

I- SỬ DỤNG TẬP GIÁ TRỊ:

- **Bài toán:** Cho các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $F(x; y) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của biểu thức $P = G(x; y)$.
- **Phương pháp giải chung:** Gọi T là tập giá trị của P , khi đó $m \in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} F(x; y) = 0 \\ G(x; y) = m \end{cases} \quad (1)$$

- Sau đó tìm các giá trị của m để hệ (1) có nghiệm (thường là đưa về điều kiện có nghiệm của một phương trình bậc hai) rồi suy ra tập giá trị T của P , từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của biểu thức $P = G(x; y)$.
- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học dự bị khối A năm 2006)

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$-4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$

Giải: Đặt $A = x^2 + xy + y^2$ và $B = x^2 - xy - 3y^2$.

Gọi T là tập giá trị của B , khi đó $m \in T$ khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 \leq 3 \\ x^2 - xy - 3y^2 = m \end{cases} \quad (1)$$

- Nếu $y = 0$ thì $A = x^2 \leq 3$, lúc đó $-4\sqrt{3} - 3 < 0 \leq m = x^2 \leq 3 < 4\sqrt{3} - 3$ (đpcm).
- Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x = ty$, khi đó $A = x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} > 0$ nên:

$$\frac{m}{A} = \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1}.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + t + 1} \Leftrightarrow (a-1)t^2 + (a+1)t + a+3 = 0 \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \text{Hệ (1) có nghiệm} &\Leftrightarrow \text{Phương trình (2) có nghiệm} \Leftrightarrow \Delta = (a+1)^2 - 4(a-1)(a+3) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-4\sqrt{3}-3}{3} \leq a \leq \frac{4\sqrt{3}-3}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } \frac{-4\sqrt{3}-3}{3} \leq \frac{m}{A} \leq \frac{4\sqrt{3}-3}{3}, \text{ mặt khác } 0 < A \leq 3 \text{ nên } -4\sqrt{3}-3 \leq m \leq 4\sqrt{3}-3.$$

Vậy tập giá trị của P là $T = [-4\sqrt{3} - 3 ; 4\sqrt{3} - 3]$ nên suy ra đpcm.

Ví dụ 2: (Đề thi học sinh giỏi quốc gia năm 2005)

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $K = x + y$.

Giải: ĐKXD: $x \geq -1$ và $y \geq -2$.

Gọi T là tập giá trị của K . Ta có $m \in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{x+1} = 3\sqrt{y+2} - y \\ x + y = m \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $u = \sqrt{x+1}$ và $v = \sqrt{y+2}$ thì $u \geq 0, v \geq 0$ và hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} 3(u+v) = m \\ u^2 + v^2 = m+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v = \frac{m}{3} \\ uv = \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{9} - m - 3 \right) \end{cases} \Leftrightarrow u, v \text{ là hai nghiệm của phương trình:}$$

$$t^2 - \frac{m}{3}t + \frac{1}{2} \left(\frac{m^2}{9} - m - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow 18t^2 - 6mt + m^2 - 9m - 27 = 0 \quad (2).$$

Do đó hệ (1) có nghiệm (x, y) sao cho $x \geq -1$ và $y \geq -2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm không âm và điều kiện là:

$$\begin{cases} \Delta = -9(m^2 - 18m - 54) \geq 0 \\ S = \frac{m}{3} \geq 0 \\ P = \frac{m^2 - 9m - 27}{18} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9+3\sqrt{21}}{2} \leq m \leq 9+3\sqrt{15}.$$

$$\text{Do đó } T = \left[\frac{9+3\sqrt{21}}{2}; 9+3\sqrt{15} \right].$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của K là $\frac{9+3\sqrt{21}}{2}$ và giá trị lớn nhất của K là $9+3\sqrt{15}$.



II- SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC:

- **Phương pháp chung:** Mấu chốt của phương pháp bất đẳng thức là phải dự đoán được biểu thức sẽ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại những giá trị nào của biến số để từ đó có những cách phân tích, đánh giá thích hợp.
- **Một số bất đẳng thức cần nhớ:**

➤ **BĐT Cô-si:** $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ (với $x \geq 0; y \geq 0$)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y$.

➤ **BĐT Bunhiacopxki:** $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$.

➤ **BĐT về trị tuyệt đối:** $|x| - |y| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

➤ **BĐT** $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ (với n nguyên dương và $x \geq 0; y \geq 0$)

- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học dự bị khối A năm 2005)

Cho hai số thực x, y dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (1+x) \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2.$$

Giải:

- $1+x = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3}$.
- $1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{y}{3x}\right)^3}$.
- $1 + \frac{9}{\sqrt{y}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} \geq 4 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^3} \Rightarrow \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 16 \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^6}$.

$$\text{Suy ra } P = (1+x) \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 4.4.16 \sqrt[4]{\left(\frac{x}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{y}{3x}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{y}}\right)^6} = 256.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 256 khi $x = 3$ và $y = 9$.

Ví dụ 2: (Đề thi đại học dự bị khối B năm 2006)

Cho hai số thực x, y dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}$.

Giải:

$$A = \frac{3x}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + y = \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{x+y}{2} + 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8}\right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{4}{2} + 2.3\sqrt[3]{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{8} \cdot \frac{y}{8}} = \frac{9}{2}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \\ x + y = 4 \\ \frac{1}{y^2} = \frac{y}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2. \text{ Vậy } A_{\min} = \frac{9}{2} \text{ khi } x = y = 2.$$

Ví dụ 3: (Đề thi đại học chính thức khối A năm 2006)

Cho hai số thực $x \neq 0$ và $y \neq 0$ thay đổi thỏa mãn điều kiện $(x+y).xy = x^2 + y^2 - xy$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Giải:

❖ **Cách 1: (Sử dụng bất đẳng thức)**

$$\text{Ta có: } (x+y).xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}.$$

$$\text{Đặt } a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, \text{ ta được } a + b = a^2 + b^2 - ab \quad (1).$$

$$A = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) = (a+b)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow a + b = (a+b)^2 - 3ab.$$

$$\text{vì } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ nên } a+b = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - 3\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a+b \leq 4.$$

$$\text{Do đó } A = (a+b)^2 \leq 16.$$

Vậy giá trị lớn nhất của A là 16 khi $x = y = \frac{1}{2}$.

❖ **Cách 2: (Sử dụng tập giá trị)**

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^3y^3} = \frac{(x+y)^4}{(x^2-xy+y^2)^2} = \left(\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}\right)^2.$$

$$\text{Xét biểu thức } B = \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}. \text{ Đặt } x = ty \text{ thì } B = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1}.$$

- Nếu $t = 0$ thì $x = 0$ (trái giả thiết $x \neq 0$) nên $t \neq 0$.
- Do $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Leftrightarrow (x+y)xy = (x+y)^2 - 3xy$ nên $x+y=0 \Rightarrow -3xy=0$ (trái giả thiết $xy \neq 0$). Vậy $x+y \neq 0$ nên $t \neq -1$.

Gọi T là tập giá trị của B thì:

$$m \in T \Leftrightarrow \text{Phương trình } m = \frac{t^2+2t+1}{t^2-t+1} \text{ có nghiệm } t \neq 0, t \neq -1.$$

$$\Leftrightarrow \text{Phương trình } (m-1)t^2 - (m+2)t + m-1 = 0 \quad (*) \text{ có nghiệm } t \neq 0, t \neq -1.$$

- Nếu $m = 1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t = 0$ (loại).
- Nếu $m \neq 1$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t \neq 0, t \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ m-1 \neq 0 \\ 3m \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2 - 4(m-1)^2 \geq 0 \\ m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 4 \\ m \neq 1 \end{cases}.$$

Vì $A = B^2$ và tập giá trị của B là $T = (0;4] \setminus \{1\}$ nên tập giá trị của A là $T_1 = (0;16] \setminus \{1\}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 16.



III- SỬ DỤNG HÌNH HỌC:

- **Phương pháp chung:** Phương pháp hình học thường được sử dụng khi giả thiết bài toán và biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất có dạng là phương trình của một đường thẳng, đường tròn, đường elip hoặc là khoảng cách giữa hai điểm v.v...
- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học dự bị khối A năm 2004)

Gọi (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$ (m là tham số).
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = x^2 + y^2 - 2x$ khi m thay đổi.

Giải:

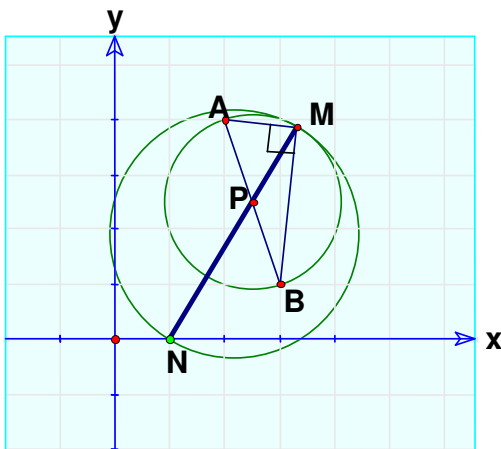
- Đường thẳng $(d_1): x - my - 2 + 4m = 0$ đi qua điểm cố định $A(2; 4)$.
- Đường thẳng $(d_2): mx + y - 3m - 1 = 0$ đi qua điểm cố định $B(3; 1)$.
- Đường thẳng (d_1) và (d_2) vuông góc với nhau.

Do đó, gọi $M(x, y)$ với (x, y) là nghiệm của hệ phương trình thì M chạy trên đường tròn đường kính AB có phương trình $(C_1): \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$.

Ta có $Q = x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = Q + 1$.

Gọi đường tròn $(C_2): (x - 1)^2 + y^2 = Q + 1$.

Lúc đó $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$ chính là khoảng cách từ điểm $N(1; 0)$ đến điểm M (hình vẽ).



Do đó NM lớn nhất khi và chỉ khi hai đường tròn (C_1) và (C_2) tiếp xúc trong (hình vẽ).

$$\Leftrightarrow NP + PM = NM$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{34}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{Q+1} \Leftrightarrow Q = \left(\frac{\sqrt{34} + \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1.$$

$$\text{Vậy } Q_{\max} = \left(\frac{\sqrt{34} + \sqrt{10}}{2}\right)^2 - 1 = 10 + \sqrt{85}.$$

Ví dụ 2:

Cho hai số thực x, y thay đổi thỏa mãn $36x^2 + 16y^2 = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = -2x + y + 5$.

Giải:

Gọi T là tập giá trị của P và $m \in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 36x^2 + 16y^2 = 9 \\ -2x + y + 5 = m \end{cases} \quad (1)$$

Ta có $36x^2 + 16y^2 = 9 \Leftrightarrow (6x)^2 + (4y)^2 = 3^2$.

Đặt $X = 6x, Y = 4y$ thì hệ phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 9 \\ 4X - 3Y + 12m - 60 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (1) có nghiệm \Leftrightarrow Hệ (2) có nghiệm \Leftrightarrow Đường tròn $(C): X^2 + Y^2 = 9$ và đường thẳng

$(d): 4X - 3Y + 12m - 60 = 0$ có điểm chung $\Leftrightarrow \frac{|12m - 60|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{15}{4} \leq m \leq \frac{25}{4}$.

Vậy $T = \left[\frac{15}{4}; \frac{25}{4} \right]$ nên giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{15}{4}$ và giá trị lớn nhất của P là $\frac{25}{4}$.



IV- SỬ DỤNG VECTOR:

- **Phương pháp chung:** Phương pháp vector thường sử dụng khi biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất xuất hiện các biểu thức có dạng $\sqrt{A^2 + B^2}$.
- **Một số bất đẳng thức cần nhớ:**

$$\triangleright \left| \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n \right| \leq \left| \vec{a}_1 \right| + \left| \vec{a}_2 \right| + \dots + \left| \vec{a}_n \right|$$

(Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}_1; \vec{a}_2; \dots; \vec{a}_n$ cùng hướng.)

$$\triangleright \left| \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \right| \leq \left| \vec{a}_1 \right| \cdot \left| \vec{a}_2 \right|$$

(Đẳng thức xảy ra khi $\vec{a}_1; \vec{a}_2$ cùng hướng.)

- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học chính thức khối B năm 2006)

Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

Giải: Xét các vector $\vec{a} = (1-x; y)$ và $\vec{b} = (x+1; y)$. Ta có:

$$\left| \vec{a} + \vec{b} \right| \leq \left| \vec{a} \right| + \left| \vec{b} \right| \Leftrightarrow \sqrt{4+4y^2} \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

$$\text{Do đó } A \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2| = f(y).$$

$$\bullet \text{ Với } y \geq 2 \text{ thì } A \geq 2\sqrt{1+2^2} = 2\sqrt{5}. \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Với } y < 2 \text{ thì } f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y.$$

$$\bullet f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2y = \sqrt{1+y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ 4y^2 = 1+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên:

| | | | |
|---------|-----------|----------------------|---|
| | | 1 | |
| y | $-\infty$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 2 |
| $f'(y)$ | - | 0 | + |
| $f(y)$ | | $2+\sqrt{3}$ | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(y) \geq 2 + \sqrt{3}$ hay $A \geq 2 + \sqrt{3}$. (2)

Từ (1) và (2), ta có giá trị nhỏ nhất của A là $2 + \sqrt{3}$ khi $x = 0; y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ví dụ 2: (Đề thi thử đại học năm 2011 - báo Toán học và tuổi trẻ số 404/tháng 02/2011)

Cho x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{x^6 + 3y^4} + \sqrt{y^6 + 3x^4}$.

Giải: Xét các vector $\vec{a} = (x^3; y^2\sqrt{3})$ và $\vec{b} = (y^3; x^2\sqrt{3})$.

Ta có: $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x^6 + 3y^4} + \sqrt{y^6 + 3x^4} \geq \sqrt{(x^3 + y^3)^2 + (\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2)^2}$.

hay $P \geq \sqrt{(x^3 + y^3)^2 + 3(x^2 + y^2)^2}$.

Mặt khác $(x + y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \Rightarrow x + y \geq \frac{4}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \geq \frac{4}{2} = 2$.

và $\frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^3 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq 2 \cdot \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 2$ và $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq \frac{2^2}{2} = 2$.

Suy ra $P \geq \sqrt{2^2 + 3 \cdot 2^2} = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 4 khi $x = y = 1$.



V- SỬ DỤNG LƯỢNG GIÁC:

- **Phương pháp chung:** đặt các biến theo các hàm số lượng giác để đưa biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất về biểu thức chứa các hàm số lượng giác.
- **Một số kiến thức cần nhớ:**
 - nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$.
 - nếu $x + y = 1$ thì đặt $x = \sin^2 t$ và $y = \cos^2 t$.
- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học chính thức khối B năm 2008)

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn hệ thức $x^2 + y^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2}$.

Giải:

❖ Cách 1: (Sử dụng lượng giác)

Vì $x^2 + y^2 = 1$ nên đặt $x = \sin t$ và $y = \cos t$. Lúc đó:

$$P = \frac{2(\sin^2 t + 6 \sin t \cos t)}{1 + 2 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t} \Leftrightarrow (P - 6) \sin 2t + (P + 1) \cos 2t = 1 - 2P \quad (1)$$

$$(1) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (P - 6)^2 + (P + 1)^2 \geq (1 - 2P)^2 \Leftrightarrow -6 \leq P \leq 3$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 và giá trị nhỏ nhất của P là -6.

❖ Cách 2: (Sử dụng tập giá trị)

Gọi T là tập giá trị của P , khi đó $m \in T$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = m \end{cases} \quad (1)$$

- Nếu $y = 0$ thì $x^2 = 1$ nên $m = 2$.

- Nếu $y \neq 0$ thì đặt $x = ty$, khi đó $m = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} \Leftrightarrow (m - 2)t^2 + 2(m - 6)t + 3m = 0 \quad (2)$

Hệ phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm.

* Với $m = 2$ thì phương trình (2) có nghiệm $t = \frac{3}{4}$.

* Với $m \neq 2$ thì phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -2m^2 - 6m + 36 \geq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 3$

Vậy tập giá trị của P là đoạn $[-6 ; 3]$ nên $P_{\max} = 3$ và $P_{\min} = -6$.

Ví dụ 2: (Đề thi đại học chính thức khối D năm 2008)

Cho hai số thực x, y không âm thay đổi. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng lượng giác)

Đặt $x = \tan u, y = \tan v$ với $u, v \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$P = \frac{(\tan u - \tan v)(1 - \tan u \tan v)}{(1 + \tan u)^2(1 + \tan v)^2} = \frac{\sin(u-v)\cos(u+v)}{(\sin u + \cos u)^2(\sin v + \cos v)^2} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2u - \sin 2v}{(1 + \sin 2u)(1 + \sin 2v)}$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin 2v} - \frac{1}{1 + \sin 2u} \right).$$

- $P_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1} \right) = \frac{1}{4}$ khi $u = \frac{\pi}{4}$ và $v = 0 \Leftrightarrow x = 1$ và $y = 0$.
- $P_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+0} \right) = -\frac{1}{4}$ khi $u = 0$ và $v = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 0$ và $y = 1$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng bất đẳng thức)

Ta có $|x-y| \leq |x| + |y| = x+y$ và $|1-xy| \leq |1| + |xy| = 1+xy$ nên:

$$|P| \leq \frac{(x+y)(1+xy)}{[(x+y) + (1+xy)]^2} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}.$$

- Giá trị lớn nhất của P bằng $\frac{1}{4}$ khi $x = 1, y = 0$.
- Giá trị nhỏ nhất của P bằng $-\frac{1}{4}$ khi $x = 0, y = 1$.



VI- SỬ DỤNG ĐẠO HÀM:

- **Phương pháp chung:** từ giả thiết của bài toán, ta biến đổi biểu thức cần tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất từ hai biến số x, y về một biến số nào đó (có thể là $t = x + y$ hoặc $t = xy$ hoặc $t = x^2 + y^2 \dots$) rồi dùng đạo hàm để khảo sát hàm số này.
- **Một số ví dụ minh họa:**

Ví dụ 1: (Đề thi đại học chính thức khối B năm 2009)

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$.

Giải:

Ta có $(x + y)^2 \geq 4xy$ nên từ giả thiết suy ra $(x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1$.

$$\begin{aligned} A &= 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1 \\ &\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Đặt $t = x^2 + y^2$, ta có $x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq \frac{1}{2}$. Do đó $A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t \geq \frac{1}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1$ với $t \geq \frac{1}{2}$.

Ta có $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 > 0$ với mọi $t \geq \frac{1}{2}$, suy ra $\min_{\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\frac{9}{16}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: (Đề thi đại học chính thức khối D năm 2009)

Cho hai số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng đạo hàm)

- Vì $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} y = 1 - x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ do đó $S = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$.
- Xét hàm số $f(x) = 16x^4 - 32x^3 + 18x^2 - 2x + 12$ trên đoạn $[0; 1]$.
- $f'(x) = 16.4x^3 - 32.3x^2 + 18.2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} \end{cases}$ (đều thuộc đoạn $[0; 1]$).

| | | | | | |
|--------|----|------------------------|----------------|------------------------|----|
| x | 0 | $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ | 1 |
| $f(x)$ | 12 | $\frac{191}{16}$ | $\frac{25}{2}$ | $\frac{191}{16}$ | 12 |

Dựa vào bảng giá trị, ta kết luận:

- $S_{\min} = \frac{191}{16}$ khi $(x; y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$ hoặc $(x; y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$.
- $S_{\max} = \frac{25}{2}$ khi $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng bất đẳng thức kết hợp với đạo hàm)

$$\begin{aligned} \text{Do } x + y = 1 \text{ nên } S &= 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 9xy + 25xy \\ &= 16x^2y^2 + 12\left[(x+y)^3 - 3xy(x+y)\right] + 34xy = 16x^2y^2 - 2xy + 12. \end{aligned}$$

Ta có $0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$. Xét hàm số $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$ trên đoạn $\left[0; \frac{1}{4}\right]$.

$$f'(t) = 32t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \text{ và } f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}; f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2}; f(0) = 12.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{2} \text{ và } \min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}.$$

- $S_{\min} = \frac{191}{16}$ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$ hoặc $(x;y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$.
- $S_{\max} = \frac{25}{12}$ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

❖ Cách 3: (Sử dụng lượng giác)

- Vì $\begin{cases} x+y=1 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$ nên đặt $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Lúc đó $S = 16 \sin^4 t \cos^4 t - 2 \sin^2 t \cos^2 t + 12 = \sin^4 2t - \frac{1}{2} \sin^2 2t + 12$
$$= \left(\sin^2 2t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \geq \frac{191}{16}.$$
- Dấu “=” xảy ra $\sin^2 2t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2t = \frac{1}{2}$ (vì $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sin 2t > 0$)
$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{12} \text{ hoặc } t = \frac{5\pi}{12} \text{ (vì } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right])$$
- $t = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin^2 t = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \\ y = \cos^2 t = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}; t = \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin^2 t = \frac{1 - \cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{4 + \sqrt{3}}{2} \\ y = \cos^2 t = \frac{1 + \cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \frac{4 - \sqrt{3}}{2} \end{cases}$
- $S_{\min} = \frac{191}{16}$ khi $\begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}; \frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$ hoặc $(x;y) = \left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}; \frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$.
- $S = \sin^4 2t - \frac{1}{2} \sin^2 2t + 12 = \sin^2 2t \left(\sin^2 2t - \frac{1}{2}\right) + 12 \leq 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 12 = \frac{25}{12}.$
- Dấu “=” xảy ra $\sin^2 2t = 1 \Leftrightarrow \sin 2t = 1$ (vì $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ nên $\sin 2t > 0$)
$$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \text{ (vì } t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right])$$

$$\bullet \quad t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \\ y = \cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow S_{\max} = \frac{25}{12} \text{ khi } \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow (x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Ví dụ 3: (Đề thi cao đẳng năm 2008)

Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2(x^3 + y^3) - 3xy$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng bất đẳng thức và đạo hàm)

Ta có $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow (x + y)^2 - 2xy = 2 \Leftrightarrow xy = \frac{(x + y)^2 - 2}{2}$, do đó:

$$\begin{aligned} M &= 2(x^3 + y^3) - 3xy = 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x + y)(2 - xy) - 3xy \\ &= -(x + y)^3 + \frac{3}{2}(x + y)^2 + 6(x + y) + 3 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 2 = x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} \Rightarrow -2 \leq x + y \leq 2.$$

Xét hàm số $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$ trên đoạn $[-2; 2]$.

$$\text{Ta có } f'(t) = -3t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \text{ và } f(1) = \frac{13}{2}; f(2) = 1; f(-2) = -7.$$

- Giá trị lớn nhất của M là $\frac{13}{2}$ khi $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ hoặc $x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}; y = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.
- Giá trị nhỏ nhất của M là -7 khi $x = y = -1$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng lượng giác kết hợp đạo hàm)

• Vì $x^2 + y^2 = 2$ nên đặt $x = \sqrt{2} \sin t; y = \sqrt{2} \cos t$ với $t \in [0; 2\pi)$.

$$\bullet \quad M = 2(x^3 + y^3) - 3xy = 4\sqrt{2}(\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t) - 6 \sin t \cos t.$$

• Đặt $u = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ với điều kiện $u \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ thì $\sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$
nên $M = -2\sqrt{2}u^3 - 3u^2 + 6\sqrt{2}u + 3$.

- Xét hàm số $f(u) = -2\sqrt{2}u^3 - 3u^2 + 6\sqrt{2}u + 3$ trên đoạn $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

- $f'(u) = -6\sqrt{2}u^2 - 6u + 6\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\sqrt{2} \\ u = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$.

- $f(-\sqrt{2}) = -7; f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{13}{2}; f(\sqrt{2}) = 1$ nên ta có kết luận sau:

* Giá trị lớn nhất của M là $\frac{13}{2}$ khi $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{12} \\ t = \frac{7\pi}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}; y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

* Giá trị nhỏ nhất của M là -7 khi $u = -\sqrt{2} \Leftrightarrow t = -\frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x = y = -1$.

Ví dụ 4: (Đề thi thử đại học năm 2011 - trường THPT chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng)

Cho hai số thực x, y dương thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}}$.

Giải:

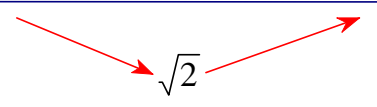
❖ **Cách 1: (Sử dụng đạo hàm)**

- Vì $x + y = 1$ nên suy ra $y = 1 - x$, do đó $T = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$.
- Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$ với $0 < x < 1$.
- $f'(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{x+1}{2\sqrt{x^3}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + \left[\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right]$.
- Ta có $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Ta chứng minh $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của $f'(x)$.
- $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 1-x < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ và $\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} > 0$ nên $f'(x) > 0$.

- $0 < x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1-x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1-x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$ và $\frac{1}{2\sqrt{(1-x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} < 0$ nên $f'(x) < 0$.
- Vậy $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của $f'(x)$ (đpcm).

BBT:

| | | | |
|---------|---|---------------|---|
| | | 1 | |
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | |



Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\sqrt{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

❖ Cách 2: (Sử dụng bất đẳng thức kết hợp đạo hàm)

- Đặt $\sqrt{1-x} = u > 0$ và $\sqrt{1-y} = v > 0$. Lúc đó $x + y = 1$ trở thành $u^2 + v^2 = 1$ và

$$T = \frac{1-u^2}{u} + \frac{1-v^2}{v} = (u+v) \left(\frac{1}{uv} - 1 \right).$$

- $u^2 + v^2 = 1 \Leftrightarrow (u+v)^2 - 2uv = 1 \Leftrightarrow uv = \frac{(u+v)^2 - 1}{2}.$

- $1 = u^2 + v^2 \geq \frac{(u+v)^2}{2} \Rightarrow u+v \leq \sqrt{2}.$

- $(u+v)^2 = u^2 + v^2 + 2uv = 1 + 2uv > 1 \Rightarrow u+v > 1.$

Đặt $t = u+v$ thì $T = \frac{-t^3 + 3t}{t^2 - 1} = f(t)$ với $t \in (1; \sqrt{2}]$.

$$f'(t) = \frac{-t^4 - 3}{(t^2 - 1)^2} < 0, \forall t \in (1; \sqrt{2}] \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\sqrt{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

❖ **Cách 3:** (Sử dụng lượng giác kết hợp đạo hàm)

$$\text{Vì } \begin{cases} x+y=1 \\ x>0; y>0 \end{cases} \text{ nên tồn tại } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ sao cho } \begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } T = \frac{\cos^2 t}{\sin t} + \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{\cos^3 t + \sin^3 t}{\sin t \cos t} = \frac{(\sin t + \cos t)(1 - \sin t \cos t)}{\sin t \cos t}.$$

$$\text{Đặt } a = \sin t + \cos t = \sqrt{2} \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right), \text{ vì } t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } 1 < a \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \sin t \cos t = \frac{a^2 - 1}{2}, \text{ do đó } T = \frac{-a^3 + 3a}{a^2 - 1} = f(a).$$

$$f'(a) = \frac{-a^4 - 3}{(a^2 - 1)^2} < 0, \forall a \in (1; \sqrt{2}] \Rightarrow f(a) \geq f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } T \text{ là } \sqrt{2} \text{ khi } x = y = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 5: (Đề thi thử đại học năm 2011 - trường THPT chuyên Quốc Học - Huế)

Cho a, b là các số thực thay đổi ($a > 0$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$T = (a - b)^2 + (\ln a - b)^2$$

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng đạo hàm)

Xét hàm số $f(b) = (b - a)^2 + (b - \ln a)^2$ với $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } f'(b) = 2(b - a) + 2(b - \ln a) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a + \ln a}{2}.$$

BBT:

| | | | |
|--------|-------------------------------------|-----|-----------|
| | $a + \ln a$ | | |
| x | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $f\left(\frac{a + \ln a}{2}\right)$ | | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

$$f(b) \geq f\left(\frac{a + \ln a}{2}\right) = \frac{(a - \ln a)^2}{2}$$

Xét hàm số $f(a) = a - \ln a$ với $a > 0$.

$$f'(a) = 1 - \frac{1}{a} = 0 \Leftrightarrow a = 1.$$

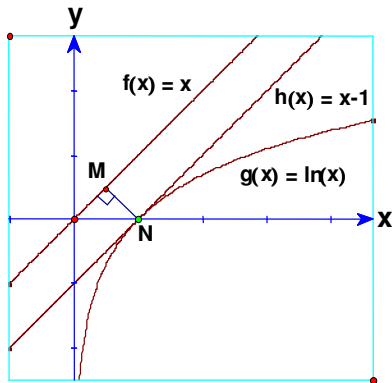
BBT:

| a | 0 | 1 | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------|---|-----------|
| $f(a)$ | - | 0 | + |
| $f(a)$ | $\searrow \quad \nearrow$ 1 | | |

Do đó $f(a) \geq 1, \forall a > 0$, nên $\frac{(a - \ln a)^2}{2} \geq \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy $T_{\min} = \frac{1}{2}$ khi $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

❖ Cách 2: (Sử dụng hình học)

Xét điểm $M(b; b)$ thuộc đường thẳng $(d): y = x$ và điểm $N(a; \ln a)$ thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \ln x$. Lúc đó $MN^2 = (a - b)^2 + (\ln a - b)^2$.



Dựa vào đồ thị, ta thấy MN nhỏ nhất khi N là tiếp điểm của tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng (d) (hình vẽ).

Do đó $f'(x_N) = \frac{1}{x_N} = 1 \Leftrightarrow x_N = 1$, suy ra $y_N = 0$.

Và M là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng (d) nên $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Lúc này $MN^2 = \frac{1}{2} = T_{\min}$.

❖ Cách 3: (Sử dụng vector kết hợp đạo hàm)

Xét các vector $\vec{u} = (a - b; b - \ln a)$ và $\vec{v} = (1; 1)$.

Ta có: $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \Leftrightarrow |(a - b) \cdot 1 + (b - \ln a) \cdot 1| \leq \sqrt{(a - b)^2 + (b - \ln a)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}$.

Suy ra $T = (a - b)^2 + (b - \ln a)^2 \geq \frac{(a - \ln a)^2}{2}$.

Xét hàm số $f(x) = x - \ln x$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BBT:

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------|---|-----------|
| $f(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\searrow \quad \nearrow$ 1 | | |

Do đó $f(x) \geq 1, \forall x > 0$, nên $T \geq \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{1}{2}$ khi $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 6:

Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $x^3 + y^3 \leq 2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2$.

Giải:

- $x^3 + y^3 \leq 2 \Leftrightarrow y^3 \leq 2 - x^3 \Leftrightarrow y \leq \sqrt[3]{2 - x^3}$.
- Vì x, y dương nên $x^3 + y^3 \leq 2 \Rightarrow 0 < x < \sqrt[3]{2}$.

Do đó $A = x^2 + y^2 \leq x^2 + \sqrt[3]{(2 - x^3)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{(2 - x^3)^2}$ với $0 < x < \sqrt[3]{2}$.

$$f'(x) = 2x - \frac{2x^2}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = \frac{2x(\sqrt[3]{2 - x^3} - x)}{\sqrt[3]{2 - x^3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \sqrt[3]{2 - x^3} = x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (vì } 0 < x < \sqrt[3]{2} \text{)}.$$

BBT:

| x | 0 | 1 | $\sqrt[3]{2}$ |
|---------|---|---|---------------|
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | | 2 | |

Dựa vào bảng biến thiên, ta suy ra $A \leq f(x) \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của A là 2 khi $x = y = 1$.

Ví dụ 7:

Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng đạo hàm)

Ta có $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Xét hàm số $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + (1-x)^2 + \frac{1}{(1-x)^2}$ với $0 < x < 1$.

$$f'(x) = 2x - 2(1-x) - \frac{2}{x^3} + \frac{2}{(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow (2x-1) + \frac{x^3 - (1-x)^3}{x^3(1-x)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) + \frac{(2x-1)(x^2-x+1)}{x^3(1-x)^3} = 0 \Leftrightarrow (2x-1) \left[1 + \frac{x^2-x+1}{x^3(1-x)^3} \right] = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

BBT:

| | | | |
|--------|---|----------------|---|
| | | 1 | |
| x | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | $\frac{17}{2}$ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng bất đẳng thức kết hợp đạo hàm)

Ta có $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = (x^2 + y^2) \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) \geq 2xy \left(1 + \frac{1}{x^2 y^2} \right) = 2xy + \frac{2}{xy}$.

- $1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$.
- Xét hàm số $f(t) = 2t + \frac{2}{t}$ với $0 < t \leq \frac{1}{4}$.

Ta có $f'(t) = 2 - \frac{2}{t^2} < 0, \forall 0 < t \leq \frac{1}{4}$, suy ra $f(t) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$.

❖ **Cách 3:** (Sử dụng lượng giác)

Từ giả thiết của bài toán, ta đặt $x = \sin^2 t$; $y = \cos^2 t$ với $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Ta có $A = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \sin^4 t + \cos^4 t + \frac{1}{\sin^4 t} + \frac{1}{\cos^4 t}$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t\right) \left(1 + \frac{16}{\sin^4 2t}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{16}{1}\right) = \frac{17}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{17}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ (vì $0 < t < \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: (Đề thi đại học dự bị khối B năm 2002)

Cho hai số thực x, y dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng đạo hàm)

Ta có $x + y = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{5}{4} - x \Rightarrow S = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{1}{5-4x}$ với $0 < x < \frac{5}{4}$.

Ta có $f'(x) = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5-4x)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = (5-4x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{3} \text{ (loại)} \end{cases}$

BBT:

| | | | |
|---------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 4 |
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | 5 | |

Dựa vào BBT, ta có $f(x) \geq 5, \forall x \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$ nên

$S_{\min} = 5$ khi $x = 1$ và $y = \frac{1}{4}$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng bất đẳng thức)

Ta có $\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4y} \geq \frac{25}{4x+4y} = \frac{25}{4(x+y)} = 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = 4y \\ x + y = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 5 khi $x = 1$ và $y = \frac{1}{4}$.

Ví dụ 9:

Cho hai số thực x, y không âm thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$.

Giải:

❖ **Cách 1:** (Sử dụng đạo hàm)

$$x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x \Rightarrow A = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{x+1}$ với $0 \leq x \leq 1$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = (2-x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = f(1) = 1; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = 0; y = 1$

hoặc $x = 1; y = 0$.

❖ **Cách 2:** (Sử dụng bất đẳng thức kết hợp đạo hàm)

$$\text{Ta có } A = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = \frac{x^2 + x + y^2 + y}{x + y + xy + 1} = \frac{(x+y)^2 - 2xy + 1}{2 + xy} = \frac{2 - 2xy}{2 + xy}.$$

$$\text{Mặt khác } 1 = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0 \leq xy \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{2-2t}{2+t} \text{ với } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có } f'(t) = -\frac{6}{(t+2)^2} < 0 \text{ với mọi } t \in \left[0; \frac{1}{4}\right] \text{ nên hàm số } f(t) \text{ nghịch biến trên đoạn } \left[0; \frac{1}{4}\right].$$

Do đó $\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{3}$ và $\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(t) = f(0) = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = 0; y = 1$

hoặc $x = 1; y = 0$.

❖ **Cách 3:** (Sử dụng lượng giác)

Vì $\begin{cases} x + y = 1 \\ 0 \leq x; 0 \leq y \end{cases}$ nên đặt $x = \sin^2 t$ và $y = \cos^2 t$ với $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lúc đó $A = \frac{\sin^2 t}{1 + \cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{1 + \sin^2 t} = \frac{8 - 2\sin^2 2t}{8 + \sin^2 2t} = -2 + \frac{24}{8 + \sin^2 2t}$.

Suy ra $A \geq -2 + \frac{24}{8 + 1^2} = \frac{2}{3}$ khi $\sin 2t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}$ vì $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

và $A \leq -2 + \frac{24}{8 + 0^2} = 1$ khi $\sin 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ vì $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{2}{3}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị lớn nhất của A là 1 khi $x = 0; y = 1$

hoặc $x = 1; y = 0$.



-----HẾT-----

MỤC LỤC

| | Trang |
|-------------------------------|-------|
| • Sử dụng tập giá trị | 02 |
| • Sử dụng bất đẳng thức | 04 |
| • Sử dụng hình học | 07 |
| • Sử dụng vector | 09 |
| • Sử dụng lượng giác | 11 |
| • Sử dụng đạo hàm.. .. | 13 |