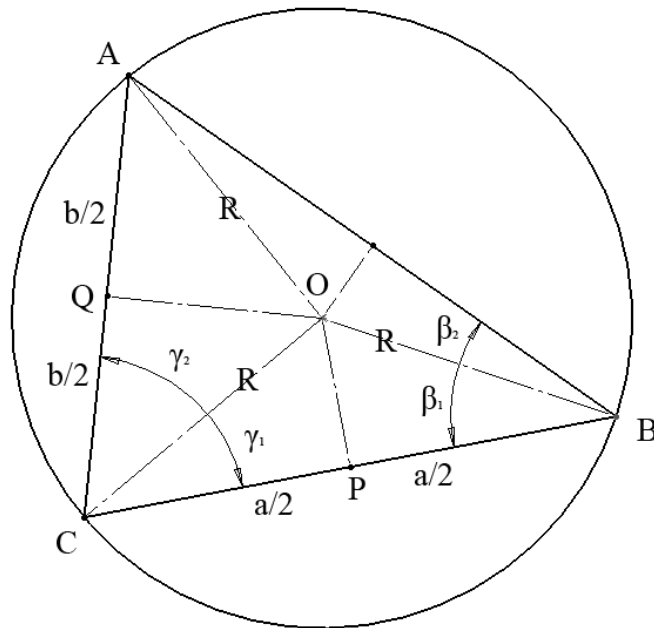


Notació: Sigui un triangle qualsevol de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Direm  $a$ ,  $b$  i  $c$  als costats oposats a  $A$ ,  $B$  i  $C$ , i  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  als angles en els vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  respectivament. Direm  $O$  al circumcentre.

Sigui un triangle de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  del que coneixem el costat  $a$ , l'angle  $\gamma$  i  $R$ , el radi de la circumferència circumscriu. Trobeu  $b$ ,  $c$  i  $\alpha$ .

NOTA: La circumferència circumscriu és aquella que conté els tres vèrtex del triangle i el seu centre és a la intersecció de les mediatrises dels costats.



( $P$  i  $Q$  són els punts mitjos dels costats  $a$  i  $b$  respectivament).

Considerem els triangles  $COP$  i  $COQ$ . Dient  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  als angles en  $C$  dels triangles  $COP$  i  $COQ$  respectivament:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\gamma_1) = \frac{a}{2R} \\ \cos(\gamma_2) = \frac{b}{2R} \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{b = 2R \cos \left[ \gamma - \arccos \left( \frac{a}{2R} \right) \right]}$$

Aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow \boxed{c = 2R \sin \gamma}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin \left( \frac{a}{2R} \right)}$$

Alternativament, aplicant el teorema del cosinus trobem  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$$

$$c = \sqrt{a^2 + \left(2R \cos \left[\gamma - \arccos \left(\frac{a}{2R}\right)\right]\right)^2 - 2a \left(2R \cos \left[\gamma - \arccos \left(\frac{a}{2R}\right)\right]\right) \cos(\gamma)}$$

Aplicant el teorema del sinus trobem  $\alpha$ :

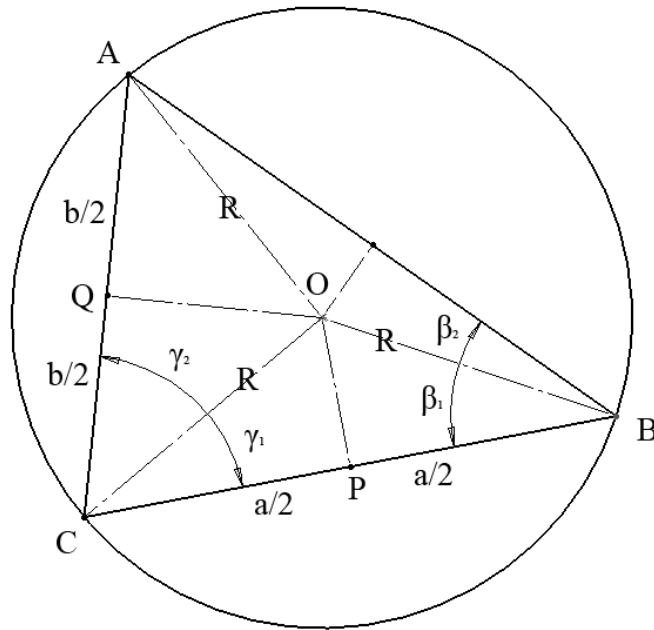
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \left( \frac{a}{c} \sin(\gamma) \right)$$

$$\alpha = \arcsin \left[ \frac{a \sin(\gamma)}{\sqrt{a^2 + \left(2R \cos \left[\gamma - \arccos \left(\frac{a}{2R}\right)\right]\right)^2 - 2a \left(2R \cos \left[\gamma - \arccos \left(\frac{a}{2R}\right)\right]\right) \cos(\gamma)}} \right]$$

Notació: Sigui un triangle qualsevol de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Direm  $a$ ,  $b$  i  $c$  als costats oposats a  $A$ ,  $B$  i  $C$ , i  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  als angles en els vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  respectivament. Direm  $O$  al circumcentre.

1) Sigui un triangle de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  del que coneixem els costats  $a$  i  $b$ , i  $R$ , el radi de la circumferència circumscriu. Trobeu  $c$ ,  $\gamma$  i  $\alpha$ .

NOTA: La circumferència circumscriu és aquella que conté els tres vèrtex del triangle i el seu centre és a la intersecció de les mediatrises dels costats.



( $P$  i  $Q$  són els punts mitjos dels costats  $a$  i  $b$  respectivament).

Considerem els triangles  $COP$  i  $COQ$ . Dient  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  als angles en  $C$  dels triangles  $COP$  i  $COQ$  respectivament:

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\gamma_1) = \frac{a}{2R} \\ \cos(\gamma_2) = \frac{b}{2R} \\ \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\gamma = \arccos\left(\frac{a}{2R}\right) + \arccos\left(\frac{b}{2R}\right)}$$

Aplicant el teorema del sinus:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R \Rightarrow \boxed{c = 2R \sin \left( \arccos\left(\frac{a}{2R}\right) + \arccos\left(\frac{b}{2R}\right) \right)}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow \boxed{\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{2R}\right)}$$

Alternativament, aplicant el teorema del cosinus trobem  $c$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \left[ \arccos \left( \frac{a}{2R} \right) + \arccos \left( \frac{b}{2R} \right) \right]}$$

Aplicant el teorema del sinus trobem  $\alpha$ :

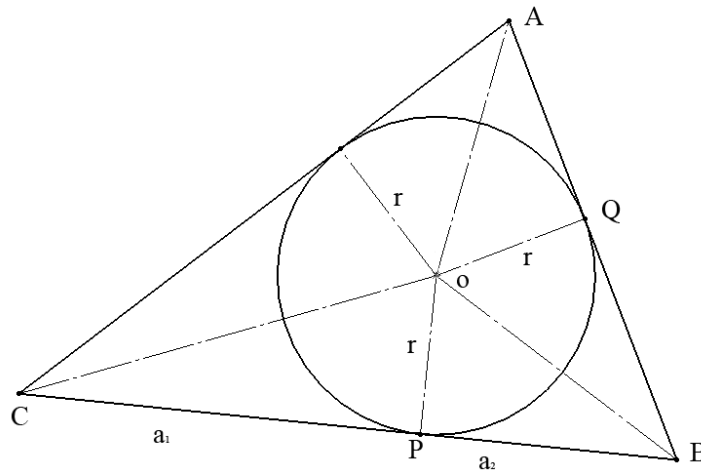
$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin \left( \frac{a}{c} \sin(\gamma) \right)$$

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{a \cdot \sin \left[ \arccos \left( \frac{a}{2R} \right) + \arccos \left( \frac{b}{2R} \right) \right]}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \left[ \arccos \left( \frac{a}{2R} \right) + \arccos \left( \frac{b}{2R} \right) \right]}} \right)$$

Notació: Sigui un triangle qualsevol de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Direm  $a$ ,  $b$  i  $c$  als costats oposats a  $A$ ,  $B$  i  $C$ , i  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  als angles en els vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  respectivament. Direm  $o$  al incentre.

Sigui un triangle de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  del que coneixem el costat  $a$ , l'angle  $\gamma$  i  $r$ , el radi de la circumferència inscrita. Trobeu  $\beta$ ,  $\alpha$  i  $c$ .

NOTA: La circumferència inscrita és aquella que és tangent a cada un dels tres costats del triangle i el seu centre és a la intersecció de les bisectrius dels angles interns.



( $P$  i  $Q$  són els punts de tangència de la circumferència inscrita amb dels costats  $a$  i  $b$  respectivament).

Considerem els triangles  $CoP$  i  $BPo$ . Sabem que els angles en  $C$  i en  $B$  d'aquests triangles són de  $\frac{\gamma}{2}$  i  $\frac{\beta}{2}$  respectivament. Dient  $a_1$  i  $a_2$  als costats  $CP$  i  $PB$  respectivament:

$$\left. \begin{array}{l} \tan(\frac{\gamma}{2}) = \frac{r}{a_1} \\ \tan(\frac{\beta}{2}) = \frac{r}{a_2} \\ a = a_1 + a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = 2 \arctan \left( \frac{1}{\frac{a}{r} - \cot(\frac{\gamma}{2})} \right) = 2 \arctan \left( \frac{r \tan(\frac{\gamma}{2})}{a \tan(\frac{\gamma}{2}) - r} \right)$$

Sabent que la suma dels angles d'un triangle sempre és  $\pi$  trobem  $\alpha$ :

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \pi - \gamma - 2 \arctan \left( \frac{r \tan(\frac{\gamma}{2})}{a \tan(\frac{\gamma}{2}) - r} \right)$$

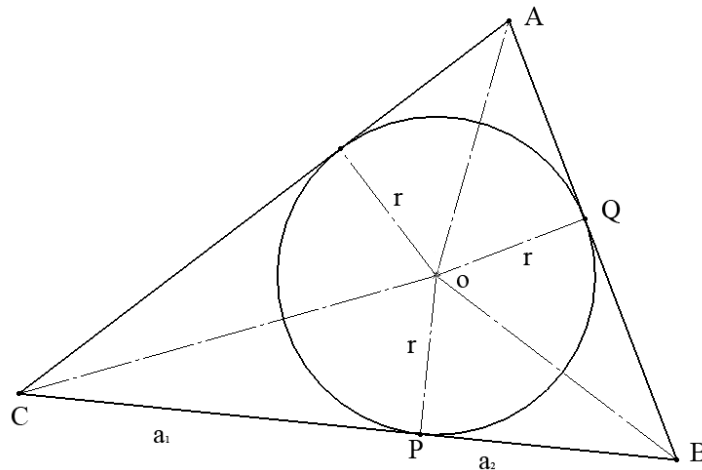
Aplicant el teorema del sinus trobem  $c$ :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Rightarrow c = \frac{a \sin(\gamma)}{\sin \left( \pi - \gamma - 2 \arctan \left( \frac{r \tan(\frac{\gamma}{2})}{a \tan(\frac{\gamma}{2}) - r} \right) \right)}$$

Notació: Sigui un triangle qualsevol de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Direm  $a$ ,  $b$  i  $c$  als costats oposats a  $A$ ,  $B$  i  $C$ , i  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  als angles en els vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  respectivament. Direm  $o$  al incentre.

Sigui un triangle de vèrtex  $A$ ,  $B$  i  $C$  del que coneixem els angles  $\gamma$  i  $\beta$ , i  $r$ , el radi de la circumferència inscrita. Trobeu  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $\alpha$ .

NOTA: La circumferència inscrita és aquella que és tangent a cada un dels tres costats del triangle i el seu centre és a la intersecció de les bisectrius dels angles interns.



( $P$  i  $Q$  són els punts de tangència de la circumferència inscrita amb els costats  $a$  i  $b$  respectivament).

Considerem els triangles  $CoP$  i  $BPo$ . Sabem que els angles en  $C$  i en  $B$  d'aquests triangles són de  $\frac{\gamma}{2}$  i  $\frac{\beta}{2}$  respectivament. Dient  $a_1$  i  $a_2$  als costats  $CP$  i  $PB$  respectivament:

$$\left. \begin{array}{l} \tan(\frac{\gamma}{2}) = \frac{r}{a_1} \\ \tan(\frac{\beta}{2}) = \frac{r}{a_2} \\ a = a_1 + a_2 \end{array} \right\} \Rightarrow a = r \left( \frac{1}{\tan(\frac{\gamma}{2})} + \frac{1}{\tan(\frac{\beta}{2})} \right) = r \left( \cot(\frac{\gamma}{2}) + \cot(\frac{\beta}{2}) \right)$$

Sabent que la suma dels angles d'un triangle sempre és  $\pi$  trobem  $\alpha$ :

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \boxed{\alpha = \pi - \gamma - \beta}$$

Aplicant el teorema del sinus trobem  $c$ :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \Rightarrow c = r \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\pi - \gamma - \beta)} \left( \frac{1}{\tan(\frac{\gamma}{2})} + \frac{1}{\tan(\frac{\beta}{2})} \right)$$

Anàlogament, trobem  $b$ :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} \Rightarrow b = r \frac{\sin(\beta)}{\sin(\pi - \gamma - \beta)} \left( \frac{1}{\tan(\frac{\gamma}{2})} + \frac{1}{\tan(\frac{\beta}{2})} \right)$$