

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + \left(2 - \frac{16}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{5}$$

35. Sea m_1 la pendiente de L y sea m_2 la pendiente de $L_\perp$, entonces $m_1 = \frac{7}{3}$; $m_2 = -\frac{3}{7}$.

$L: -7x + 3y = 0$, y $L_\perp: 3x + 7y = -38$.

Punto de intersección $\left(-\frac{57}{29}, -\frac{133}{29}\right)$

$$d = \sqrt{\left(-1 + \frac{57}{29}\right)^2 + \left(-5 + \frac{133}{29}\right)^2} = \frac{2\sqrt{239}}{29}$$

37. El punto de intersección es (2, 1), la distancia entre el punto y la recta $2x - y = 6$ es $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

39. Sea x el número de aves y sea y el número de bestias, entonces $x + y = 60$; $2x + 4y = 200 \Rightarrow x = 20$ y $y = 40$.

41. Por contradicción, suponga lo contrario, es decir, suponga que existe solución única cuando $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. Del problema 40 se sabe que las rectas que forman al sistema (1) son paralelas. Por lo que el sistema (1) tiene un número infinito de soluciones o ninguna solución. Esto contradice la suposición de que existe solución única, por lo que se tiene la contradicción deseada.

43. Sea x el número de tazas y y el número de platos. Entonces $3x + 2y = 480$; $0.25x + 0.20y = 44 \Rightarrow x = 80$ y $y = 120$.

45. Las ecuaciones ahora son $3x + 2y = 480$; $0.15x + 0.10y = 24$ y el sistema no tiene solución.

Problemas 2.3

Nota: Cuando hay un número infinito de soluciones, se escriben soluciones seleccionando la última variable arbitrariamente. Las soluciones se pueden escribir de otras maneras.

1. $(2, -3, 1)$

3. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$

5. El sistema no tiene solución.

7. $(-9, 30, 14)$

9. El sistema no tiene solución.

11. $(0, 0, 0)$

13. $\left(\frac{34}{3}, -\frac{37}{6}, \frac{11}{3}\right)$

15. $(4 - 2x_2 + 4x_3, x_2, x_3)$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

17. $(7 - 2x_2 + x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4)$, $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

19. $\left(\frac{20}{13} - \frac{4}{13}x_4, -\frac{28}{13} + \frac{3}{13}x_4, -\frac{45}{13} + \frac{9}{13}x_4, x_4\right)$, $x_4 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

21. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4, -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x_4, -9 - 2x_4, x_4\right)$, $x_4 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

23. El sistema no tiene solución.

25. $\left(\frac{19}{5}, \frac{1}{5}\right)$

27. Forma escalonada por renglones.

29. Ninguna.

31. Forma escalonada reducida por renglones.

33. Ninguna.

35. Forma escalonada reducida por renglones.

37. Ninguna.

39. Forma escalonada por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forma escalonada reducida por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

41. Forma escalonada por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forma escalonada reducida por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

43. Forma escalonada por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

forma escalonada reducida por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

45. Forma escalonada por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

forma escalonada reducida por renglones

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

47. $x_1 = \frac{3560}{49},\ x_2 = \frac{2700}{49},\ x_3 = \frac{3200}{49}.$

49. 6 días en Inglaterra, 4 días en Francia y 4 días en España.

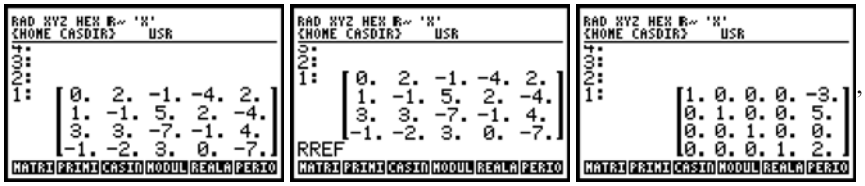
51. La información es inconsistente.

53. El sistema aumentado en forma reducida por renglones es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 5 & 7 & a-2b \\ 0 & 0 & 0 & -2a+b+c \end{array}\right)$.

por lo tanto el sistema es inconsistente si $-2a + b + c \neq 0$.

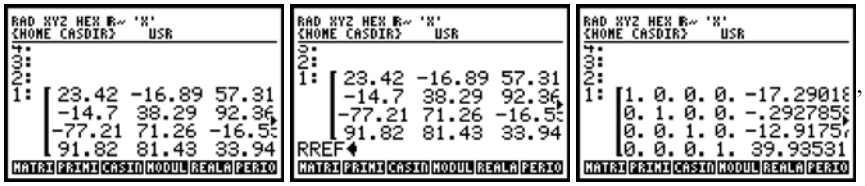
55. $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \neq 0$.

57.



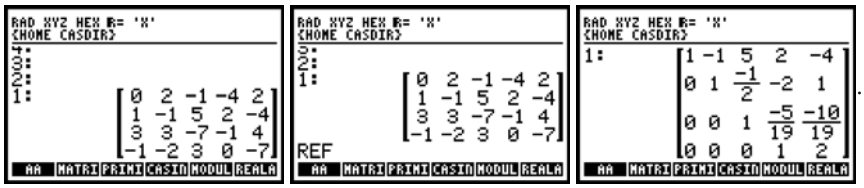
por lo tanto el resultado es $x_1 = -3,\ x_2 = 4,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2.$

59.

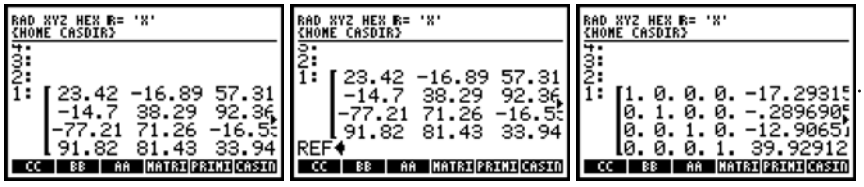


por tanto el resultado es $x_1 = -17.29,\ x_2 = -0.29,\ x_3 = -12.92,\ x_4 = 39.94.$

61.

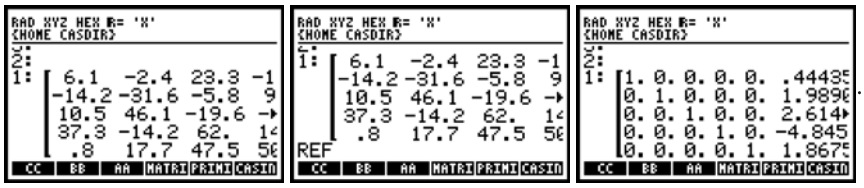


63.



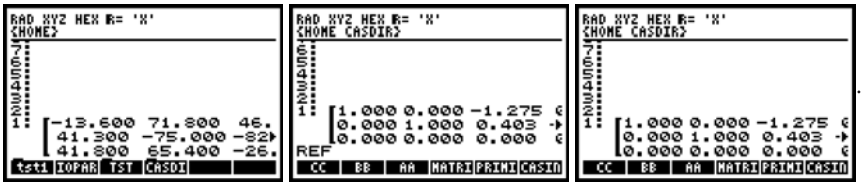
Si los elementos no son números exactos, el algoritmo produce la forma reducida por renglón.

65.



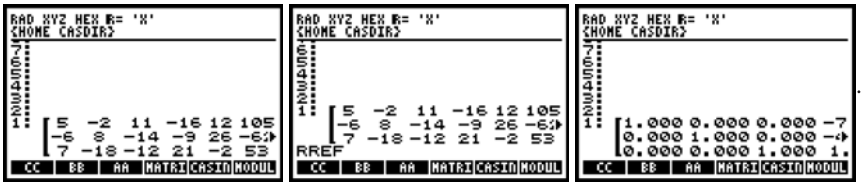
Si los elementos no son números exactos, el algoritmo produce la forma reducida por renglón.

67.



Observamos que tenemos un reglón de ceros por lo que se tienen infinitas soluciones. Al resolver el sistema $x_1 - 1.275x_3 = 0.961$, $x_2 + 0.403x_3 = -0.090$, se obtiene $(0.961 + 1.275x_3, -0.090 - 0.403x_3, x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$, arbitraria.

69.

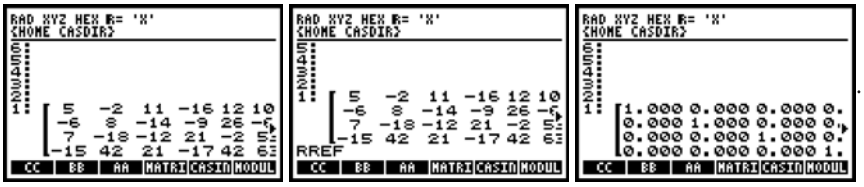


De la forma escalonada reducida se tiene que la matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7.616 & 11.870 & 31.348 \\ 0 & 1 & 0 & -4.867 & 6.775 & 11.043 \\ 0 & 0 & 1 & 1.121 & -3.072 & -2.696 \end{pmatrix}$$ de donde se obtiene como soluciones

$(31.348 + 7.616x_4 - 11.870x_5,\ 11.043 + 4.867x_4 - 6.774x_5,\ -2.696 - 1.121x_4 + 3.072x_5,\ x_4,\ x_5)$, $x_4, x_5 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

71.



De la forma escalonada reducida se tiene que la matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 11.870 & 50.540 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6.775 & 23.330 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3.072 & -5.520 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.520 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene como soluciones $(50.540 - 11.870x_5,\ 23.330 - 6.774x_5,\ -5.520 + 3.072x_5,\ 2.52,\ x_5)$, $x_5 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

Problemas 2.4

1. $(0, 0)$.

3. $(3x_2, x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

5. $\left(\frac{x_3}{6}, \frac{5x_3}{6}, x_3\right)$, $x_3 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

7. $\left(-\frac{4x_3}{7}, \frac{5x_3}{7}, x_3\right)$, $x_3 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

9. $(0, 0)$.

11. $\left(\frac{43x_3}{11} - x_4, \frac{4x_3}{11} - x_4, x_3, x_4\right)$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

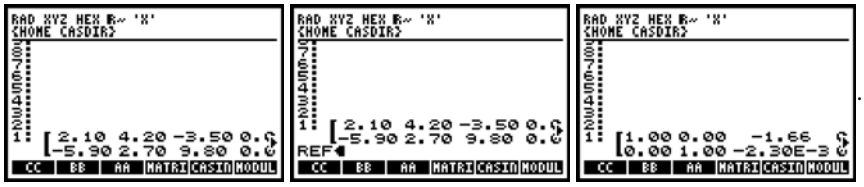
13. $(0, 0, 0, 0)$.

15. $(3x_2, x_2)$, $x_2 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

17. $(0, 0, 0)$.

19. $k = \frac{95}{11}$

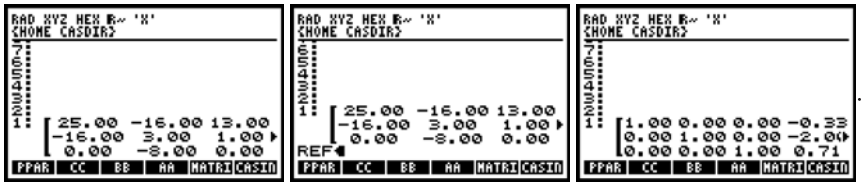
21.



De la forma escalonada reducida se tiene que la matriz aumentada es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1.66 & 0 \\ 0 & 1 & -0.0023 & 0 \end{pmatrix}$

de donde se obtiene como soluciones $(1.66x_3,\ 0.0023x_3,\ x_3)$, $x_3 \in \mathbb{R}$ arbitraria.

23.



De la forma escalonada reducida se tiene que la matriz aumentada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.33 & -0.15 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2.00 & 3.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.71 & -0.10 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene como soluciones $(0.33x_4,\ 0.15x_5,\ 2x_4 - 3.25x_5,\ -0.71x + 0.10x_5,\ x_4,\ x_5)$, $x_4,\ x_5 \in \mathbb{R}$ arbitrarias.

Ejercicios de repaso de la unidad 2

1. $\left(\frac{1}{7},\ \frac{10}{7}\right)$

3. No hay solución.

5. $(-1/3,\ 0,\ 7/3)$

7. $(0,\ 0,\ 0)$

9. $x_1 = \dfrac{95}{83},\quad x_2 = \dfrac{5}{83},\quad x_3 = -\dfrac{23}{83}$

11. $(0,\ 0,\ 0)$

13. $(0,\ 0)$

15. $(0,\ 2,\ -1,\ 3)$

17. $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$

19. Forma escalonada reducida por renglones.

21. Está en forma escalonada por renglones.

23. Forma escalonada reducida por renglones.

25.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -15 & -42 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

(Forma escalonada por renglones)

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{14}{5} \end{pmatrix}$$

(Forma escalonada reducida por renglones)

UNIDAD 3

Problemas 3.1

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} -11 \\ 12 \\ -25 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} 8 \\ -14 \\ 42 \end{pmatrix}$ **13.** $\begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 43 \end{pmatrix}$

15. $(3, 1, -5, 2)$

17. $(-8, 12, 4, 20)$

19. $(34, 12, -3, 48)$

21. $(3, 7, -32, 2)$

23. $(-1, 1, 10, 5)$

25. $(-7, 9, 18, 18)$

27. $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} -7 & -13 \\ -2 & -13 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} -13 & -21 \\ -11 & -23 \\ 14 & 1 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 7 & 15 \\ -15 & 10 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -9 & -13 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} -3 & 13 \\ 33 & 48 \\ -44 & 20 \end{pmatrix}$

41. $E = 3C - 2B - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 5 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

43. $A + 2B + 3E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -4 \\ \frac{16}{3} & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & -5 \\ -14 & 13 & -1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 3 & -8 & 5 \\ 21 & -20 & 2 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 9 & 10 & 5 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -10 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

53. $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ -8 & -4 & -9 \\ -6 & 8 & -2 \end{pmatrix}$

55. $D = -A - B - C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -5 \\ -9 & -5 & -10 \\ -7 & 7 & -3 \end{pmatrix}$

57. $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix} = A\left[2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

59. $(A + B) + C = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij})$, pero para cada i, j, la suma de escalares es asociativa, por lo que $(A + B) + C = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij}))$ $= A + (B + C)$

61. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

63. Los elementos de $\mathbf{d} + \mathbf{e}$ representan la demanda para los cuatro tipos de materia prima si cada fábrica va a producir una unidad. $2\mathbf{d}$ es el total de la materia prima que necesita la fábrica 1 para producir 2 unidades.

Problemas 3.2

1. -14

3. -23

5. 47

7. $xy + yz + zx$

9. Como $a_i^2 \geq 0$ entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$

11. -132

13. 4

15. 28

17. -48

19. $\begin{pmatrix} -17 & 12 \\ -1 & 18 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -9 & 34 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} -1 & 58 \\ -8 & 15 \end{pmatrix}$

25. No está definido.

27. $\begin{pmatrix} 18 & 15 & 35 \\ 9 & 21 & 13 \\ 10 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 7 & 16 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

37. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

39. $a = d$, b arbitraria y $c = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

41. Utilizando el principio de inducción matemática:

$n = 1$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

$n = k$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & (k+1)\alpha^k \\ 0 & \alpha^{k+1} \end{pmatrix}$$

$n = k + 1$ $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^k$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^k & k\alpha^{k-1} \\ 0 & \alpha^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^{k+1} & (k+1)\alpha^k \\ 0 & \alpha^{k+1} \end{pmatrix}$$

43. Realizando la operación indicada se llega a la conclusión.

45. Realizando las operaciones se verifica la propiedad.

47. ***a)*** Hay 2 personas en el grupo 1, 5 personas en el grupo 2 y 7 personas en el grupo 3.

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. No son ortogonales.

51. Ortogonales.

53. Ortogonales.

55. $\alpha = 5 - \frac{4}{5}\beta$

57. ***a)*** $(2,\ 3,\ 5,\ 1)$; ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 0.5 \\ 2 \end{pmatrix}$; ***c)*** total de horas, 11.

59. ***a)*** $\begin{pmatrix} 80\,000 & 45\,000 & 40\,000 \\ 50 & 20 & 10 \end{pmatrix}$; ***b)*** $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} 255\,000 \\ 120 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 32 & 32 \end{pmatrix}$

63. $\begin{pmatrix} n & 38 \\ 57 & 106 \end{pmatrix}$

65. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $A^5 = 0$

67. $PQ = \begin{pmatrix} \frac{11}{90} & \frac{41}{90} & \frac{19}{45} \\ \frac{11}{120} & \frac{71}{120} & \frac{19}{60} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$, cada componente es menor a la unidad y la suma por renglones es 1.

69. Como cada elemento de P y Q son positivos, los elementos de PQ son todos positivos. Si P y Q son matrices de $n \times n$, sea $\mathbf{v}$ el vector columna de dimensión n con cada elemento igual a 1; observe que si A es una matriz de $n \times n$, la suma por renglón de sus elementos es 1 si y sólo si $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$. Como $(PQ)\mathbf{v} = P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, se puede observar que PQ es una matriz de probabilidad.

71. ***a)*** $S_2 > S_4 > S_1 > S_3$

b) La calificación es el número de juegos ganados por el jugador i más la mitad de los juegos ganados de los jugadores que perdieron con el jugador i.

73. Al realizar las operaciones indicadas se llega al resultado.

75. $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 1 & 5 \\ \hline 18 & 42 & 6 & 30 \\ \hline 6 & 14 & 2 & 10 \end{array}\right)$

77. $\left(\begin{array}{cc|cc} e & f & 0 & 0 \\ g & h & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)$

79. $AB = \begin{pmatrix} I^2 & O \\ C + D & I^2 \end{pmatrix}$;

$BA = \begin{pmatrix} I^2 & O \\ C + D & I^2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = BA$

81. 36 **83.** 30 **85.** $\frac{19}{20}$ **87.** $\frac{689}{60}$

89. $(1^2 + 2^2 + 3^2)(2^3 + 3^3 + 4^3) = 1\,386$

91. $\sum_{i=0}^{5} (-3)^i$

93. $\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{1}{i}}$

95. $\sum_{i=0}^{3} \frac{(-1)^{i+1} x^{2i+1}}{(2i+1)!}$

97. $\sum_{k=1}^{8} (2k-1)(2k+1)$

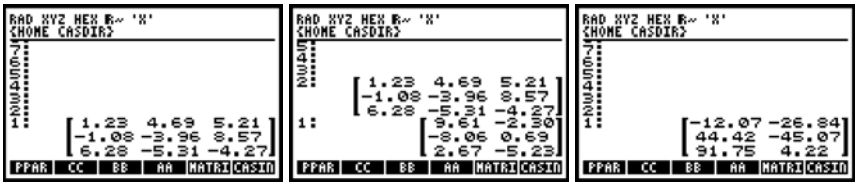
99. $\sum_{j=0}^{3} (a_{1j} + a_{2j})$

101. $\sum_{i=2}^{4}\sum_{j=1}^{4} a_{ij}$

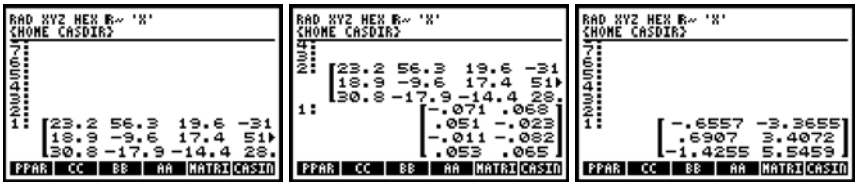
103. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} a_{2i}b_{ij}c_{j5}$

105. $\sum_{k=M}^{N}(a_k - b_k) = \sum_{k=M}^{N}(a_k + (-1)b_k) = \sum_{k=M}^{N} a_k + \sum_{k=M}^{N}(-1)b_k = \sum_{k=M}^{N} a_k - \sum_{k=M}^{N} b_k$

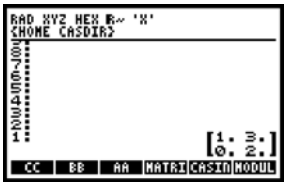
107.



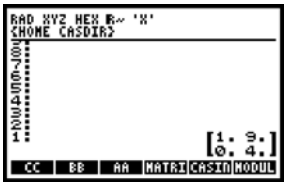
109.



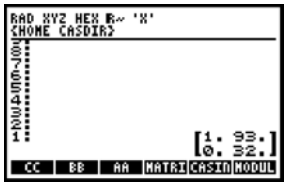
111. $A =$



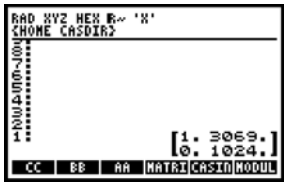
$A^2 =$



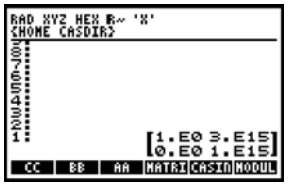
$A^5 =$



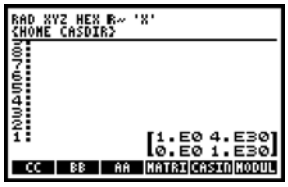
$A^{10} =$



$A^{50} =$



$A^{100} =$



Problemas 3.3

1. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 7 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.
$$x_1 + x_2 - x_3 = 7$$
$$4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4$$
$$6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20$$

11.
$$2x_1 + x_3 = 2$$
$$-3x_1 + 4x_2 = 3$$
$$5x_2 + 5x_3 = 5$$

13. $x_1 = 2$
$x_2 = 3$
$x_3 = -5$
$x_4 = 6$

15.
$$\begin{aligned} 9x_3 &= 2 \\ 3x_2 + 7x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 5x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \\ 6x_1 + 9x_2 &= 3 \end{aligned}$$

21. $\mathbf{x} = (2,\ 0) + x_2(3,\ 1)$

23. $\mathbf{x} = \left(\frac{20}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

25. $\mathbf{x} = (2,\ 1,\ 0) + x_3\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{4}{3},\ 1\right)$

27. $\mathbf{x} = (-1,\ 4,\ 0,\ 0) + (-3x_3 + 5x_4,\ 4x_3 - 7x_4,\ x_3,\ x_4)$

29. Sustituyendo $c_1y_1 + c_2y_2$ en la ecuación diferencial se tiene $(c_1y_1 + c_2y_2)'' + a(x)(c_1y_1 + c_2y_2)' + b(x)(c_1y_1 + c_2y_2) = 0$, agrupando en términos con y_1 y y_2, $c_1(y_1 + a(x)y_1 + b(x)y_1) + c_2(y_2 + a(x)y_2 + b(x)y_2) = 0$, pero como y_1 y y_2 son soluciones, $c_1(0) + c_2(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

31. Sustituyendo las condiciones iniciales $y(0) = 1 = c_1\cos(0) + c_2\,\text{sen}(0) \Rightarrow c_1 = 1$, $y'(0) = -1 = -c_1\,\text{sen}(0) + c_2\cos(0) \Rightarrow c_2 = -1$.

Problemas 3.4

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

3. No invertible.

5. No invertible.

7. No invertible.

9. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{22}{35} & \frac{3}{35} & \frac{9}{35} \\ \frac{19}{35} & -\frac{1}{35} & -\frac{3}{35} \end{pmatrix}$

11. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. No invertible.

15. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{15} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

17. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

19. No invertible.

21. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

23. Observe que $A_1A_2\cdots A_mA_m^{-1}\cdots A_2^1A_1^{-1} = I$. Entonces por el teorema 8 $A_1A_2\cdots A_m$ es invertible con inversa $A_m^{-1}\cdots A_2^1A_1^{-1} = (A_1A_2\cdots A_m)^{-1}$

25. Si $A = \pm I$ entonces $A^2 = I$. Si $a_{11} = -a_{22}$ y $a_{21}a_{12} = 1 - a_{11}^2$ entonces

$$\begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}^2 + a_{12}a_{21} & -a_{22}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ -a_{22}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{pmatrix} = I$$

27. El sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene un número infinito de soluciones (por el teorema 1.4.1). Pero si $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $AB\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Por lo tanto, del teorema 6 [partes *i*) y *ii*)], AB no es invertible.

29. $\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = I$; esta matriz es su propia inversa.

31. Sea D una matriz diagonal. Suponga que D es invertible con inversa A. Como $AD = I$, entonces $a_{ii}d_{ii} = 1$ para cada i. Por lo tanto, los elementos de la diagonal de D son diferentes de cero. El converso, suponga que $d_{ii} \neq 0$ para cada i. Entonces la única solución al problema $D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial. Por el teorema 6, D es invertible. O puede escribir D^{-1} directamente como en el problema 32.

33. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{30} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

35. Se demuestra el resultado para el caso de que A sea triangular superior. La demostración para una triangular inferior es similar. Considere el sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Suponga que $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ son todas diferentes de cero. La última ecuación en el sistema homogéneo es $a_{nn}x_n = 0$, y como $a_{nn} \neq 0$, $x_n = 0$. La penúltima ecuación es

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = 0$$

y $a_{n-1,n-1} \neq 0$, $x_n = 0$ implica que $x_{n-1} = 0$. De manera similar, se concluye que $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x_n = 0$, por lo que la única solución al sistema homogéneo es la trivial. Por el teorema 6 [partes *i*) y *ii*)], A es invertible. Inversamente, suponga que una de las componentes de la diagonal, digamos a_{11}, es igual a 0. Entonces el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

[Si $a_{jj} = 0$ con $j \neq 1$, entonces se elige $\mathbf{x}$ como el vector con un 1 en la posición j y 0 en cualquier otra parte.] Usando el teorema 6 otra vez, se concluye que A no es invertible.

37. Cualquier múltiplo de (1, 2) diferente de cero.

39.
$$\begin{aligned} M &= I + F(\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &= B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &\quad + F(\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &= [B^{-1}(\lambda I - A - BF) + F](\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &= (B^{-1}\lambda I - B^{-1}A - B^{-1}BF + F) \\ &\quad (\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &= (B^{-1}\lambda I - B^{-1}A)(\lambda I - A_F)^{-1}B \\ &= B^{-1}(\lambda I - A)(\lambda I - A_F)^{-1}B \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} M^{-1} &= [B^{-1}(\lambda I - A)(\lambda I - A_F)^{-1}B]^{-1} \\ &= [(\lambda I - A_F)^{-1}B]^{-1}[B^{-1}(\lambda I - A)]^{-1} \\ &= B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A)^{-1}B. \end{aligned}$$

Por lo tanto se demuestra que:

$$M^{-1} = B^{-1}(\lambda I - A_F)(\lambda I - A)^{-1}B$$

41. 3 sillas y 2 mesas.

43. 4 unidades de A y 5 unidades de B.

45. ***a)*** matriz tecnológica $A = \begin{pmatrix} 0.293 & 0 & 0 \\ 0.014 & 0.207 & 0.017 \\ 0.044 & 0.010 & 0.216 \end{pmatrix}$,

matriz de Leontiff $= I - A$

$$= \begin{pmatrix} 0.707 & 0 & 0 \\ -0.014 & 0.793 & -0.017 \\ -0.044 & -0.010 & 0.784 \end{pmatrix};$$

b) $(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1.414 & 0 & 0\\ 0.27 & 1.261 & 0.27\\ 0.080 & 0.016 & 1.276\end{pmatrix}$

$$\mathbf{x}=(I-A)^{-1}\begin{pmatrix}13\,213\\ 17\,597\\ 1\,786\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\,689\\ 22\,598\\ 3\,615\end{pmatrix}$$

47. $\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ invertible.

49. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$ invertible.

51. $\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 2\\ 0 & 1 & -14\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ no invertible.

53. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 1 & \frac{10}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ no es invertible.

55. ***i)*** Suponga que A es invertible. Entonces $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ implica que $\mathbf{x}=A^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Cuando se reduce la matriz aumentada $(A|\mathbf{0})$ a su forma reducida por renglones se obtiene $(I|\mathbf{0})$. Utilizando las mismas operaciones elementales por renglones llevan $A\to I$. El converso, suponga que A es equivalente por renglones a I. Escriba $(A|I)$ y reduzca por renglones A a I y se obtiene $(A|I)\to(I|B)$. Por lo tanto $AB=I$. Queremos mostrar que $BA=I$. Es suficiente mostrar que $BA\mathbf{x}=\mathbf{x}$ para cada vector $\mathbf{x}$ con n elementos. Observe que B es equivalente por renglones a I. Por lo tanto, para cada $\mathbf{x}$, se puede encontrar una $\mathbf{y}$ tal que $B\mathbf{y}=\mathbf{x}$. Por lo tanto $BA\mathbf{x}=BA(B\mathbf{y})=B(AB)\mathbf{y}=B\mathbf{y}=\mathbf{x}$. Por lo tanto, A es invertible.

ii) Suponga que A es invertible. Suponga que $A\mathbf{x}=\mathbf{b}=A\mathbf{y}$. Premultiplicando por A^{-1} se obtiene $A^{-1}(A\mathbf{x})=A^{-1}(A\mathbf{y})$. Se concluye que $\mathbf{x}=\mathbf{y}$. El converso, suponga que el sistema $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ tiene una solución única para cada vector $\mathbf{b}$ de n elementos. Esto implica que A es equivalente por renglones a I. Por lo tanto, por el inciso *i*) A es invertible.

iii) Suponga que A es invertible. Por el inciso *i*) A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n. I_n se encuentra en forma escalonada reducida por renglones y tiene n pivotes. El converso, suponga que una forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes. Entonces la forma escalonada reducida por renglones de la matriz A es la matriz identidad I_n. Por lo tanto, la matriz A es equivalente por renglones a la matriz I_n. Por el inciso *i*) A es invertible.

57. De $\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & O\\ O & I\end{pmatrix}$ se obtienen las siguientes ecuaciones: $A_{11}B_{11}=I$, $A_{22}B_{22}=I$, $A_{11}B_{12}=O$, $A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=O\Rightarrow B_{11}=A_{11}^{-1}$, $B_{22}=A_{22}^{-1}$, $B_{12}=O$, $B_{21}=A_{22}^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1})$, $A_{11}B_{12}=O$, $A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=O$ y $A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=I$. Resolviendo para B_{ij} se obtiene $B_{11}=A_{11}^{-1}$, $B_{12}=O$, $B_{21}=A_{22}^{-1}(-A_{21}A_{11}^{-1})$ y $B_{22}=A_{22}^{-1}$; por lo tanto,

$$\begin{pmatrix}A_{11} & O\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}^{-1} & O\\ A_{22}^{-1}\left(-A_{21}A_{11}^{-1}\right) & A_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

59. La inversa de la matriz es:

```
[[0.099858156028   −0.076501182033   −0.076312056738]
 [−0.101873971631   0.272151300236   −0.192056737589]
 [0.143262411348   −0.67139479905     0.075177304965]].
```

61. La inversa de la matriz es:

```
[[−1.69701053654  1.60958317276   2.30794647641   1.41376091667]
 [−.793941492883  1.67786019382   0.951949895801  0.261501231662]
```

```
[1.95621257025   −0.200637557471   −0.462876267722   0.357416829406]
[−0.654423076042   .641726876009    −.249248482807    .536103553562]]
```

63. La inversa de la matriz es:

```
[[0.333333333333  −.208333333333   1.675   −1.42142857143]
[0                 0.125          −.325     0.578571428571]
[0                 0               0.2     −.114285714286]
[0                 0               0       −.142857142857]]
```

65. Los resultados de los problemas 54 y 55 sugieren que la inversa de una matriz triangular superior es triangular superior.

Problemas 3.5

1. $\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

15. $AA^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$;

$A^tA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

17. Como $a_{ij} = a_{ji}$ y $b_{ij} = b_{ji}$ para $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le n$. Entonces $a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$. Por lo tanto $A + B$ es simétrica.

19. Suponga que A es $m \times n$. Entonces A^t es $n \times m$. Entonces AA^t está definida y es una matriz de $m \times m$. Observe que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}a_{ik}$. Esto es, el elemento ij de AA^t es igual al elemento ji de AA^t. Por lo tanto AA^t es simétrica. Otra prueba es que $(AA^t)^t = (A^t)^tA = AA^t$, de modo que AA^t es su propia transpuesta por lo que AA^t es simétrica.

21. Sea $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz triangular superior. Entonces

$$U^t = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular inferior.

23. $A^t = -A$ y $B^t = -B$. Entonces $(A + B)^t = A^t + B^t = -A - B = -(A + B)$. Por lo tanto $A + B$ es antisimétrica.

25. $(AB)^t = B^tA^t = (-B)(-A) = BA$. AB es simétrica si y sólo si $(AB)^t = AB$. Pero $(AB)^t = BA$. Por lo que AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

27. El elemento ij de $(A - A^t)/2$ es $(a_{ij} - a_{ji})/2$ y el elemento ji $(a_{ji} - a_{ij})/2 = -(a_{ij} - a_{ji})/2$. Por lo tanto $(A - A^t)/2$ es antisimétrica.

29. $AA^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 & a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} \\ a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} & a_{22}^2 + a_{21}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Por lo tanto A es invertible y $A^{-1} = A^t$

31. $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; $(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

33. $(A^{-1})^t = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{15}{8} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$;

$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{15}{8} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Problemas 3.6

1. $R_1 \rightleftarrows R_2$ es una matriz elemental.

3. $R_1 \to R_1 + 3R_2$ es una matriz elemental.

5. $R_2 \to 2R_2$ es una matriz elemental.

7. Se necesitan dos operaciones, $R_1 \to 3R_1$ y $R_2 \to 3R_2$, no es una matriz elemental.

9. Se necesitan dos operaciones, $R_1 \rightleftarrows R_2$ y $R_2 \rightleftarrows R_3$, no es una matriz elemental.

11. Se necesitan tres operaciones, $R_1 \to R_1 + 3R_2$; $R_1 \to R_1 + 4R_3$; $R_2 \to R_2 + 2R_3$, no es una matriz elemental.

13. $R_4 \to R_4 + R_2$ es una matriz elemental.

15. $R_1 \to R_1 - R_2$ es una matriz elemental.

17. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

45. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

53. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

59. $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

61. $A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdots$

$$\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{8}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

63. $\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b/a\\0&1\end{pmatrix}$; las primeras dos matrices son elementales porque $a\neq 0$ y $c\neq 0$.

65. Los casos de 2×2 y 3×3 son los resultados de los problemas 63 y 64. En la respuesta al problema 3.4.35 se probó este resultado. Se puede dar otra prueba demostrando, como en los problemas 63 y 64, que A se puede escribir como el producto de matrices elementales. El paso clave es reducir A a I, observando que cuando se divide, sólo se hace entre los números en la diagonal, que son diferentes de cero por suposición.

67. A^t es triangular superior, de manera que $(A^t)^{-1}$ es triangular superior por el resultado del problema 52. Pero $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$, de manera que $(A^{-1})^t$ es triangular superior, lo que significa que $A^{-1}=[(A^{-1})^t]^t$ es triangular inferior.

69. Sea $B=A_{ij}$ y $D=A_{ij}A$. Entonces la componente kr-ésima, d_{kl}, de D está dada por

$$d_{kr}=\sum_{l=1}^{n}b_{kl}a_{lr} \qquad (*)$$

Si $k\neq j$, el renglón k de B es el renglón k de la identidad, por lo que $b_{kl}=1$ si $l=k$ y 0 de otra manera. Entonces

$$d_{kr}=b_{kk}a_{kr}=a_{kr} \qquad \text{si } k\neq j$$

si $k=j$, entonces

$$b_{jl}=\begin{cases}1, & \text{si } l=j\\ c, & \text{si } l=i\\ 0, & \text{de otra manera}\end{cases}$$

y $(*)$ se convierte en $a_{jr}=b_{jj}a_{jr}+b_{ji}a_{ir}=a_{jr}+ca_{jrx}$

Así, cada componente en el renglón j de $A_{ij}A$ es la suma de las componentes correspondientes en el renglón j de A y c veces las componentes correspondientes en el renglón i de A.

71. $\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$

73. $A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&-12\end{pmatrix}$.

75. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

77. $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Problemas 3.7

1. -10 **3.** -9 **5.** 2 **7.** 4

9. -8 **11.** 126 **13.** -96

15. Sea $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

y $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & & b_{2n} \\ & & & \\ 0 & 0 & & b_{nn} \end{pmatrix}$

entonces $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

y $\det B = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$. Por otro lado

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

donde * representa términos que no juegan un papel importante en la demostración, por lo que $\det AB = a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}\cdots a_{nn}b_{nn} = (a_{11}a_{22}\cdots a_{nn})(b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}) = (\det A)(\det B)$.

17. Como A es triangular, $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. Entonces $\det A \neq 0$ si y sólo si $a_{ii} \neq 0$ para $1 \leq i \leq n$. Esto es, $\det A \neq 0$ si y sólo si los elementos de la diagonal de A son diferentes de cero.

19. El área generada por los vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ es $\left|\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\right|$, el área generada por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ es

$$\left|\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\right| = \left|A\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\right| = |A|\left|\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\right|.$$

21. 31 202

23. 0.0879836

Problemas 3.8

1. 28 **3.** -12 **5.** -55 **7.** 32 **9.** -25 **11.** -18

13. -260 **15.** 1 **17.** 0 **19.** $abcd$ **21.** $a^2d^2 - b^2c^2$ **23.** 66

25. -480 **27.** -8 **29.** -8 **31.** -240 **33.** -16 **35.** -16

37. Se prueba utilizando inducción. Si $n = 2$, entonces $\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 \\ x_1 & 1+x_2 \end{vmatrix} = 1 + x_1 + x_2$.

Suponga que para $n = k - 1$, el determinante es $1 + x_1 + \cdots + x_{k-1}$. Entonces restando el segundo renglón del primero,

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

se suma la primera columna a la segunda

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & 1+x_1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_1+x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1+x_1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1+x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1+x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

$$= 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Por la hipótesis de inducción se llega a la conclusión.

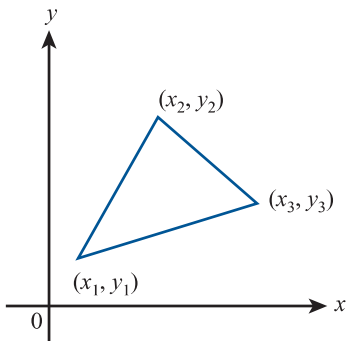
39. Dado $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$. Sumemos los renglones 1, 2,…, $n-1$ al renglón n, entonces

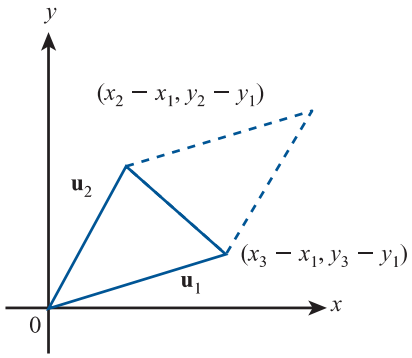
se obtiene $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0$

41. Si n es impar, entonces $\det A = (-1)^n \times \det A = -\det A$, por lo tanto $\det A = 0$.

43. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$

Observe las figuras siguientes:





El área A del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ que está dada por

$$A = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

45. $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ a_2(a_2 - a_1) & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix}$

$= (a_2 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & a_3 - a_1 \\ a_2 & a_3(a_3 - a_1) \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

47. ***a)*** $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

b) Utilizando inducción. Para el caso $n = 2$, $D_2 = a_2 - a_1$. Suponga $D_{n-1} = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i)$.

Entonces

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-1} & a_3^{n-1} a_1 a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} a_1 a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) D_{n-1} = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n-1} (a_j - a_i) = \prod_{\substack{i=1 \\ j>i}}^{n} (a_j - a_i)$$

49. *a*) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ y 2 es la menor potencia.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = 0$ y 3 es la menor potencia ya que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$

51. Por el teorema 4 se tiene $\det A^2 = \det A \times \det A = \det A$. Si $\det A \neq 0$, entonces $\det A = 1$. La respuesta es 0 o 1.

53. Sea Q una matriz de permutación elemental de manera que Q se obtiene intercambiando dos renglones, el i y el j, de I. El renglón j de I tiene un 1 en la columna j, así que el renglón i de Q tiene un 1 en la columna j. Es decir, $Q_{ji} = 1$. Similarmente, $Q_{ij} = 1$. Entonces $Q_{ij} = Q_{ji}$. Las únicas componentes diferentes de cero de Q son los unos en la diagonal y las componentes de la diagonal se quedan igual cuando se obtiene la transpuesta. Así $Q^t = Q$. Ahora, si P es una matriz de permutación, entonces

$$P = P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1$$

donde cada P_i es una matriz de permutación elemental. Entonces, por el teorema 1: $\det P = \det P_n \det P_{n-1} \cdots \det P_2 \det P_1 = (-1)^n$ por el resultado del problema 52. Además, por el teorema 1.9.1*ii*)

$$P^t = P_1^t P_2^t \cdots P_{n-1}^t P_n^t$$
$$= P_1 P_2 \cdots P_{n-1} P_n$$

Así P^t es una matriz de permutación y como antes,

$$\det P^t = (-1)^n = \det P$$

Problemas 3.9

1. EB es la matriz obtenida al permutar dos renglones de B. Por la propiedad 4, $\det EB = -\det B$, de donde $\det E = -1$. Entonces $-\det B = \det E \det B$.

3. EB es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de B por c. Por la propiedad 2, $\det EB = c \det B$. E es la matriz obtenida al multiplicar el renglón i de I por c. Entonces

$$\det E = c \det I = c$$

y $$\det EB = c \det B = \det E \det B$$

Problemas 3.10

1. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$

3. $\det A = 0$; la matriz no es invertible.

5. $\begin{pmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\det A = 0$; la matriz no es invertible.

13. $\det A = 0$; la matriz no es invertible.

15. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

17. $\det A = 3$, $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = \frac{1}{3} = \frac{1}{\det A}$.

19. $\det A = -28$, $A^{-1} = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ 20 & -8 & 6 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$;

$\det A = -\frac{1}{28} = \frac{1}{\det A}$. Problema 15.

21. Por el teorema 2, $(A)(\text{adj } A) = (\det A)I$. Por el teorema 4 $\det A = 0$. Por lo tanto $(A)(\text{adj } A)$ es la matriz cero.

23. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cos^2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 1, \forall\theta,$

por lo tanto la matriz tiene inversa que es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 0 \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problemas 3.11

1. $x_1 = -5, \quad x_2 = 3$

3. $x_1 = 2, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -3$

5. $x_1 = \frac{45}{13}, x_2 = -\frac{11}{3}, x_3 = \frac{23}{13}$

7. $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = \frac{1}{2}$

9. $x_1 = \frac{21}{9}, x_2 = \frac{171}{29}, x_3 = -\frac{284}{29}, x_4 = -\frac{182}{29}$

Ejercicios de repaso de la unidad 3

1. $\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 12 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 \\ -20 & 10 & -1 \\ -36 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

5. $6\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -20 \\ 18 & -18 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -26 & 16 & 35 \\ -18 & 19 & 30 \\ -42 & 17 & 32 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 30 & 32 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; la inversa es $\begin{pmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, no existe inversa.

15. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -3 \\ 0 & 9 & -3 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

no es invertible.

17. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ la inversa es $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} & -2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{17}{8} \\ -\frac{5}{8} \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -12 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -12 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{41}{6} \\ -\frac{16}{3} \\ \frac{31}{6} \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; ninguna.

25. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, la matriz es simétrica.

27. $A^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -6 \\ 5 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; A es antisimétrica.

29. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 3 & -8 \\ 6 & 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}$; simétrica.

31. $\left(F^t + F^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

37. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

39. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

41. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

43. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

45. -4 **47.** 3 **49.** 60

51. 7 **53.** 34 **55.** $-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **59.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

61. La matriz no tiene inversa.

63. $x_1 = \frac{11}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{7}$

65. $x_1 = 23, \quad x_2 = 12, \quad x_3 = -15$

67. $x_1 = \frac{22}{13}, \quad x_2 = \frac{94}{13}, \quad x_3 = -\frac{6}{13}, \quad x_4 = \frac{63}{13}$

UNIDAD 4

Problemas 4.2

1. Sí.

3. No; *iv*); tampoco *vi*) se cumple si $\alpha < 0$.

5. Sí.

7. No. Como se requiere que todos los polinomios sean de grado 5, cualquier polinomio de grado menor no pertenece al conjunto, por lo que no existe neutro aditivo ya que 0 no es un polinomio de grado 5.

9. Sí, *i*) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+\alpha \\ b+\beta & 0 \end{pmatrix}$;

iii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V; \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ \alpha b & 0 \end{pmatrix} \in V$

el resto de los axiomas se derivan del teorema 1.5.1.

11. Sí, es un espacio vectorial trivial.

13. No; *iii*) $0 \notin V$; *iv*) si $p(x) \in V$, entonces $-p(x) \notin V$ dado que no tiene un término constante positivo; *vi*) no se sostiene si $\alpha < 0$.

15. Sí.

17. No; *i*), *iii*), *iv*), *vi*) no se cumplen.

19. Sí. **21.** Sí.

23. Suponga que $\mathbf{0}$ y $\mathbf{0}'$ son identidades aditivas. Entonces, por definición de identidad aditiva, $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$ y $\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}'$. Así, $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

25. Para $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ en V defina $\mathbf{z}$ como $\mathbf{z} = -\mathbf{x} + \mathbf{y}$. $\mathbf{z}$ existe ya que toda $\mathbf{x}$ tiene un inverso aditivo $-\mathbf{x}$ y V es una cerradura bajo la adición. Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}) + \mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{y} = \mathbf{y}$. Suponga que existen $\mathbf{z}$ y $\mathbf{z}'$ tales que $\mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{z}' = \mathbf{y}$. Entonces $\mathbf{z} = -\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z}'$. Por lo que $\mathbf{z}$ es única.

27. Sean y y y_2 soluciones a la ecuación. Entonces

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1(x) = 0$$

y

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2(x) = 0$$

Entonces

$$\begin{aligned}(y_1 + y_2)'' + a(x)(y_1 + y_2)' &\\ + b(x)(y_1 + y_2) &\\ = [y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1] &\\ + [y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2] &\\ = 0 + 0 = 0 &\end{aligned}$$

de manera que $y_1 + y_2$ es una solución. Similarmente, $(\alpha y_1)'' + a(x)(\alpha y_1') + b(x)(\alpha y) = \alpha[y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1] = \alpha \cdot 0 = 0$, con lo que αy_1 también es una solución, y la cerradura se cumple. Como $-y_1 = (-1)y$ también es una solución, se tiene el inverso aditivo. Es sencilla la deducción de los otros axiomas.

Problemas 4.3

1. No; porque $\alpha(x, y) \notin H$ si $\alpha < 0$.

3. H es un subespacio.

5. H no es un subespacio. $(1, 0) \notin H$, pero $2(1, 0) = (2, 0) \notin H$.

7. Sí.

9. H es un subespacio.

11. H es un subespacio.

13. H no es un subespacio. $\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 1+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 2+a+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin H$

15. Sí.

17. H es un subespacio.

19. H es un subespacio.

21. H es un subespacio.

23. H es un subespacio.

25. H no es un subespacio. H no contiene a 0.

27. ***a)*** Si $A_1, A_2 \in H_1$, entonces $(A_1 + A_2)_{11} = (A_1)_{11} + (A_2)_{11} = 0 + 0 = 0$ y $(\alpha A_1)_{11} = \alpha(A_1)_{11} = \alpha 0 = 0$, de manera que H_1 es un subespacio. Si $A_1, A_2 \in H_2$, entonces

$$A_1 = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -b_2 & a_2 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} -(b_1 + b_2) & (a_1 + a_2) \\ (a_1 + a_2) & (b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in H_2. \text{ Además,}$$

$$\alpha A_1 = \begin{pmatrix} -\alpha b_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & \alpha b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in H_2$$

y por lo tanto H_2 también es un subespacio.

b) $H = H_1 \cap H_2 =$

$$\left\{ A \in M_{22}: A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ para algún escalar } a \right\}.$$

Si $A_1, A_2 \in H$, entonces

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ a_1 + a_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

$\in H$ y $\alpha A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix} \in H$$

29. Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$, entonces, $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, de manera que $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in H$. Además, $A(\alpha\mathbf{x}_1) = \alpha A\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ de manera que $\alpha\mathbf{x}_1 \in H$ y H es un subespacio.

31. Sean $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ y $\mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2, w_2) \in H$. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, w_1 + w_2)$ y $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) + d(w_1 + w_2) = (ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1) + (ax_2 + by_2 + cz_2 + dw_2) = 0 + 0 = 0$, de manera que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. Similarmente, $\alpha\mathbf{u} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1, \alpha w_1)$ y $a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) + d(\alpha w_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1) = \alpha 0 = 0$, de manera que $\alpha\mathbf{u} \in H$. Por lo tanto, H es un subespacio.

33. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$. Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$, donde $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in H_1$ y $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in H_2$. Entonces $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Como H_1 y H_2 son subespacios, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \in H_1$, y $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in H_2$, de manera que $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$. De igual manera, $\alpha\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1) = \alpha\mathbf{u}_1 + \alpha\mathbf{v}_1$. Pero $\alpha\mathbf{u}_1 \in H_1$ y $\alpha\mathbf{v}_1 \in H_2$, por lo que $\alpha\mathbf{x} \in H$ y H es un subespacio.

35. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}_1$ no es un múltiplo de $\mathbf{v}_2$ ya que los vectores no son colineales. Sea $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Entonces $\det A = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Si $\det A = 0$, entonces $x_1 y_2 = x_2 y_1$, o sea, $x_1/x_2 = y_1/y_2$ (si $x_2 = 0$ o $y_2 = 0$, se puede obtener una conclusión similar). Sea $c = x_1/x_2 = y_1/y_2$. Entonces $x_1 = cx_2$ y $y_1 = cy_2$, de manera que $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$ lo que contradice lo establecido. Así, $\det A \neq 0$. Sea $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cualquier otro vector en $\mathbb{R}^2$. Se quiere encontrar escalares a y b tales que $\mathbf{v} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$, o

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ ay_1 + by_2 \end{pmatrix}$$

o sea,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

es decir,

$$A\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Como $\det A \neq 0$, este sistema tiene una solución única $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Entonces $\mathbf{v} \in H$, lo que muestra que $\mathbb{R}^2 \subset H$. Pero como $H \subset \mathbb{R}^2$, se tiene que $H = \mathbb{R}^2$.

Problemas 4.4

1. Sí. **3.** Sí.

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & x \\ 2 & 2 & 2 & y \\ 3 & 3 & 3 & z \end{array}\right) \rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & y/4 + x/2 \\ 0 & 1 & -2 & y/4 - x/2 \\ 0 & 0 & 0 & z - (3/2)/y \end{array}\right).$$

Por lo tanto, sólo podemos resolver si $z - (3/2)y = 0$, que es la ecuación del plano que pasa por el origen. Por lo tanto los vectores no generan $\mathbb{R}^3$.

7. Sí. **9.** Sí.

11. No; por ejemplo $x \notin$ gen $\{1 - x, 3 - x^2\}$.

13. Sí.

15. No generan M_{22}.

17. Suponga que $a_1x^2 + b_1x + c_1$ y $a_2x^2 + b_2x + c_2$ generan P_2. Sea $\mathbf{v}_i = (a_i, b_i, c_i)$ para $i = 1, 2$. Sea $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \in P_2$ un polinomio diferente de cero tal que $(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{v}_i = 0$. [Observe que podemos encontrar un polinomio diferente de cero con estas características, dado que $(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \mathbf{v}_i = 0$ es un sistema homogéneo de 2 ecuaciones y tres incógnitas.] Suponga que $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = d_1(a_1x^2 + b_1x + c_1) + d_2(a_2x^2 + b_2x + c_2)$. Por lo tanto, $(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma) \cdot (d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2) = 0$. Pero esto es una contradicción, dado que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$. Por lo tanto esos dos polinomios no pueden generar P_2.

19. $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ y $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k$. Por lo tanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k$ y $\alpha\mathbf{u} = (\alpha c_1)\mathbf{v}_1 + (\alpha c_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (ac_k)\mathbf{v}_k$ están contenidos en gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

21. Utilice la inducción sobre *n*. Suponga que $\mathbf{v}_1 \in H$. De acuerdo con esto $\alpha\mathbf{v}_1 \in H$ para todo escalar α. Por tanto, gen$\{\mathbf{v}_1\} \subseteq H$. Suponga que gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subseteq H$, y $\mathbf{v}_{n+1} \in H$. Sea $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_{1+} \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n + \alpha_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}$. Se asume que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \in H$, lo cual implica que $\alpha_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} \in H$. Se tiene que $\mathbf{v} \in H$. Por inducción, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\} \subseteq H$, entonces gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\} \subseteq H$.

23. Dado que $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ es perpendicular a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, de ahí al plano generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$ es la ecuación de un plano, el cual contiene $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$. Al expandir el producto cruz se muestra que $(y_1z_2 - z_1y_2)x + (z_1x_2 - x_1z_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z = 0$, es una ecuación de un plano que pasa por el origen, el cual contiene $H =$ gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Dado que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ no son paralelos $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq 0$, de modo que esta ecuación es la ecuación de un plano (y no sólo $0 = 0$).

25. Considere $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observe que cada matriz es invertible.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{a}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] - \frac{d}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] + \frac{b}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] - \frac{c}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

Problemas 4.5

1. Independiente.

3. Dependientes.

5. $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq a\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ de modo que es linealmente independiente.

7. Dependiente (por el teorema 2).

9. Independiente.

11. Independientes.

13. Linealmente dependiente.

15. Linealmente dependiente, pues 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ son siempre dependientes (teorema 2).

17. Independiente.

19. Independiente.

21. Linealmente dependiente.

23. Linealmente dependiente.

25. Linealmente dependiente.

27. Linealmente independiente.

29. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$

31. Observe que $-2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$. Por lo tanto el conjunto de vectores es linealmente dependiente para todo número real α.

33. Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes, entonces existe una solución no trivial $(c_1, \ldots, c_n)$ de $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$. Entonces $(c_1, \ldots, c_n, 0)$ es una solución no trivial de $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n + c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}$ son linealmente independientes.

35. Suponga que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. Entonces $\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}_1$ para algún $\alpha \neq 0$. Entonces $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \alpha|\mathbf{v}_1|^2 \neq 0$ dado que $\mathbf{v}_1$ es un vector diferente de cero. Esto contradice el que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ sean ortogonales. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes.

37. Suponga que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes. Entonces $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = 0$ sólo tiene la solución trivial. Así es que al resolver no hay variables arbitrarias, por lo cual cada columna en la forma escalonada por renglones tiene un pivote. Dado que hay n renglones y n columnas, cada renglón tiene un pivote, es decir, no hay reglones que sean cero en la forma escalonada. En cambio, si la forma escalonada por renglón de A no contiene un renglón de ceros, esto implica que la única solución a $A\mathbf{x} = 0$ es $\mathbf{x} = 0$, dado que n renglones distintos de cero implican n pivotes. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

39. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -22 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 13/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & -22/5 & 3/5 & 0 \end{array}\right).$

Así es que si se resuelve en términos de x_3, x_4, da por resultado

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -13/5 \\ 22/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

41. $x_3\begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

43. $x = c_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con c_1, c_2, c_3 arbitrarias.

45. ***a)*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Rightarrow (1, 2, 3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 0$
$\Rightarrow v_1 + 2v_2 + 3v_3 = 0$

Como tenemos una ecuación y tres incógnitas tenemos un número infinito de soluciones, tenemos que mostrar que las soluciones son un espacio vectorial, de modo que si escogemos w y z tales que

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0 \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$$
$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} + \mathbf{z}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{z} = 0$$

La suma $\mathbf{w} + \mathbf{z}$ cumple con que pertenece al mismo conjunto que $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$. Si ahora $\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = 0$ también $\alpha\mathbf{w}$ pertenece al conjunto $\therefore$ la solución infinita forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

b) $\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

c) $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

d) $\mathbf{u} = \mathbf{w} \Rightarrow$ que son linealmente dependientes.

e) H consiste de todos los vectores perpendiculares a **u**, H es el plano normal a $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es perpendicular al plano. Como **u** y **w** son perpendiculares al mismo plano, deben ser linealmente dependientes.

47. Se pueden escribir tres ecuaciones con cuatro incógnitas, el sistema es homogéneo y siempre tiene un número infinito de soluciones.

49. Se tiene un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 2$ incógnitas, el sistema es homogéneo por lo que tiene infinitas soluciones.

51. Suponga que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7 están en M_{32}. Considere resolver $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4 + a_5A_5 + a_6A_6 + a_7A_7 = 0$ para $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$. Esto genera seis ecuaciones homogéneas con siete incógnitas. Entonces, sin importar las matrices dadas, habrá siempre una solución no trivial. Así que cualquiera de las siete matrices de M_{32} son linealmente dependientes.

53. Observe que $S_1 \cap S_2$ es un subconjunto tanto de S_1 como de S_2, cada uno de los cuales es un conjunto linealmente independiente. Entonces, en virtud del problema 43 $S_1 \cap S_2$ es linealmente independiente. (Observe que el conjunto vacío de vectores es linealmente independiente, así que no se requiere que $S_1 \cap S_2$ sea un conjunto no vacío.)

55. Sea $a_1\mathbf{v}_1 + a_2(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \cdots + a_n(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n) = 0$. Entonces, tenemos $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\mathbf{v}_1 + (a_2 + \cdots + a_n)\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = 0$. Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, tenemos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= 0 \\ a_2 + \cdots + a_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_n &= 0 \end{aligned}$$

En virtud de la sustitución regresiva, tenemos $a_n = 0, a_{n-1} = 0, \ldots, a_2 = 0, a_1 = 0$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes.

57. Si todos los vectores son el vector cero, entonces hemos terminado. Si no, entonces sin perder la generalidad, asuma que $\mathbf{v}_1$ es un vector diferente de cero. Dado que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente dependiente, $\mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{v}_1$ para al menos una a_1. Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente, $\mathbf{v}_3 = a_2\mathbf{v}_1$ para al menos una a_2. Si continuamos con este procedimiento, vemos que cada vector es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$.

59. $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$

61. Necesitamos $\begin{vmatrix} 1-c & 1+c \\ 1+c & 1-c \end{vmatrix} = (1-c)^2 - (1+c)^2 = -4c \neq 0$. Por lo tanto, los vectores son linealmente independientes si $c \neq 0$.

63. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente, entonces $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ para al menos una $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ en virtud del problema 56. Entonces $\mathbf{v} \in \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, que es una contradicción. Por lo tanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente.

65. $1 - x^2$, $1 + x^2$, x. (Cualquier cuadrática con un término x diferente de cero funcionará.)

Problemas 4.6

1. No; no genera.

3. Sí. **5.** Sí.

7. No; no genera.

9. Sí.

11. No todos los vectores son colineales.

13. No.

15. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2/3)y - 2x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base.

17. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

19. ***a)*** Suponga que (x_1, y_1, z_1, w_1) y (x_2, y_2, z_2, w_2) están en H. Entonces, $a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) + c(z_1 + z_2) + d(w_1 + w_2) = ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1 + ax_2 + by_2 + cz_2 + dw_2 = 0$ y $a(\alpha x_1) + b(\alpha y_1) + c(\alpha z_1) + d(\alpha w_1) = \alpha(ax_1 + by_1 + cz_1 + dw_1) = 0$.

Por lo tanto, H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

b) Dado que $abcd \neq 0$, a es diferente de cero. Entonces,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(by + cz + dw)/a \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} =$$

$$y \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, una base para H es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -d/a \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) dim H = 3

21. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$

$$x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

forman una base para H.

23. $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$.

La solución es el subespacio trivial.

25. $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

27. El espacio solución es el trivial.

29. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$;

genera a $D_3 = 3$

31. Sean $A \in S_{nn}$ y $B \in S_{nn}$. Entonces, $A + B = A^t + B^t = (A + B)^t$. Por lo tanto, $A + B \in S_{nn}$. Además, $\alpha A = \alpha A^t = (\alpha A)^t$. Así que $\alpha A \in S_{nn}$. En virtud de lo anterior, S_{nn} es un subespacio de M_{nn}. Para $i \leq j$, sea b_{ij} la matriz $n \times n$ con $b_{ij} = b_{ji} = 1$ y 0 en cualquier lado. Observe que ambas B_{ij} son simétricas y linealmente independientes, y cada matriz simétrica se puede escribir como una combinación lineal de B_{ij}. Por lo tanto, $\{B_{ij} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ es una base para S_{nn} y gen $S_{nn} = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

33. Son linealmente independientes. En virtud del teorema 5, constituyen una base para V.

35. Suponga que existe $\mathbf{v} \in K$ tal que $\mathbf{v} \notin H$. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base para H. Entonces, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente contenido en K. Esto implica que dim $K \geq n + 1 > n =$ dim H, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $H = K$.

37. Si $H = V$, entonces $K = \{0\}$. Si $H = \{0\}$, entonces $K = V$. Suponga que H es un subespacio propio. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base para H y sea dim $V = n$. En virtud del problema 32, existen vectores $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V. Sea $k =$ gen $\{\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$. Resulta evidente que $H + K = V$. Suponga que $\mathbf{v} \in H \cap K$. Entonces, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i$, lo cual da como resultado $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i - \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i = 0$. Por lo tanto, cada $\alpha_i = 0$ y cada $\beta_j = 0$, y de aquí se desprende que $H \cap K = \{0\}$. Es falso que K sea único, por ejemplo si $H = \left\{\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$ eje x en $\mathbb{R}^2$, K puede ser cualquier línea que pase por el 0, con pendiente diferente de cero.

39. Suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son coplanares. Si los vectores son paralelos, dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = 1$. Si al menos dos de los vectores no son paralelos, entonces, dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = 2$. Por lo tanto, en cualquier caso, dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \leq 2$. Por otra parte, asuma que dim gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \leq 2$. Si la dimensión es 1, sea $\{\mathbf{v}\}$ una base. Entonces $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_3 = \gamma\,\mathbf{v}$. Si la dimensión es 1, entonces α, β o γ sea cero. Podemos asumir que $\alpha \neq 0$. Entonces, $\mathbf{v}_2 = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 = \frac{\gamma}{\alpha}\mathbf{v}_1$, lo cual demuestra que los vectores son paralelos. Si la dimensión es 2, sea $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ una base. Entonces, $\mathbf{v}_1 = \alpha_1\mathbf{u} + \beta_1\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \alpha_2\mathbf{u} + \beta_2\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_3 = \alpha_3\mathbf{u} + \beta_3\mathbf{v}$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot [\alpha_2\alpha_3(\mathbf{u} \times \mathbf{u}) + \beta_2\alpha_3(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) + \alpha_2\beta_3(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \beta_2\beta_3(\mathbf{v} \times \mathbf{v})] = \alpha_1(\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] + \beta_1(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)[\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] = 0$.

41. Si $H = V$, entonces H tiene una base. Suponga que H es un subespacio propio de V, entonces, como V tiene dimensión finita, se desprende que H es generado por un número finito de vectores. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto de H que genera a H. Con el método que se usó en el problema 34, podemos reducir este conjunto generador hasta que tengamos un conjunto que genere a H y que sea linealmente independiente. Por lo tanto, H tiene una base.

43. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 1+a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -a(a-a) = 0.$$

Los vectores nunca forman una base para $\mathbb{R}^3$, dado que para todos los valores de a, los vectores son dependientes.

Problemas 4.7

1. $\rho = 2, \quad \nu = 0$

3. $\rho = 2, \quad \nu = 1$

5. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 22 \neq 0 \Rightarrow \rho = 3; \nu = 3 - 3 = 0$$

7. $\rho = 2, \quad \nu = 1$

9. $\rho = 2, \quad \nu = 2$

11. $\rho = 3, \quad \nu = 1$

13. $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \rho = 4; \nu = 4 - 4 = 0$$

15. $\rho = 2, \quad \nu = 2$

17. $\rho = 3, \quad \nu = 1$

19. $\rho = 2, \quad \nu = 1$

21. Base para el rango $A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \end{array}\right);$$ base para

$$N_A = \left\{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

23. Observe que $c_2 = -2c_1$, y $c_3 = -c_1$, entonces, la base para el rango $A = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -3 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1 = 2x_2 + x_3$; base para $N_A = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

25. Observe que en virtud del problema 15, dim $C_A = 2$, y las primeras dos columnas de A son linealmente independientes. La base para el rango A $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

base para $N_A = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

27. En virtud del problema 17, dim $C_A = 3$. Observe que las primeras tres columnas de A son linealmente independientes. La base para el rango $A = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Continuando con la reducción

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

base para $N_A = \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

29. $$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Base $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

31. $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

33. No.

35. $\rho(A) = \rho(A, b)$ por lo que se tiene solución única.

37. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & -8 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 10 & -2 & -6 & -12 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -1 & -5 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -31 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -34 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(A, \mathbf{b}) \Rightarrow$. No hay solución.

39. Dado que A es una matriz cuadrada triangular inferior con ceros en la diagonal, el renglón superior está compuesto sólo por ceros, así que hay menos de n pivotes en la diagonal en forma escalonada. Por lo tanto, $\rho(A) < n$.

41. $\rho(A^t)$ = dimensión del espacio de las columnas de A^t = dimensión del espacio de los renglones de A = dimensión del espacio de las columnas de A (por el teorema 4) = $\rho(A)$.

43. ***i)*** Sea H = imagen de A y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base para H. Como B es invertible, $N_B = \{\mathbf{0}\}$, lo que significa que $\{B\mathbf{v}_1, B\mathbf{v}_2, \ldots, B\mathbf{v}_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^m$ y, por lo tanto, es una base para la imagen BA. Entonces $\rho(BA) = k = \rho(A)$.

ii) Como C es invertible, imagen $C = \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{h} \in H$; entonces existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{h}$. Como imagen $C = \mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que $C\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Entonces $AC\mathbf{y} = \mathbf{h}$. Así, $H \subset$ imagen AC. Si $\mathbf{v} \in$ imagen AC, existe $\mathbf{u}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $AC\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Pero entonces $\mathbf{v} = A(C\mathbf{u})$ de manera que $\mathbf{v} \in$ imagen $A = H$. Por lo tanto, imagen $AC \subset H$ de manera que imagen $AC = H$ y $\rho(A) = \rho(AC)$.

45. Como $\rho(A) = 5$, los cinco renglones de A son linealmente independientes. Entonces los cinco renglones de $(A, \mathbf{b})$ son linealmente independientes y $\rho(A, \mathbf{b}) = 5$.

47. Por el problema 43, $\rho(A) = \rho(AD) = \rho(C(AD)) = \rho(B)$.

49. ***i)*** Si existe una $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que $\nu(A) = \dim N_A \geq 1$ y $\rho(A) = n - \nu(A) \leq n - 1 < n$.

ii) Si $\rho(A) < n$, entonces $\nu(A) = n - \rho(A) > 0$ de manera que existe una $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

51. Imagen A = gen $\left\{\begin{pmatrix} 187 \\ -35 \\ 257 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -46 \\ 51 \\ -148 \end{pmatrix}\right\}$;

$\rho(A) = 2$; $\nu(A) = 3$

53. Imagen A = gen $\left\{\begin{pmatrix} .0284 \\ -0.5110 \\ -.0965 \\ .0795 \\ -.0110 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -.0311 \\ -.1216 \\ -.4270 \\ .0905 \\ -.3365 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.207 \\ -.1811 \\ -.5847 \\ .1604 \\ -.4243 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} .0431 \\ .0904 \\ .3574 \\ -.4730 \\ .3101 \end{pmatrix}\right\}$; $\rho(A) = 4$; $\nu(A) = 1$

Problemas 4.8

1. $\dfrac{x+y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{x-y}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

3. $\dfrac{2x-3y}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \dfrac{-3x+2y}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

5. $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$; $C^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2x-y)/4 \\ (-2x+y)/4 \end{pmatrix}$$

7. $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} dx-by \\ -cx+ay \end{pmatrix}$

9. $\dfrac{x-z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \dfrac{-x+2y-z}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$

$$\frac{x+z}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

11. $C=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}; C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix};$

$$C^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+y-z\\-x+y-z\\x+y+z\end{pmatrix}$$

13. $\frac{6x-11y+10z}{31}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{2x+17y-7z}{31}\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$

$$+\frac{7x+13y-9z}{31}\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

15. $a_0+a_1x+a_2x^2$

$=(a_0+a_1+a_2)1$

$+a_1(x-1)+a_2(x^2-1)$

17. $\frac{1}{2}(a_0+a_1+a_2)(x+1)+\frac{1}{2}(-a_0+a_1-a_2)$

$(x-1)+a_2(x^2-1)^2=a_0+a_1x+a_2x^2$

19. $2x^3-3x^2+5x-6=-16(1)+10(x+1)$

$-5(x+x^2)+2(x^2+x^3)$

21. $C=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix};$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&-2&-3\\0&0&1&3\\0&0&0&-1\end{pmatrix};$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}5\\-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-7\\4\\0\end{pmatrix}.$$

Entonces, $4x^2-x+5=8(1)-7(1-x)+4(1-x)^2$.

23. $\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix};$

$\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=a_{12}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$. Entonces,

$a_{11}=11, a_{21}=-8, a_{12}=-23, a_{22}=13.$

$$(\mathbf{x})_{B_2}=\begin{pmatrix}11&-23\\-8&13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67\\-45\end{pmatrix}$$

25. Linealmente independiente.

27. Linealmente dependiente.

29. Linealmente independiente.

31. Linealmente independiente.

33. Linealmente independiente.

35. $p_i^{(j)}(0)=0$ implica que el coeficiente del término x^j es cero para cada polinomio. Entonces, el renglón $j+1$ de la matriz A será un renglón de ceros. Así que A no es invertible, lo cual implica que los polinomios son linealmente dependientes.

37. Observe que la matriz A (como en el ejemplo 5) tiene el primer renglón de ceros. Por lo tanto A no es invertible lo que implica que las matrices son linealmente dependientes.

39. Como los elementos de la base son (1, 0) y (0, 1) en las coordenadas $x'-y'$ corresponden a (cos θ, sen θ) y ($-$sen θ, cos θ) en las coordenadas $x-y$, la matriz de cambio de coordenadas es

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\operatorname{sen}\theta\\-\operatorname{sen}\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$$

41. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{\sqrt{2}}\\-\frac{9}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

43. Observe que $(C_i)_{B1}=\begin{pmatrix}C_{1i}\\\vdots\\C_{ni}\end{pmatrix}$. Como C es invertible, las n columnas de C son linealmente independientes. Entonces C_i, $i=1,\ldots,n$ son independientes. Como dim $V=n$, $B_2=\{C_1,\ldots,C_n\}$ es una base en V.

45. Sea $CA = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$. Suponga $CA = I$. Entonces $(x)_{B1} = I\,(x)_{B1} = CA\,(x)_{B1}$, para cada $x \in V$. Suponga $(x)_{B1} = CA(x)_{B1}$, para cada $x \in$ W. Sea $B_1 = \{V_1, \ldots, V_n\}$. Entonces $(V_1)_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = CA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Pero $CA \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ \vdots \\ r_{n1} \end{pmatrix}$, de forma similar para $V_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, V_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$ se llega a que $CA = I$.

Problemas 4.9

1. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

5. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Como $ad - bc \neq 0$, entonces, $|\mathbf{v}_1| \neq 0$. Por lo tanto,

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} \\ b/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} a/\sqrt{a^2+b^2} \\ b/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -b(ad-bc)/(a^2+b^2) \\ a(ad-bc)/(a^2+b^2) \end{pmatrix}, |\mathbf{v}_2'| = \frac{ad-bc}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ b/\sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$.

7. El conjunto de vectores $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ forma una base para π. Por lo tanto, $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-4}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, =$

$\begin{pmatrix} 2/15 \\ 1 \\ 4/15 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/35 \\ 3\sqrt{5}/7 \\ 4\sqrt{5}/35 \end{pmatrix}$.

9. $\{(2/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, 4/\sqrt{29})\}$

11. $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ a/\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} - \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -b/\sqrt{a^2+b^2} \\ a/\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ca^2/(a^2+b^2) \\ -abc/a^2+b^2 \end{pmatrix}, \text{ y}$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -ac\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)} \\ -bc/\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)} \\ (a^2+b^2)/\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)} \end{pmatrix}$$

15. Los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ forman una base para H. Entonces $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{v}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{6}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6/\sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \\ 0 \\ 0 \\ -3/\sqrt{70} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} +$$

$$\frac{3}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 6/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \\ 0 \\ 0 \\ -3/\sqrt{70} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/7 \\ 3/14 \\ 1 \\ 0 \\ 1/14 \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{210} \\ 3/\sqrt{210} \\ 14/\sqrt{210} \\ 0 \\ 1/\sqrt{210} \end{pmatrix}$. Para encontrar $\mathbf{u}_4$, calcu-

lamos $\mathbf{v}_4' = \mathbf{v}_4 - (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_1)\,\mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_2)\,\mathbf{u}_2 -$

$$(\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{u}_3)\,\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{12}{\sqrt{70}} \begin{pmatrix} 6/\sqrt{70} \\ 5/\sqrt{70} \\ 0 \\ 0 \\ -3/\sqrt{70} \end{pmatrix} - \frac{4}{\sqrt{210}} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{210} \\ 3/\sqrt{210} \\ 14/\sqrt{210} \\ 0 \\ 1/\sqrt{210} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8/15 \\ 4/5 \\ -4/15 \\ 1 \\ 4/15 \end{pmatrix}, \text{ y entonces } \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} -8/\sqrt{465} \\ 12/\sqrt{465} \\ -4/\sqrt{465} \\ 15/\sqrt{465} \\ 4/\sqrt{465} \end{pmatrix}.$$

17. $\{(-7/\sqrt{66}, -1/\sqrt{66}, 4/\sqrt{66})\}$

19. $Q^t = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $Q^tQ = I = QQ^t$

21. $PQ = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1-\sqrt{8} & -1-\sqrt{8} \\ 1+\sqrt{8} & 1-\sqrt{8} \end{pmatrix}$

$$(PQ)^t = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \begin{pmatrix} 1-\sqrt{8} & 1+\sqrt{8} \\ -1-\sqrt{8} & 1-\sqrt{8} \end{pmatrix}$$

$$(PQ)(PQ)^t = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} = I$$

23. $I = Q^{-1}Q = Q^tQ$. Pero $\det(Q^tQ) = \det Q^t \det Q = \det Q \det Q = (\det Q)^2$. Como $1 = \det I = \det Q^tQ = (\det Q)^2$ se tiene $\det Q = \pm 1$

25. $|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2|^2 = (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) = |\mathbf{u}_1|^2 - 2\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 + |\mathbf{u}_2|^2 = 1 + 0 + 1 = 2 \Rightarrow |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| = \sqrt{2}$.

27. Para tener independencia lineal se necesita que $a^2 + b^2 \neq 0$. Para tener ortonormalidad se necesita que $a^2 + b^2 = 1$.

Problemas 4.10

1. ***i)*** $(A, A) = a_{11}^2 + a_{22}^2 + \cdots + a_{nn}^2 \geq 0$.

ii) $(A, A) = 0$ implica que $a_{ii}^2 = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ de manera que $A = 0$. Si $A = 0$, entonces $(A, A) = 0$.

iii) $(A, B + C) = a_{11}(b_{11} + c_{11}) + \cdots + a_{nn}(b_{nn} + c_{nn}) = a_{11}b_{11} + a_{11}c_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn} + a_{nn}c_{nn} = (a_{11}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn}) + (a_{11}c_{11} + \cdots + a_{nn}c_{nn}) = (A, B) + (A, C)$.

iv) Similarmente $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$.

v) $(A, B) = (B, A) = (\overline{B, A})$, ya que todos los elementos son reales y $a_{ii}b_{ii} = b_{ii}a_{ii}$.

vi) $(\alpha A, B) = (\alpha a_{11})b_{11} + \cdots + (\alpha a_{nn})b_{nn} = \alpha\,[a_{11}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{nn}] = \alpha\,(A, B)$.

vii) $(A, \alpha B) = (\overline{\alpha B, A}) = (\alpha B, A) = \alpha(B, A) = \alpha\,(\overline{A, B}) = \alpha\,(A, B)$

3. Sea E_i la matriz de $n \times n$ con un 1 en la posición i, i y 0 en otra parte. Es sencillo ver que $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ es una base ortonormal para D_n.

5. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

7. $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)\right\}$

9. Primero observe que si $A = (a_{ij})$, y $B^t = (b_{ji})$, entonces

$$(AB^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$$

de manera que

$$\operatorname{tr}(AB^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

i) $(A, A) = \operatorname{tr}(AA^t)$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right) \geq 0$$

ii) $(A, A) = 0$ implica que $a_{ij}^2 = 0$ para todo i y j con lo que $A = 0$. Inversamente, si $A = 0$, entonces $A^t = 0$ y $AA^t = 0$ por lo que $\operatorname{tr}(AA^t) = 0$.

iii) $(A, B + C) = \operatorname{tr}[A(B + C)^t] + \operatorname{tr}[A(B^t + C^t)] = \operatorname{tr}(AB^t + AC^t) = \operatorname{tr}(AB^t) + \operatorname{tr}(AC^t) = (A, B) + (A, C)$.

iv) De manera similar, $(A + B, C) = (A, C) + (B, C)$.

v) $(A, B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}(BA^t) + (B, A)$.

vi) $(\alpha A, B) = \operatorname{tr}(\alpha AB^t) = \alpha \operatorname{tr}(AB^t) = \alpha(A, B)$.

vii) $(A, \alpha B) = (\alpha B, A) = \alpha(B, A) = \alpha(A, B)$.

11. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

13. ***a)*** ***i)*** $(p, p) = p(a)^2 + p(b)^2 + p(c)^2 \geq 0$.

ii) $(p, p) = 0$ implica que $p(a) = p(b) = p(c) = 0$. Pero una cuadrática puede tener a lo más dos raíces. Entonces $p(x) = 0$ para toda x. Inversamente, si $p \equiv 0$, entonces $p(a) = p(b) = p(c) = 0$, de manera que $(p, p) = 0$.

iii) $(p, q + r) = p(a)(q(a) + r(a)) + p(b)(q(b) + r(b)) + p(c)(q(c) + r(c))$
$= [p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)(q(c)] + [p(a)r(a) + p(b)r(b) + p(c)r(c)]$
$= (p, q) + (p, r)$.

iv) De manera similar, $(p + q, r) = (p, r) + (q, r)$.

v) $(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)(q(c)$
$= q(a)p(a) + q(b)p(b) + q(c)p(c)$
$= (q, p)$.

vi) $(\alpha p, q) = [\alpha p(a)]q(a) + [\alpha p(b)]q(b) + [\alpha p(c)]q(c)$
$= \alpha[p(a)q(a) + p(b)q(b) + p(c)q(c)]$
$= \alpha(p, q)$.

vii) $(p, \alpha q) = (\alpha p, q) = \alpha\,(q, p) = \alpha(p, q)$

b) No, ya que *ii)* se viola. Por ejemplo, sea $a = 1$, $b = -1$ y $p(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 \neq 0$. Entonces $p(a) = p(b) = 0$ de manera que $(p, p) = 0$ aun cuando $p \not\equiv 0$. De hecho, para cualquier polinomio q, se tiene que $(p, q) = 0$.

15. $\sqrt{31}$

17. $0 \le \left(\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right), \left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} - \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right)$

$$= \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}|^2} - \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} - \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^2}$$

$$= \frac{|\mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2} - \left[\frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right] + \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2}$$

Ahora si $z = a + bi$, entonces $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \text{ Re } z$(y $z - \bar{z} = 2bi = 2ilmz$). Así, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = 2 \text{ Re } (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, y se tiene $2 - \frac{2 \text{ Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \ge$ o sea, $\frac{\text{Re}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \le 1$.

Sea λ un número real. Entonces $0 \le ((\lambda\mathbf{u} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v}), (\lambda\mathbf{u} + (\mathbf{u}, \mathbf{v})\mathbf{v})) = \lambda^2|\mathbf{u}|^2 + |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2 + \lambda\overline{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v})(\mathbf{v}, \mathbf{u}) =$ (ya que λ es real) $\lambda^2|\mathbf{u}|^2 + 2\lambda|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 + |(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2$. La última línea es una ecuación cuadrática en λ. Si se tiene $a\lambda^2 + b\lambda + c \ge 0$, entonces la ecuación $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ puede tener a lo más una raíz real y, por lo tanto, $b^2 - 4ac \le 0$. Así, $4(|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2)^2 - 4|\mathbf{u}|^2|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2|\mathbf{v}|^2 \le 0$ o $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 \le |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2$ y $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

19. $H^{\perp} = \text{gen } \{(-15x^2 + 16x - 3), (20x^3 - 30x^2 + 12x - 1)\}$

21. $1 + 2x + 3x^2 - x^3 = \frac{30x^2 + 52x + 19}{20} + \frac{(-20x^3 + 30x^2 - 12x + 1)}{20}$

23. $\frac{2}{\pi} + \sqrt{3}\left(\frac{2}{\pi} - \frac{8}{\pi^2}\right)\sqrt{3}(2x - 1) + \sqrt{5}\left(\frac{2}{\pi} + \frac{24}{\pi^2} - \frac{96}{\pi^3}\right) \times \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$

$\approx -0.8346x^2 - 0.2091x + 1.0194$

25. $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$

Verifique que $A^*A = I$.

27. Se verifican las siete condiciones en la página 252.

i) $(f, f) = \int_a^b f\bar{f} = \int_a^b f_1^2 + f_2^2 \ge 0$ ya que $f_1^2 \ge 0$ y $f_2^2 \ge 0$

ii) Se deduce del inciso *i*).

iii) $(f, g + h) = \int_a^b f\overline{(g + h)} = \int_a^b f\bar{g} + f\bar{h} = (f, g) + (f, h)$

iv) Similar al inciso *iii*).

v) $(f, g) = \int_a^b f\bar{g} = \int_a^b \bar{g}f$ y $\overline{(g, f)} = \int_a^b g\bar{f} = \int_a^b \bar{g}f$

vi) $(\alpha f, g) = \int_a^b \alpha\, f\bar{g} = \alpha \int_a^b f\bar{g}$

vii) $(f, \alpha g) = \int_a^b f(\bar{\alpha}\bar{g}) = \int_a^b f\bar{\alpha}\bar{g} = \bar{\alpha}\int_a^b f\bar{g} = \bar{\alpha}(f, g)$

29. $\sqrt{\pi}$

Ejercicios de repaso de la unidad 4

1. Sí; dimensión 2; base $\{(1, 0, 1), (0, 1, -2)\}$.

3. No, ya que si (x, y, z) satisface $x + y + z \le 0$, entonces $-(x, y, z)$ satisface $x + y + z \ge 0$ y este punto no pertenece a la primera desigualdad.

5. No, no lo es; $(1, -4, 3)$ satisface la ecuación, pero $(-1, 4, -3)$ no.

7. Sí; dimensión $[n(n + 1)]/2$; base $\{(E_{ij}: j \ge i)\}$, donde E_{ij} es la matriz con un 1 en la posición i, j y 0 en otra parte.

9. Sí; la base es $\{1, \mathbf{x}, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \mathbf{x}^4\}$; dimensión $= 5$.

11. Sí; la base es:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\};\ \text{dimensión} = 5.$$

13. Sí; dimensional infinito.

15. Linealmente dependiente.

17. Linealmente dependiente.

19. El conjunto de vectores no es linealmente independiente.

21. Linealmente dependiente.

23. Linealmente independiente.

25. ***a)*** $= \begin{vmatrix}1&3&-5\\5&0&5\\2&4&6\end{vmatrix} = -180 \Rightarrow$ linealmente independiente.

b) $= \begin{vmatrix}2&3&-1\\1&-2&-4\\4&6&-2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ linealmente dependiente.

27. $y = 2x/3$ base: $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right\}$; dimensión $= 1$.

29. Dimensión 3; base $\{(1, 0, 3, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$, (x, z, y, w).

31. Dimensión 4; base $\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, donde D_i es la matriz con un número en la posición (i, i) y 0 en otra parte.

33. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

la dimensión es 6.

35. $\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&0&4\\0&-2&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&3\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$$\nu(A) = 1, \text{rango } A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\right\},$$

$$\rho(A) = 2.$$

37. Imagen $A = \mathbb{R}^3$, $N_A = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(A) = 3$, $\nu(A) = 0$.

39. $N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\0\\2\end{pmatrix}\right\}, \nu(A) = 2,$

$$C_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right\}, \rho(A) = 2$$

41. $\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&0\\1&-2&3&3\\2&-3&5&6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&2&3\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}; N_A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\};$$

$$\nu(A) = 2, \text{rango } A = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right\},$$

$$\rho(A) = 2.$$

43. $C = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}; C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-3&2\\2&3&-2\\-2&2&2\end{pmatrix};$

$$C^{-1}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17/5\\2/5\\18/5\end{pmatrix}$$

45. $x = \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$

$$+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

47. $\left\{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right\}$

49. $\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

51. $\text{proy } e^x = -\frac{1}{28}(5e^2+25)x^2 + \frac{1}{14}(5e^2+67) + \frac{1}{21}(13e^2-61)\,P_2[0,2]$

53. $y = \frac{1}{6}(7x^2+9x-16)$

UNIDAD 5

Problemas 5.1

1. Lineal. **3.** Lineal. **5.** Lineal.

7. No lineal, ya que

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\\ \alpha z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \alpha z\end{pmatrix}$$

mientras que

$$\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha z\end{pmatrix}$$

9. No lineal ya que

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2x^2\\ \alpha y\end{pmatrix} \neq \alpha T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

11. Lineal. **13.** Lineal. **15.** Lineal.

17. No lineal, ya que

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\right) = \alpha^2 T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\alpha T\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}$$

si $\alpha \neq 1$ o 0

19. No lineal, ya que

$$\begin{aligned}T(A+B) &= (A+B)^t(A+B)\\ &= (A^t+B^t)(A+B)\\ &= A^tA + A^tB\\ &\quad + B^tA + B^tB\end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned}T(A)+T(B) &= A^tA + B^tB\\ &\neq T(A+B)\end{aligned}$$

a menos que $A^tB + B^tA = 0$.

21. Lineal.

23. No lineal a menos que $\alpha = 1$ ya que $T(\alpha D) = I + \alpha D \neq \alpha(I-D) = \alpha T(D)$.

25. Lineal.

27. Lineal.

29. No lineal ya que

$$T(\alpha p(x)) = \alpha p(x) + [\alpha p(x)]^2 \neq \alpha T(p(x))$$

31. No lineal a menos que $\alpha = 1$ ya que

$$\begin{aligned}T(\alpha f) &= \alpha f(x) + 1 \neq \alpha(f(x)+1)\\ &= \alpha T(f(x))\end{aligned}$$

33. Lineal.

35. Lineal.

37. Lineal.

39. La transformación T hace una rotación de vectores en el plano xy de 180°.

41. ***a)*** $A_\theta = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$;

b) $A_\theta\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{4+3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3+4\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$

43. La transformación T rota a los vectores en sentido contrario a las manecillas del reloj un ángulo θ en torno al eje y en un plano paralelo al plano xz.

45. $T(A) = T\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$

47. $T(0) = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}) = 0$, si V y W son diferentes los dos ceros pueden ser diferentes.

49. $T(\alpha \mathrm{v}) = (u_0, \alpha \mathrm{v}) = \overline{\alpha}(u_0, \mathrm{v}) \neq \alpha(u_0, \mathrm{v}) = \alpha T(\mathrm{v})$ a menos que $\alpha \in L$.

51. Sea $T_1 \in L(V, W)$ y $T_2 \in L(V, W)$. Como

$$(T_1 + T_2)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_1(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + T_2(\mathbf{x} + \mathbf{y})$$
$$= T_1(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{y}) + T_2(\mathbf{x}) + T_2(\mathbf{y})$$
$$= (T_1 + T_2)(\mathbf{x}) + (T_1 + T_2)(\mathbf{y}),$$

y además $(T_1 + T_2)(\alpha x) = T_1(\alpha \mathbf{x}) + T_2(\alpha \mathbf{x})$ $= \alpha(T_1(\mathbf{x}) + T_1(\mathbf{y})) = \alpha(T_1 + T_2)(\mathbf{x})$, se tiene cerradura en la adición. Como $(\alpha T)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha(T\mathbf{x} + T\mathbf{y}) = \alpha T\mathbf{x} + \alpha T\mathbf{y} = (\alpha T)\mathbf{x} + (\alpha T)\mathbf{y}$ y $(\alpha T)(\beta \mathbf{x}) = \alpha\beta T(\mathbf{x}) = \beta\alpha T(\mathbf{x}) = \beta(\alpha T)\mathbf{x}$ entonces se tiene cerradura con el producto escalar. Observe que la transformación neutra es la transformación cero, y para cada elemento $T \in L(V, W)$, entonces $(-T) \in L(V, W)$ y $T + (-T) = 0$. El resto de los axiomas se satisface a partir de las reglas de la suma y la multiplicación por escalar de funciones.

Problemas 5.2

1. Núcleo $= \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$, es decir, el eje y; imagen $= \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$, es decir, el eje x; $\rho(T) = \nu(T) = 1$.

3. Núcleo $= \{\mathbf{x} | \mathbf{x} = 0\}$, $\nu(T) = 0$, $\operatorname{Im} T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| y = -\frac{2}{3}x\right\}$, $\rho(T) = 1$.

5. $\operatorname{Nu}(T) = \{(x, y, z, w) | x = -z \text{ y } y = -w\}$, $\nu(T) = 2$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$, $\rho(T) = 2$.

7. $\operatorname{Nu} T = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$,

Imagen $= M_{22}$,

$p(T) = 4$, $\nu(T) = 0$

9. Núcleo $= \{A: A^t = -A\} = \{A: A$ es antisimétrica$\}$; imagen $= \{A: A$ es simétrica$\}$; $\rho(T) = (n^2 + n)/2$; $\nu(T) = (n^2 - n)/2$.

11. $\operatorname{Nu}(T) = \{f(t) | f(t) = a_0 + a_1 t, a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$, $\nu(T) = 2$, $\operatorname{Im} T = \{f \in C[0, 1]\}$; $\rho(T) = \infty$.

13. $\operatorname{Nu}(T) = \{(0, 0)\}$, $\nu(T) = 0$, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$, $\rho(T) = 2$.

15. Para todo $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ para algún $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Entonces

$$T\mathbf{v} = T(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)$$
$$= a_1T\mathbf{v}_1 + a_2T\mathbf{v}_2 + \cdots + a_nT\mathbf{v}_n$$
$$= a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

Por lo tanto T es el operador identidad.

17. $\operatorname{Nu}(T)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ que contiene al origen. Por lo tanto del ejemplo 4.6.9, $\operatorname{Im} T$ o es *a*) $\{0\}$, o *b*) una recta que pasa por el origen, o *c*) un plano que pasa por el origen, o *d*) $\mathbb{R}^3$.

19. $Tx = Ax$ donde $A = \begin{pmatrix} c & \dfrac{1-c}{a} \\ d & \dfrac{b-d}{a} \end{pmatrix}$, $c, d \in \mathbb{R}$.

21. $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

23. $\operatorname{Nu} T = \{f \in C^1[0, 1]: xf'(x) = 0, \forall x \in [0, 1]\}$ $= f(x)$ constante $\in [0, 1]$

$\operatorname{Im} T = \{xf(x): f(x) \in C[0, 1]$.

25. ***a)*** Suponga que $T_1, T_2 \in U$. Entonces para cada $\mathbf{h} \in H$, $(T_1 + T_2)\mathbf{h} = T_1\mathbf{h} + T_2\mathbf{h} = 0 + 0 = 0$, y $(\alpha T_1)\mathrm{h} = \alpha(T_1\mathrm{h}) = \alpha \cdot 0 = 0$.

Por lo que U es un subespacio de $L(V, V)$.

b) $\dim U = n(n - k)$. De hecho extendiendo una base de H, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, a una base de V, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, por lo tanto $T \in U \Leftrightarrow T(\mathbf{u}_1) = \cdots = T(\mathbf{u}_k) = 0$. En particular $T(\mathbf{u}_{k+1}), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$ son $n - k$ vectores arbitrarios en el espacio V de dimensión n. Por lo que si $T_{ij}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_j$; $T_{ij}(\mathbf{u}_l) = 0$, $l \neq i$, $k < i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, entonces T_{ij} son una base de U.

Problemas 5.3

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$
$\nu(T) = 0$, $\rho(T) = 2$

3. $A_T = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$,
$\nu(T) = 0$, $\text{Im}\, T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\rho(T) = 1$

5. $A_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $a = b = c = d = 0$, T es la transformación cero de modo que $\text{Nu}(T) = \mathbb{R}^2$, $\nu(T) = 2$, $\text{Im}\, T = \{0\}$, $\rho(T) = 0$. Si $ad - cb = 0$ y suponga que al menos uno de los coeficientes a, b, c, d es diferente de cero. Sin pérdida de generalidad, sea $a \neq 0$. Entonces $\rho(T) = 1$, $\nu(T) = 1$,

$$\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right\} \quad \text{Im}\, T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\right\}.$$

7. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$; imagen $T = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}; \rho(T) = 2,$$

$\nu(T) = 1$

9. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$; image $T =$

ge $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; N $(T) =$

ge $\left\{\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$;

$\rho(T) = 2, \nu(T) = 2.$

11. $A_T = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$,

$$\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{d}{c} \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

$\nu(T) = 2$, $\text{Im}\, T = \mathbb{R}^2$, $\rho(T) = 2$.

13. $A_T = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} & \frac{33}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{31}{7} \end{pmatrix}$, $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$,
$\text{Nu}\ T = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im}\, T = \mathbb{R}^2$.

15. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{14}{5} & \frac{11}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$, $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$,

$$\text{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}, (\text{Im}\, T)_{B_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{11}{10} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}\right\}$$

17. $A_T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\rho(T) = 1$, $\nu(T) = 0$,

$$\text{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}, \text{Im}\, T = \text{gen}\{1 + x + x^2 + x^3\}.$$

19. $A_T \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 2$,
$\text{Nu}(T) = \text{gen}\{1, x^3 - 1\}$, $\text{Im}\, T = P_1$

21. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; imagen $T =$
$\text{gen}\{1 + x^2, -1 + x, 3 + 3x + 5x^2\} =$
P_2; $\text{Nu}(T) = \text{gen}\{x^2 - 4x - 6\}$;
$\rho(T) = 3, \nu(T) = 1.$

23. $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \nu(T) = 3,$$

$$\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}, \rho(T) = 2$$

25. $A_T = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \rho(T) = 3, \nu(T) = 0,$

$\text{Nu}(T) = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im}(T) = \text{gen}\{x, x^2, x^3\}$

27. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$; imagen $D = P_3$;

nu $D = \mathbb{R}^2$; $\rho(D) = 4$, $\nu(D) = 1$.

29. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$;

imagen $D = P_{n-1}$; nu $D = \mathbb{R}$;

$\rho(D) = n, \nu(D) = 1$.

31. $A_T = \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\nu(T) = 0$,

$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$, $\rho(T) = 3$.

33. Sea $m \in \mathbb{R}$, se define a $[\![m]\!]_k = m(m-1)$ $(m-2)\cdots(m-k+1), 1 \le k \le m$.

$A_D = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n-k+1)\times(n+1)}$,

$a_{i,\,k+i} = [\![k+i-1]\!]_k$,

$1 \le i \le n-k+1$, $a_{ij} = 0$ en otro caso.

$\rho(D) = n-k+1$, $\nu(D) = (n+1) - \rho(D) = k$,

$\text{Nu}(D) = \text{gen}\{1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}\}$,

$\text{Im}(D) = \text{gen}\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-k}\} = P_{n-k}$

35. $A_J = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n+1}\right)$, $\rho(J) = 1$,

$\nu(J) = 0$, $\text{Nu}(J) = \{\mathbf{0}\}$, $\text{Im}(J) = \mathbb{R}$.

37. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; imagen $T = P_2$;

nu $= T = \{\mathbf{0}\}$; $\rho(T) = 3$, $\nu(T) = 0$.

39. Por ejemplo, en M_{34}, $A_T = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix}$

En general, $A_T = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = \begin{cases}1, & \text{si } i = km + l\\ & \text{y } j = (l-1)n + k + 1\\ & \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1\\ & \text{y } l = 1, 2, \ldots, m\\ 0, & \text{de otra manera}\end{cases}$

41. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; imagen D = gen $\{\text{sen } x, \cos x\}$; nu $D = \mathbb{R}$; $\rho(D) = 2$, $\nu(D) = 1$.

43. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -i/2 \\ i/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

45. Sean B_1 y B_2 dos bases para V y W, respectivamente. Se tiene $(T\mathbf{v})_{B_2} = A_T(\mathbf{v})_{B_1}$ para todo $\mathbf{v} \in V$. Entonces $\mathbf{v} \in \text{Nu}(T)$ si y sólo si $T\mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si $A_T(\mathbf{v})_{B_1} = (\mathbf{0})_{B_1}$ si y sólo si $(\mathbf{v})_{B_1} \in$ nu A_T. Así, el núcleo de $T = N_{A_T}$ de manera que $\nu(T) = \nu(A_T)$. Si $\mathbf{w} \in$ imagen T, entonces $T\mathbf{v} = \mathbf{w}$ para algún $\mathbf{v} \in V$, con lo que $A_T(\mathbf{v})_{B_1} = (T\mathbf{v})_{B_2} = (\mathbf{w})_{B_2}$. Esto significa que $(\mathbf{w})_{B_2} \in R_{A_T}$. De este modo R_{A_T} = imagen T de manera que $\rho(T) = \rho(A_T)$. Como $\nu(A_T) + \rho(A_T) = n$, se ve que también $\nu(T) + \rho(T) = n$.

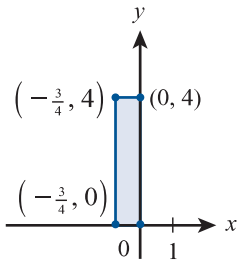
47. Compresión a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{4}$.

49. Corte a lo largo del eje x con $c = 2$.

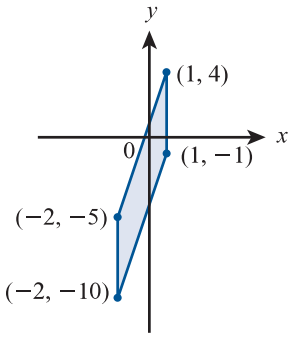
51. Corte a lo largo del eje y con $c = \frac{1}{2}$.

53. Reflexión con respecto a la recta $y = x$.

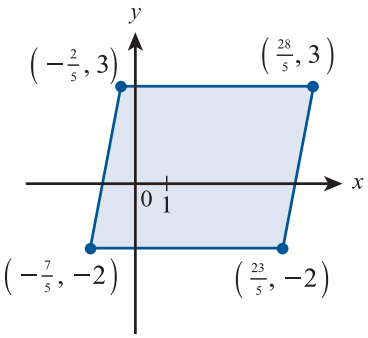
55. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;



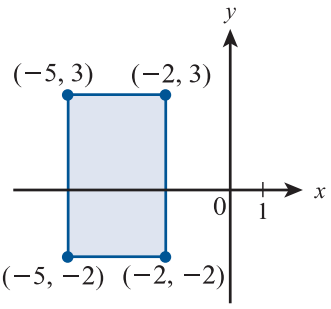
57. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;



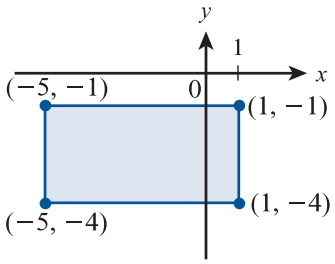
59. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;



61. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;



63. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;



65. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

67. $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

69. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

71. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 62 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicios de repaso de la unidad 5

1. Lineal.

3. No es lineal ya que
$T(\alpha x(x, y, z)) \neq \alpha T(x, y, z)$.

5. Lineal.

7. No lineal ya que $T(p_1 + p_2) = 1 + p_1 + p_2$, pero
$Tp_1 + Tp_2 = (1 + p_1) + (1 + p_2) = 2 + p_1 + p_2$.

9. $\text{Nu}(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$;
$\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 0$.

11. $\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$;
$\rho(T) = 2$, $\nu(T) = 1$.

13. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nu(T) = 0$,
$\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\rho(T) = 2$.

15. $\text{Nu}(T) = \{f \in C[0, 1]: f(1) = 0\}$, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}$,
$\rho(T) = 1$, $\nu(T) = \infty$.

17. $A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$,
$\nu(T) = 1$, $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, $\rho(T) = 2$.

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; imagen $T = \mathbb{R}^2$;
$\text{Nu}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$;
$\rho(A) = \nu(A) = 2$.

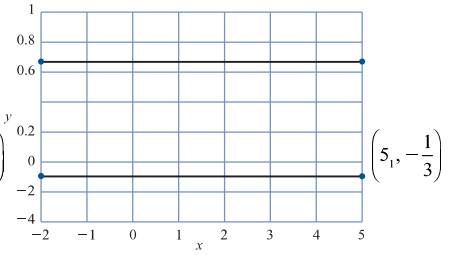
21. $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nu(T) = 0$,
$\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $\rho(T) = 2$.

23. $A_T = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 33 & 5 \end{pmatrix}$, $\text{Nu}(T) = \{0\}$, $\nu(T) = 0$,
$(\text{Im}(T)_{B_2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} \frac{20}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{33}{13} \\ \frac{5}{13} \end{pmatrix}\right\}$, $\rho(T) = 2$.

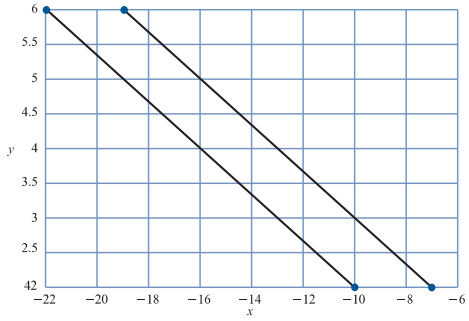
25. Compresión a lo largo del eje y, con factor de un tercio.

27. Corte a lo largo del eje x con factor -5.

29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$,



31. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.



APÉNDICE A

Problemas A.1

1. $-4, 3;\ E_{-4} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\};$

$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\-5\end{pmatrix}\right\}$

3. $-2, -2;\quad E_{-2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, la multiplicidad geométrica para el valor característico -2 es 1.

5. $-3, -3;\ E_{-3} = \mathbb{R}^2$, la multiplicidad geométrica para el valor característico -3 es 2.

7. $2+3i,\ 2-3i;\ E_{2+3i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1+3i\\-5\end{pmatrix}\right\},$

$E_{2+3i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1-3i\\-5\end{pmatrix}\right\}.$

9. $-2+5i, -2-5i$

$E_{-2+5i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}\right\}$

$E_{-2-5i} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}\right\}$

11. 1, 1, 10;

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\right\};$

$E_{10} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right\};$

la multiplicidad geométrica del 1 es 2

13. 1, 1, 1; $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$; la multiplicidad geométrica es 1 (multipl. alg., 3)

15. $3,\ \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

$E_{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \text{gen}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7-i5\sqrt{3}\\1+i3\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$

$E_{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \text{gen}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-7+i5\sqrt{3}\\1-i3\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}\right\}$

17. 1, 1, 2; $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right\};$

$E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$, la multiplicidad geométrica para el valor característico 1 es 2.

19. 1, 2, 5

$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$E_2 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

$E_5 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}\right\}$

21. 1, 0 $E_1 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad E_0 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, la multiplicidad geométrica para el valor característico 0 es 1.

23. $a, a, a, a;\quad E_a = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\},$

la multiplicidad geométrica para el valor característico a es 3.

25. $a, a, a, a;\quad E_a = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, la multiplicidad geométrica para el valor característico a es 1.

27. 3, 4

$$E_3 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \quad E_4 = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

29. Observe que $\det(A^t - \lambda I) = \det(A - \lambda I)^t = \det(A - \lambda I)$. Entonces los polinomios característicos de A y A^t son iguales, por lo tanto sus valores característicos son iguales.

31. Observe que A^{-1} existe si y sólo si $A\mathbf{x} = 0$ únicamente cuando $\mathbf{x} = 0$, esto es, si y sólo si 0 *no* es un valor característico de A.

33. Para cada λ_i, $1 \le i \le k$, existe un vector $\mathbf{x}_i \neq 0$ tal que $A\mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_i$. Ahora, $(A - \alpha I)\mathbf{x}_i = A\mathbf{x}_i - \alpha\mathbf{x}_i = (\lambda_i - \alpha)\mathbf{x}_i$. Por lo tanto $\lambda_i + \alpha$, $i \le i \le k$ son valores característicos de $(A - \alpha I)$. En cambio, si $A - \alpha I)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $A\mathbf{x} = (\lambda + \alpha)\mathbf{x}$, por lo que $\lambda + \alpha = \lambda_i$, esto es, $\lambda = \lambda_i - \alpha$.

35. Sea $\mathbf{x}_i$ el vector característico asociado al valor característico λ_i de la matriz A. Entonces $A^n(\mathbf{x}_i) = A^{n-1}(A\mathbf{x}_i) = A^{n-1}(\lambda_i \mathbf{x}_i) = \lambda_i A^{n-1}\mathbf{x}_i$. Al repetir el argumento anterior $n - 1$ veces se llega a que $A^n\mathbf{x}_i = \lambda_i^n \mathbf{x}_i$, por lo tanto cada λ_i^n es un valor característico de A^n. En cambio, suponga que ν es un valor característico complejo de A^n con vector característico asociado $\mathbf{x}$. Sea $\lambda = \sqrt[n]{\nu}$ una de las n raíces complejas de ν. Entonces $A^n - \nu I = \prod_{j=1}^{n}\left(A - e^{\frac{2\pi ij}{n}}\lambda I\right)$. Sea $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}$ y $\mathbf{y}_m = \prod_{j=1}^{m}\left(A - e^{\frac{2\pi ij}{n}}\lambda I\right)\mathbf{x}, m = 1, \ldots, n$. Como $\mathbf{y}_n = (A^n - \nu I)\mathbf{x} = 0$, existe una constante $k > 0$ suficientemente pequeño con $\mathbf{y}^k = 0$. Dado que $k > 0$, $y_{k-1} \neq 0$ y $\left(A - e^{\frac{2\pi ij}{n}}\lambda I\right)$ $\mathbf{y}_{k-1} = \mathbf{y}_k = 0$. Esto dice que $e^{\frac{2\pi ik}{n}}\lambda$ es un valor característico de A, de modo que $\lambda_l = e^{\frac{2\pi ik}{n}}\lambda$, para algún l. Pero $\lambda_l^n = \left(e^{\frac{2\pi ik}{n}}\lambda\right)$ $= \lambda^n = \nu$, esto es $\nu = \lambda_l^n$. Esto muestra que cada valor característico de A^n es la n-ésima potencia de algún valor característico de A.

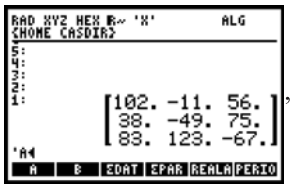
37. Se tiene que $p(A)x_i = p(\lambda_i)\ x_i$ para $1 \le i \le k$. Entonces $p(\lambda_i)$, $1 \le i \le k$, son valores característicos de $p(A)$.

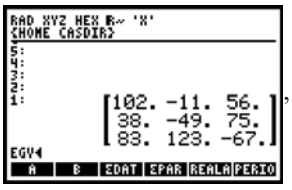
39. Utilizando los resultados de los problemas 23-26, se tiene que $\lambda = 2$ es un valor característico con multiplicidad algebraica 4. Para A_1 la multiplicidad geométrica es 4. Para A_2 la multiplicidad geométrica es 3. Para A_3 la multiplicidad geométrica es 2. Para A_4 la multiplicidad geométrica es 1.

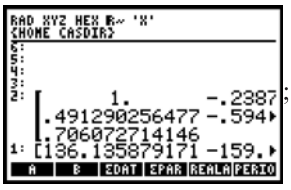
41. Observe que $A^\top \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ ya que la suma de las columnas de A es 1. Por lo tanto 1 es un valor característico de A^t con vector característico $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$. De modo que 1 es un valor característico de A ya que $\det(A - I) = \det(A^\top - I) = 0$

43. Revise que $\begin{pmatrix}a & 0\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

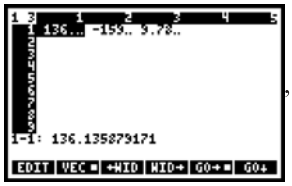
45.



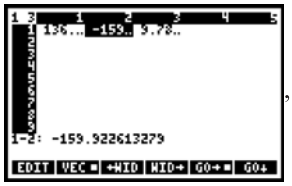




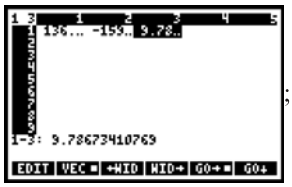
los valores característicos son



,



,

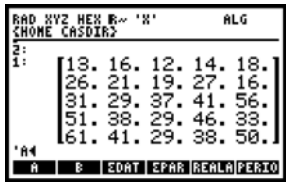


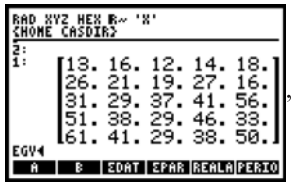
;

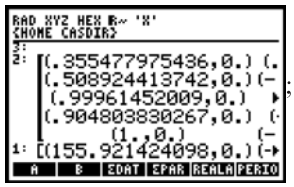
con vectores característicos

.

47.



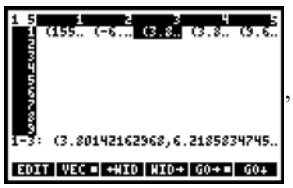




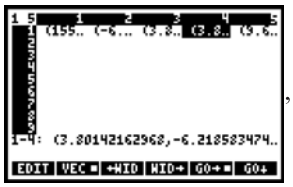
los valores característicos son

,

,



,



,

;

con vectores característicos

(.355477975436, 0.)	(.656603950803, 0.)	(1.37121250621E-2, -4.58555951253E-2)	(1.37121250621E-2, 4.58555951253E-2)	(8.46815933238E-2, 0.)
(.508924413742, 0.)	(-.567724652955, 0.)	(-9.83665213641E-2, -.300432679563)	(-9.83665213641E-2, .300432679563)	(-.303086039306, 0.)
(.99961452009, 0.)	(1., 0.)	(1., 0.)	(1., 0.)	(1., 0.)
(.904803830267, 0.)	(-.4695934249, 0.)	(-.458255573315, 7.03515044225E-2)	(-.458255573315, -7.03515044225E-2)	(-.766844189822, 0.)
(1., 0.)	(-.497033946918, 0.)	(-.213974046817, .240504338382)	(-.213974046817, -.240504338382)	(.183522037169, 0.)

49. 5.

51. 2.

Problemas A.2

1. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Sí; $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2-i & 2+i \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

7. Sí; $C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} - i\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} + i\frac{3}{5} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2-3i & 0 \\ 0 & 2+3i \end{pmatrix}$$

9. Sí; $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

11. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

15. Sí; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1-i\sqrt{2} & 1+i\sqrt{2} & -15 \\ -\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{2}}{3} & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 7+i2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 7-i2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

19. Sí; $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}+\frac{i}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}-\frac{i}{5} \end{pmatrix}$

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

21. Como A es semejante a B, $B = D^{-1}AD$ para alguna matriz D invertible. B es semejante a C, $C = E^{-1}BE$ para alguna matriz E invertible. Entonces $C = E^{-1}D^{-1}ADE = (DE)^{-1}A(DE)$. Por lo tanto A es semejante a C.

23. Suponga que C es invertible. Si $\mathbf{x} \in \text{Nu}(A)$ entonces $CA\mathbf{x} = C0 = 0$. Por lo tanto $\mathbf{x} \in \text{Nu}(CA)$. Si $\mathbf{x} \in \text{Nu}(CA)$ entonces $A\mathbf{x} = 0$ ya que $\text{Nu}(C) = 0$. De modo que $\mathbf{x} \in \text{Nu}(A)$ si y sólo si $\mathbf{x} \in \text{Nu}(CA)$. Por lo tanto $\nu(CA) = \nu(A)$. Ahora suponga que $\mathbf{x} \in \text{Im}(A)$. Entonces existe $\mathbf{y}$ tal que $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Como C es invertible, $\text{Im}(C) = \mathbb{R}^n$. Entonces existe $\mathbf{z}$ tal que $C\mathbf{z} = \mathbf{y}$, y $AC\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Por lo tanto $\text{Im}(A) \subseteq \text{Im}(AC)$. Suponga $\mathbf{x} \in \text{Im}(AC)$. Entonces existe $\mathbf{z}$ tal que $AC\mathbf{z} = \mathbf{x}$. Sea $\mathbf{y} = C\mathbf{z}$, entonces $A\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Por lo tanto $\text{Im}(AC) \subseteq \text{Im}(A)$ e $\text{Im}(A) = \text{Im}(AC)$ y por lo tanto $\rho(AC) = \rho(A)$. Entonces $\rho(A) + \nu(A) = \rho(CA) + \nu(CA) \Rightarrow \rho(A) = \rho(CA)$. Por lo que $\rho(A) = \rho(AC) = \rho(CA)$. Como C^{-1} es invertible, $\rho(C^{-1}AC) = \rho((AC)C^{-1}) = \rho(A)$. Esto es, $\rho(B) = \rho(A)$ y por lo tanto $\nu(A) = \nu(B)$.

25. Como A es semejante a B, $B = D^{-1}AD$ para alguna matriz D invertible. Entonces $\det B = \det(D^{-1}AD) = \dfrac{1}{\det D}\det A \det D = \det A$.

27. $A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

29. $A^{10} = -\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -4\times 8^{10} - 5 & -2\times 8^{10} + 2 & -2\times 8^{10} + 4 \\ -2\times 8^{10} + 2 & -8^{10} - 8 & -2\times 8^{10} + 2 \\ -4\times 8^{10} + 4 & -2\times 8^{10} + 2 & -2\times 8^{10} - 5 \end{pmatrix}$.

31. Como A es diagonalizable, A es similar a la matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Entonces $\det A = \det D = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

Problemas A.3

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5;$

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{26-6\sqrt{13}}} & \dfrac{2}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} \\ \dfrac{3-\sqrt{13}}{\sqrt{26-6\sqrt{13}}} & \dfrac{3+\sqrt{13}}{\sqrt{26+6\sqrt{13}}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.9571 & 0.2898 \\ -0.2898 & 0.9571 \end{pmatrix};$$

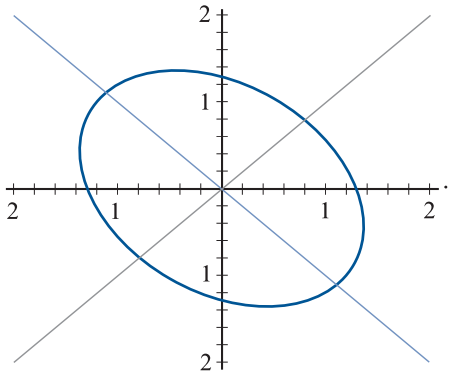
$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{10}{\sqrt{13}+3}\right)} - \frac{y'^2}{\left(\dfrac{10}{\sqrt{13}-3}\right)} = 1;$$

hipérbola; $\theta = 5.989 = 343°$

3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5,$

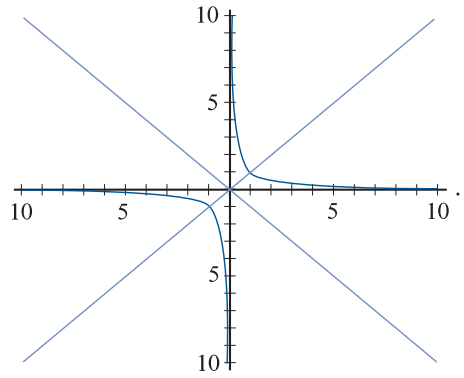
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{4},$$

$\dfrac{x'^2}{\frac{5}{4}} + \dfrac{y'^2}{\frac{5}{2}} = 1$, es una elipse con centro en el origen.



5. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1, \; Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$

$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}, \; \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1$, es una hipérbola con centro en el origen.



7. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a > 0;$

$$Q = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ -1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$\dfrac{x'^2}{2a} - \dfrac{y'^2}{2a} = 1$; hipérbola; $\theta = 7\pi/4 = 315°$.

9. Lo mismo que en el problema 5, excepto que ahora se tiene una hipérbola con los papeles de x' y y' cambiados; como $a < 0$, se tiene

$$\frac{y'^2}{(-2a)} - \frac{x'^2}{(-2a)} = 1$$

11. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0;$

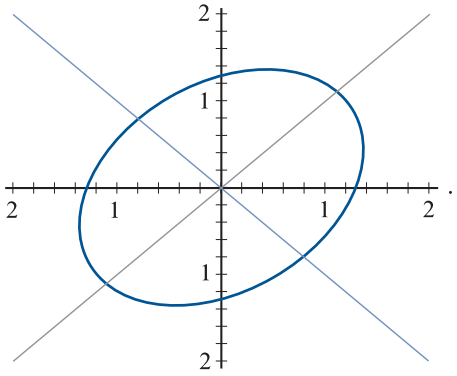
$$Q = \begin{pmatrix} 1\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$y'^2 = 0$, que es la ecuación de una recta que pasa por el origen; $\theta = \pi/4 = 45°$.

13. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5, \; Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$

$$D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \theta = \frac{7\pi}{4},$$

$\dfrac{x'^2}{\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}} + \dfrac{y'^2}{\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}} = 5$, es una elipse con centro en el origen.

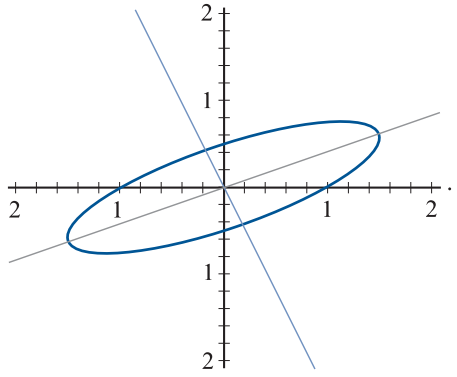


15. $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1,$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix} \frac{5+3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad \theta\approx 5.515 \text{ rad},$$

$\frac{5+3\sqrt{2}}{2}x'^2+\frac{5-3\sqrt{2}}{2}y'^2=1$, es una elipse con centro en el origen.



17. $\begin{pmatrix} 6 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=-7;$

$$Q=\begin{pmatrix} 5/\sqrt{26} & -1/\sqrt{26} \\ 1/\sqrt{26} & 5/\sqrt{26} \end{pmatrix};$$

$\frac{y'^2}{(14/13)}-\frac{x'^2}{(14/13)}=1$; hipérbola;

$\theta\approx 0.197\approx 11.31°$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

$-x'^2+2y'^2+2z'^2$

21. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2}x'^2+y'^2+\frac{2-\sqrt{10}}{2}z'^2$

23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y'^2+3z'^2$$

25. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

27. Observe que $\det A<0$ ya que por hipótesis tenemos una hipérbola. Por lo tanto $\det A<0$ para cualquier valor de d y la ecuación representa una hipérbola para cualquier valor de d diferente de cero.

29. Si $a=c$ entonces $\cot 2\theta=0\Rightarrow 2\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow=\theta=\pm\frac{\pi}{4}$.

31. $F(\mathbf{x})=A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=D\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'$. $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Pero si $D\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'>0$, para todo $\mathbf{x}'\in\mathbb{R}^n$, entonces $\lambda_i\geq 0, 1\leq i\leq n$. Si $D\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}'>0$ para todo $\mathbf{x}'\neq 0$, entonces $D\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1=\lambda_1>0$,

$D\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \lambda_2 > 0, \ldots, D\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = \lambda_n > 0$. Si $\lambda_1 > 0, 1 \le i \le n$, entonces $D\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' = \lambda_1 (x_1')^2 + \cdots + \lambda_2 (x_n')^2 = F(\mathbf{x}) \ge 0$, para todo $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n$ y $F(\mathbf{x}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = 0$. Por lo tanto $F(\mathbf{x})$ es positiva definida si y sólo si todos los valores característicos de A son positivos.

33. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2,\ 3$; la forma cuadrática es positiva definida.

35. Definida negativa.

37. Es indefinida.

39. Es positiva definida.

41. Es indefinida.

43. Negativa definida.

45. ***i)*** Si det $A \neq 0$, entonces ni λ_1 ni λ_2 son cero. Así, con $d = 0$, la ecuación (22) se convierte en $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 x'^2 = 0$. Si ahora tanto λ_1 como λ_2 son positivos o negativos, la ecuación se satisface sólo cuando $x' = 0$ y $y' = 0$, lo que corresponde al punto (0, 0). Si λ_1 y λ_2 tienen signos opuestos, entonces las ecuaciones se convierten en $x' = \pm\sqrt{\dfrac{\lambda_2}{-\lambda_1}}\, y'$, que son las ecuaciones de dos rectas. Si det $A = 0$, entonces una de las dos, λ_1 o λ_2 es cero, y la ecuación se convierte en $x' = 0$ o $y' = 0$, cada una de las cuales es la ecuación de una recta.

ÍNDICE ANALÍTICO

Los números de página seguidos de una "n" indican que la entrada se encuentra en las notas.

A

Adjunta de una matriz, 154, 168
  definición de la, 155
Álgebra de matrices, 74
Argand, plano de, 3
Argumento de un número complejo, 4
Axiomas de un espacio vectorial, 174

B

Base
  canónica, 231, 259
  canónica en R^n, 207
  canónica para M_{22}, 207
  canónica para P_n, 207
  estándar, 231
  ortonormal, 246, 247
  para un espacio vectorial, 206
Bloques, multiplicación de matrices por, 69

C

Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 257
Cerradura
  bajo la multiplicación por un escalar, 174, 258
  bajo la suma, 174, 258
  reglas de, 181
Coeficientes del sistema, matriz de, 19, 24
Cofactor
  de una matriz, 126
  ij de la matriz, 167
Cofactores
  en el primer renglón, expansión de det *A* por, 167
  expansión por, 127
  matriz de, 154
Columna *j*, 50
Columnas de una matriz, espacio de las, 217, 260
Combinación lineal
  de vectores, 68, 259
  definición de, 186
  en M_{23}, 187
  en P_n, 187
  en $\mathbb{R}^3$, 187
Componente, la, 50
Compresión a lo largo del eje
  X, 290
  Y, 290
Concepto de matriz, 19
Conjugado de un número complejo, 3
Conjunto
  de vectores, espacio generado por un, 188, 259
  generador, definición de, 187
  ortogonal, 243, 261
Conjunto ortonormal, 243, 261
  definición de, 254
  infinito, 255
Corte a lo largo del eje
  x, 291
  y, 292
Cosenos, ley de, 164
Cramer, Gabriel, 162
Cramer, regla de, 161, 162, 169
Cuaterniones, 47

D

de Moivre, Abraham, 8n
De Moivre, fórmula de, 8
Definición de
  combinación lineal, 186
  conjunto
    generador, 187
    ortonormal, 254
  dimensión, 209
  espacio
    con producto interno, 251
    vectorial real, 174
  igualdad de matrices, 52
  imagen de una matriz, 217
  la adjunta de una matriz, 155
  la inversa de una matriz, 90
  matrices equivalentes por renglones, 98
  norma de un vector, 243
  producto
    de dos matrices, 63
    escalar, 61
  rango de una matriz, 217
  subespacio, 181
  transformación lineal, 267
  transpuesta de una matriz, 108
Definición de matriz, 50
  de transformación, 282
  de transición, 234
  elemental, 113
  identidad, 89
  simétrica, 110
  triangular inferior, 117
Dependencia lineal, 193
Desigualdad
  de Cauchy-Schwarz, 257
  del triángulo, 257
Determinante de
  una matriz, 94, 123, 167
  Vandermonde, 148
Diagonal principal, 89, 166
Dimensión
  cero, 209
    espacio vectorial de, 259
  de M_{mn}, 210
  de P_n, 210
  de $\mathbb{R}^n$, 210
  de un espacio vectorial, 259
  definición de, 209
  finita, espacio vectorial de, 209, 259
  infinita, espacio vectorial de, 209, 259
  notación de la, 209

E

Ecuaciones
  equivalentes, sistemas de, 14
  inconsistente, sistema de, 13
  lineales
    consistente, sistema de, 22
    inconsistente, sistema de, 22
    sistema homogéneo de, 38, 44
  sin solución, sistema de, 13
Eje *x*
  compresión a lo largo del, 290
  corte a lo largo del, 291
  expansión a lo largo del, 289
Eje *y*
  compresión a lo largo del, 290
  corte a lo largo del, 292

expansión a lo largo del, 289
Elemento ij, 50
Eliminación
de Gauss, método de, 44
de Gauss-Jordan, método de, 19, 25, 44
gaussiana, método de, 25
Errores de redondeo, 26
Escalar
cerradura bajo la multiplicación por un, 174, 258
ley distributiva del producto, 62
ley distributiva para la multiplicación por un, 55
multiplicación
de una matriz por un, 54
por un, 174, 258
Escalares, 53, 165
ley asociativa de la multiplicación por, 174, 258
multiplicación por, 165
Escalonada
por renglones, matriz de forma, 24, 43
reducida por renglones, matriz de forma, 23, 43
Espacio
con producto interno, 261
definición de, 251
de solución, 212
de las columnas de una matriz, 217, 260
de los renglones de una matriz, 217, 260
generado por un conjunto de vectores, 188, 259
nulo, 186, 212
de una matriz, 216, 260
Espacio vectorial, 173
axiomas de un, 174
base para un, 206
complejo, 174
de dimensión
cero, 259
finita, 209, 259
infinita, 209, 259
dimensión de un, 259
M_{nm}, 177
real, 258
definición de, 174
trivial, 175
Espacios vectoriales
complejos, 267
isomórficos, 200
Euler, identidad de, 6
Euler, Leonhard, 6n
Expansión
a lo largo del eje x, 289
a lo largo del eje y, 289
de det A por cofactores en el primer renglón, 167
por cofactores, 127

F

Fermat, números primos de, 31n
Forma
cartesiana de un número complejo, 2
escalonada
por renglones, matriz de, 24, 43
reducida por renglones, matriz de, 23, 43
polar de un número complejo, 6
rectangular de un número complejo, 2
Fórmula de De Moivre, 8
Función
de valores complejos, 258
continua, 258
hamiltoniana, 57
lineal, 271

G

Gauss, Karl Friedrich, 19n, 31
Gauss-Jordan, método de eliminación de, 19, 25, 44
Gram-Schmidt, proceso de ortonormalización de, 245, 261

H

Hamilton, sir William Rowan, 47, 57
Hamiltoniana, función, 57
Hamilton-Cayley, teorema de, 57
Hiperplano en $\mathbb{R}^n$, 186

I

Idéntico aditivo, 174, 258
Identidad de Euler, 6
Igualdad de matrices, definición de, 52
Imagen de
la transformación
cero, 278
identidad, 278
un operador
de proyección, 278
integral, 279
traspuesto, 278
una matriz, 260
definición de, 217
una transformación
de P_3 en P_2, 279
lineal, 277, 301
Imaginario, número, 4
Independencia lineal, 193
Índice de la suma, 71
Inversa de una matriz, definición de la, 90
Inverso aditivo, 174, 258
Isomórficos, espacios vectoriales, 200

J

Jordan, Wilhelm, 19n

K

Kernel, 216
k-ésima componente del vector, 48

L

Legendre, polinomios normalizados de, 256
Leontief
matriz de, 99
modelo de insumo-producto de, 28, 98
Leontief, Wassily W., 28n
Ley
conmutativa
de la suma de vectores, 174, 258
del producto escalar, 62
para la suma de matrices, 55
de cosenos, 164
distributiva
del producto escalar, 62
para la multiplicación por un escalar, 55
Ley asociativa
de la multiplicación
de matrices, 66, 166
por escalares, 174, 258
de la suma de vectores, 174, 258
para la suma de matrices, 55
Leyes distributivas para la multiplicación de matrices, 67, 166
Longitud de un vector. *Véase* Norma de un vector

M

Magnitud de un número complejo, 4
Matrices
álgebra de, 74
compatibles bajo la multiplicación, 63
definición de
igualdad de, 52
producto de dos, 63

equivalentes por
renglón, 166
renglones, definición de, 98
incompatibles bajo la multiplicación, 63
ley asociativa para la
multiplicación de, 66
suma de, 55
ley conmutativa para la suma de, 55
leyes distributivas para la multiplicación de, 67, 166
por bloques, multiplicación de, 69
que conmutan, 64
suma de, 53
Matriz
adjunta de una, 154, 168
antisimétrica, 112, 147
aumentada, 20
cero, 50, 165
cofactor de una, 126
cofactor *ij* de la, 167
concepto de, 19
cuadrada, 50
de cofactores, 154
de coeficientes del sistema, 19, 24
de forma escalonada
por renglones, 24, 43
reducida por renglones, 23, 43
de Leontief, 99
de $m \times n$, 20
de probabilidades, 80
de transformación, 301
definición de, 282
de transición, 232, 261
definición de, 234
definición de, 50
imagen de una, 217
la adjunta de una, 155
la inversa de una, 90
rango de una, 217
transpuesta de una, 108
determinante de una, 94, 123, 167
diagonal, 104, 128
elemental, 167
definición de, 113
notación de una, 113
espacio
de las columnas de una, 217, 260
de los renglones de una, 217, 260
nulo de una, 216, 260
idempotente, 149
identidad, 166
definición de, 89
imagen de una, 260
inversa, 166
invertible, 90, 166
menor de una, 126
menor *ij* de la, 167
nilpotente, 148
no singular, 90
notación de la, 51
nulidad de una, 216, 260
ortogonal, 147, 248, 261
por un escalar, multiplicación de una, 54
rango de una, 260
simétrica, 167
definición de, 110
singular, 90
tamaño de una, 50
tecnológica, 99
transpuesta conjugada de una, 257
transpuesta de una, 166
traza de una, 256
unitaria, 257
Matriz triangular
inferior, 105, 128
definición de, 117
superior, 105, 128
definición de, 117
Menor
de segundo orden, 150
de una matriz, 126
ij de la matriz, 167
Método de eliminación
de Gauss, 44
de Gauss-Jordan, 19, 25, 44
gaussiana, 25
Modelo de insumo-producto de Leontief, 28, 98
Módulo, 4
Multiplicación
de una matriz por un escalar, 54
de matrices
ley asociativa de la, 66, 166
leyes distributivas para la, 67, 166
por bloques, 69
matrices
compatibles bajo la, 63
incompatibles bajo la, 63
por escalares, 165
ley asociativa de la, 174, 258
por un escalar, 174, 258
cerradura bajo la, 174, 258
ley distributiva para la, 55

N

N componentes
vector columna de, 48, 165
vector renglón de, 48, 165
n-vector, 48
Norma de un vector, 261
definición de, 243
Notación de
la dimensión, 209
la matriz, 51
las operaciones elementales con renglones, 20
sumatoria, 70, 71
una matriz elemental, 113
una transformación lineal, 267
Núcleo de
la transformación
cero, 278
identidad, 278
un operador
de proyección, 278
transpuesto, 278
una transformación
de P_3 en P_2, 279
lineal, 277, 301
Nulidad de
una matriz, 216, 260
una transformación lineal, 278, 301
Número
imaginario, 4
infinito de soluciones, sistema de ecuaciones con, 12
pivote, 23, 43
Número complejo, 3, 49
argumento de un, 4
conjugado de un, 3
forma cartesiana de un, 2
forma polar de un, 6
forma rectangular de un, 2
magnitud de un, 4
parte imaginaria de un, 2
parte real de un, 2
Números primos de Fermat, 31n

O

Operaciones elementales con renglones, 20, 43
notación de las, 20
Operador
de proyección
imagen de un, 278
núcleo de un, 278
de transposición, 271
diferencial, 271
identidad, 268
integral, 271
imagen de un, 279
núcleo de un, 279

transpuesto
imagen de un, 278
núcleo de un, 278
Operadores lineales, 267
Ortogonal, conjunto, 243, 261
Ortonormal
base, 246, 247
definición de conjunto, 254
infinito, conjunto, 255
Ortonormalización de Gram-Schmidt, proceso de, 245, 261

P

Parte
escalar, 54
imaginaria de un número complejo, 2
real de un número complejo, 2
vectorial, 54
Partición conformante, 70
Pendiente
de una recta, 11
indefinida de una recta, 11, 12
Plano
complejo, 3
de Argand, 3
Polinomios
de grado cero, 176n
normalizados de Legendre, 256
Primer renglón, expansión de det A por cofactores en el, 167
Primera
componente del vector, 48
ley distributiva, 174, 258
Probabilidades, matriz de, 80
Proceso de
ortonormalización de Gram-Schmidt, 245, 261
reducción por renglones, 20, 44
Producto
de dos matrices, definición de, 63
escalar, 165
definición de, 61
ley conmutativa del, 62
ley distributiva del, 62
interno, 251
de los vectores, 61
definición de espacio con, 251
espacio con, 261
punto, 61
Productos de matrices, 165
Proyección
imagen de un operador de, 278
núcleo de un operador de, 278
ortogonal, transformación de, 270
transformación de, 282

R

Rango de
una matriz, 260
definición de, 217
una transformación lineal, 278, 301
Recta, reflexión respecto a la, 290
Rectas
con pendiente cero, 12
paralelas, 12
Redondeo, errores de, 26
Reflexión
respecto a la recta, 290
respecto al eje x, 290
respecto al eje y, 290
transformación de, 268
Regla de Cramer, 161, 162, 169
Reglas de cerradura, 181
Renglón
i, 50
matrices equivalentes por, 166
Renglones
de una matriz, espacio de los, 217, 260
definición de matrices equivalentes por, 98
matriz de forma escalonada por, 24, 43
matriz de forma escalonada reducida por, 23, 43
notación de las operaciones elementales con, 20
operaciones elementales con, 20, 43
proceso de reducción por, 20
Representación
matricial, 282
por series de Fourier, 256
Rotación, transformación de, 269

S

Segunda
componente del vector, 48
ley distributiva, 174, 258
Segundo orden, menor de, 150
Series de Fourier, representación por, 256
Signo de sumatoria, 71
Sin solución, sistema de ecuaciones, 13
Sistema
homogéneo
asociado, 85
de ecuaciones lineales, 38, 44
lineal
consistente, 44
inconsistente, 44
matriz de coeficientes del, 19, 24
Sistema(s) de ecuaciones
con número infinito de soluciones, 12
con solución única, 12
equivalentes, 14
inconsistente, 13
lineales
consistente, 22
inconsistente, 22
sin solución, 13
Solución
cero, 39, 44
espacio de, 212
trivial, 39, 44
única, sistema de ecuaciones con, 12
Soluciones no triviales, 39, 44
Subespacio
definición de, 181
generado, 186
no vacío, 259
propio, 182, 259
de M_{mn}, 183
de P_n, 183
trivial, 182
Submatrices, 69
Suma
cerradura bajo la, 174, 258
de matrices, 53
ley asociativa para la, 55
ley conmutativa para la, 55
de vectores, 165, 258
ley asociativa de la, 174, 258
ley conmutativa de la, 174, 258
índice de la, 71
Sumatoria
notación de, 70, 71
signo de, 71
Sustitución hacia atrás, 25, 44

T

Tamaño de una matriz, 50
Teorema de Hamilton-Cayley, 57
Transformación
cero, 268
imagen de la, 278
núcleo de la, 278
de proyección, 282
ortogonal, 270
de P_3 en P_2
imagen de una, 279

núcleo de una, 279
de reflexión, 268
de rotación, 269
definición de matriz de, 282
identidad, 268
imagen de la, 278
núcleo de la, 278
lineal, 265, 301
definición de, 267
imagen de una, 277, 301
notación de una, 267
núcleo de una, 277, 301
nulidad de una, 278, 301
rango de una, 278, 301
matriz de, 301
Transición
definición de matriz de, 234
matriz de, 232, 261
Transposición, operador de, 271
Transpuesta
conjugada de una matriz, 257
de una matriz, 166
definición de, 108
Traza de una matriz, 256
Triangular
inferior, matriz, 105, 128
superior, matriz, 105, 128
Triángulo, desigualdad del, 257

U

Unidad imaginaria, 1

V

Valores complejos
continua, función de, 258
función de, 258
Vandermonde, determinante de, 148
Vector
cero, 48, 174, 258
columna, 48, 50
de *n* componentes, 48, 165
definición de norma de un, 243
k-ésima componente del, 48
norma de un, 261
primera componente del, 48
renglón, 48, 50
de *n* componentes, 48, 165
segunda componente del, 48
Vectores, 47, 174, 258
combinación lineal de, 68, 259
coplanares, 195-196
espacio generado por un conjunto de, 188, 259
ley asociativa de la suma de, 174, 258
ley conmutativa de la suma de, 174, 258
linealmente
dependientes, 192, 193, 259
independientes, 193, 259
ortogonales, 78
producto interno de los, 61
suma de, 258

W

Wronskiano, 205