جـامعة 20 أوت 1955- سكيكدة السنة الجامعية :2022/2021

كـــــلية العلـــــوم

المستوى: السنة الأولى ل م د رياضيات وإعلام آلي. مقياس : الجبر1

السلسلة الأولى

التمرين 1 :

باستخذام جدول الحقيقة بين اللعلاقات التالية

$\neg(p\wedge q) \Leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)$ (1 *

$\neg(p\vee q) \Leftrightarrow \neg p\wedge\neg q$ (2

$p\vee(q\vee r) \Leftrightarrow (p\vee q)\vee r$ (3

$p\vee(q\wedge r) \Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(p\vee r)$ (4 *

$(p \Rightarrow q)\wedge(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (5

التمرين 2:

أثبت صحة مايلي دون إستخدام جدول الحقيقة

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$ (1 *

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)$ (2 *

$((p\wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ (3

التمرين 3 :

أكتب نفي القضايا التالية:

$(p\wedge q) \Rightarrow L$ (1

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x + y > 0$ (2 *

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y > 0$(3

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*: |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$ (4 *

التمرين 4 :

بإستخدام أنماط البرهان بين صحة أو خطأالقضايا التالية:

1) ليكن x, y عددان حقيقيان, بين إ دا كان : $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$ فإن $x = y$ *

2) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}$ فإن $n^3 - n$ مضاعف لـ 2 *

3) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}:\ 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

$*$ 4) بين أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}:\quad n(n+1) = p$

$*$ 5) بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}/\{-1\}:\quad \dfrac{3x-2}{x+1} \neq 3$

6) ليكن $x, y \epsilon \mathbb{R}$ بين أن $x.y \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$*$ 7) ليكن $n \epsilon \mathbb{N}$ بين أن n^2 فردي $\Leftarrow$ n فردي

$*$ 8) بين $\forall x \in \mathbb{R}$ إدا كان $x < 2 \Leftarrow x^2 < 4$

حل السلسلة الأولى .

التمرين الأول :

1) $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\overline{p} \vee \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

من جدول الحقيقة نلاحظ أن $\overline{p} \vee \overline{q}$ و $\overline{p \wedge q}$ لهما نفس قيم الحقيقة ومنه العلاقة (1) صحيحة

2) $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$

p	q	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$p \vee q$	$\overline{p \vee q}$	$\overline{p} \wedge \overline{q}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

ومنه العلاقة (2) صحيحة .

3) $p \vee (q \vee r) \overset{?}{\Leftrightarrow} (p \vee q) \vee r$ بما أن الفصل تجميعي

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$ ①	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$ ②	① $\Leftrightarrow$ ②
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

ومنه العلاقة (3) صحيحة

Scanné avec CamScanner

④ سنبين بنفس الطريقة .

⑤ .

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$$

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	① $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	② $p \Rightarrow r$	① $\Rightarrow$ ②
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

ومنه العلاقة ⑤ صحيحة .

التمرين ②:

1°/ $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

$\overline{p \Rightarrow q} \overset{\text{تعريف الاستلزام}}{\Leftrightarrow} \overline{\bar{p} \vee q}$

$\overset{\text{دمورغان}}{\Leftrightarrow} \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q}$

$\Leftrightarrow p \wedge \bar{q}$

2°/ $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$

$p \Rightarrow q \overset{\text{تعريف الاستلزام}}{\Leftrightarrow} (\bar{p} \vee q)$

$\Leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{\bar{q}})$

$\Leftrightarrow (\bar{\bar{q}} \vee \bar{p})$ الفصل يبدل

$\Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ تعريف الاستلزام.

3°/ $(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

$(p \wedge q) \Rightarrow r \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ تعريف الاستلزام

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee (\underbrace{\neg q \vee r}_{\text{استلزام}}))$ الفصل تجميعي

$= (\neg p \vee (q \Rightarrow r))$

$= p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ تعريف الاستلزام

Scanné avec CamScanner

حل التمرين 3 :

1°) $\overline{(p \wedge q) \Rightarrow L} \overset{ex02}{\underset{R.02}{\Leftrightarrow}} (p \wedge q) \wedge \bar{L}$

2°) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y > 0$

ملاحظة القضية (2) هي خاطئة

النفي : $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x+y \leq 0$ (محققة إذا أخذنا $y=-x$)

3°) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x+y > 0$

قضية صحيحة (نأخذ $y=-x+1$)

النفي :

$\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x+y \leq 0$

4°) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* : |x| < \alpha \Rightarrow |x^2| < \varepsilon$

النفي :

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* : \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* : |x| < \alpha \wedge |x^2| \geq \varepsilon$.

حل التمرين 4 :

1°) القضية (1) صحيحة تسهل البرهان المباشر :

$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$

$\Rightarrow \cancel{xy} - x + y - \cancel{1} = \cancel{xy} + x - y - \cancel{1} \Rightarrow -x+y = x-y.$

$\Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y.$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n \overset{?}{=} 2k \mid k \in \mathbb{N}$ أي n^3-n مضاعف لـ 2

هي قضية صحيحة تسهل البرهان بفصل الحالات :

لتكن $n \in \mathbb{N}$. n فردي أو n زوجي

$n^3 - n = n(n^2-1)$

1°a) إذا كان n فردي فإن $n = 2k+1 \mid k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^3 - n = n(n^2-1)$

$= (2k+1)((2k+1)^2 - 1)$

$= (2k+1)(4k^2+4k+\cancel{1}-\cancel{1})$

$= 2\underbrace{(2k+1)(2k^2+2k)}$

$n^3 - n = 2k' \mid k' \in \mathbb{N}$

ومنه n مضاعف لـ 2 ... (1)

Scanné avec CamScanner

b/ لما n زوجي أي : $n = 2k \mid k \in \mathbb{N}$

$$n^3 - n = n(n^2 - 1)$$
$$= (2k)((2k)^2 - 1)$$
$$= 2\,(k(4k^2 - 1))$$
$$n^3 - n = 2k'' \mid k'' \in \mathbb{N}$$

ومنه $n^3 - n$ مضاعف لـ 2 ... (**)

من (*) و(**) نستنتج أن $n^3 - n$ مضاعف لـ 2 .

3/ $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

هي قضية صحيحة نستعمل البرهان بالتراجع

من أجل $n = 0$: $1 = 2^0 = 1b$

$1 = 2^{0+1} - 1 = 2b$.

$1b = 2b$ ومنه $P(0)$ صحيحة ، نفرض أن الخاصية صحيحة

حتى المرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل $(n+1)$.

$$(P(n)) : 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$P(n+1) : 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n + 2^{n+1} \overset{?}{=} 2^{n+2} - 1$$

$$\underbrace{2^0 + 2^1 + \dots + 2^n} + 2^{n+1} \overset{\text{الفرض}}{=} 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$
$$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$$
$$= 2^{n+2} - 1$$

اذن $(P(n+1))$ صحيحة ومنه $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$

4/ $\forall n \in \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} : n(n+1) = p$

هي قضية صحيحة

نستعمل البرهان بالتراجع :

من أجل $n = 0$ يوجد $p = 0$ بحيث $0(0+1) = 2.0$ محققة

من أجل $n = 1$ يوجد $p = 1$ بحيث $1(1+1) = 2.1$ محققة .

Scanné avec CamScanner

نفرض أن الخاصية صحيحة حتى المرتبة n ونبرهن على صحتها من أجل (n+1)

$P(n): n(n+1) = 2p$

$P(n+1): (n+1)(n+2) \overset{?}{=} 2p$

$$(n+1)(n+2) = (n+2)(n+1)$$
$$= n(n+1) + 2(n+1)$$
$$= 2p + 2(n+1)$$
$$= 2(p+n+1)$$
$$= 2p'$$

ومنه

$\forall n \in \mathbb{N} : \exists p' = p + n + 1 \in \mathbb{N} : (n+1)(n+2) = 2p'$

ومنه :

$\forall n \in \mathbb{N} : \exists p \in \mathbb{N} : n(n+1) = 2p.$

15

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \dfrac{3x-2}{x+1} \neq 3$

هي قضية صحيحة نستعمل البرهان بالخلف ، نفرض العكس أي:

$\exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \dfrac{3x-2}{x+1} = 3$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : 3x - 2 = 3x + 3$

$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : 5 = 0$ تناقض

ومنه :

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} : \dfrac{3x-2}{x+1} \neq 3.$

1°6. نستعمل البرهان بالخلف

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x.y \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

نفرض العكس :

$x.y > \dfrac{x^2+y^2}{2}$

$\Rightarrow 2x.y > x^2+y^2 \Rightarrow x^2+y^2-2xy < 0$

$\Rightarrow (x-y)^2 < 0$

وهذا تناقض لأن $(x-y)^2$ موجب ومنه العكس صحيح أي :

$x.y \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Scanné avec CamScanner

7/ لتكن $n \in \mathbb{N}$: n^2 فردي $\Leftarrow$ n فردي (قضية صحيحة).

نستعمل البرهان بالعكس النقيض ($p \Leftarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$).

أي نفرض أن : n ليس فردي $\Leftarrow$ n^2 ليس فردي

أي : n زوجي $\Leftarrow$ n^2 زوجي.

نفرض أن n فردي أي $n = 2k+1 \in \mathbb{N}$

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

$n^2 = 2k' \mid k' \in \mathbb{N}$ ومنه n^2 زوجي.

وبالتالي : n^2 فردي $\Leftarrow$ n فردي.

8/ إثبات أن $\forall x \in \mathbb{R}$: إذا كان $x < 2 \Leftarrow x^2 < 4$

هي قضية خاطئة، نستعمل البرهان بمثال مضاد.

$$\left(\overline{x < 2 \Rightarrow x^2 < 4}\right) \Leftrightarrow (x < 2 \wedge x^2 \geq 4)$$

$$\exists x = -3 < 2 \wedge x^2 = (-3)^2 = 9 > 4 \;).$$

Scanné avec CamScanner

جامعة 20 أوت 1955 - سكيكدة

السنة الجامعية: 2020/2021

كـــــلية العلـــــوم

المستوى: السنة الأولى ل م د رياضيات وإعلام آلي.

مدة الامتحان: ساعة و نصف.

الإمتحان الأول في مقياس الجبر 1

التمرين 1 : (4ن)

أجب بصحيح أو خطأ عن الأسئلة التالية :

a) لتكن p,q,r ثلاث قضايا فإن ; $\overline{p \Longrightarrow q} \Leftrightarrow p \vee \overline{q}$

b) لتكن A , B مجموعتين جزئيتين من E , إذا كان $A \subset B$ فإن $C_E B \subset C_E A$

c) $\{\emptyset\}$ هي المجموعة الخالية

d) لتكن E مجموعة و $\mathcal{R}$ علاقة ثنائية معرفة على E , إذا كانت $\mathcal{R}$ إنعكاسية, تناظرية ومتعدية فهي علاقة ترتيب.

التمرين 2 : (8ن)

ليكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تطبيق معرف كمايلي : $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1) أحسب $f(0), f(2), f(\frac{1}{2})$,

2) حل المعادلة $f(x) = -2$

3) أوجد $f(\mathbb{R})$

4) هل f غامر , متباين, برر ذلك

5) ليكن $g: [-1,1] \to [-1,1]$ معرف بـ $f(x) = g(x)$ بين أن g تقابلي

التمرين 3 : (8ن)

لتكن المجموعة $G = \mathbb{R} / \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

نزود G بالعملية $*$ المعرفة كمايلي : $\forall x, y \in G: x * y = xy + 2(x+y) + 2$

1) بين أن $(G,*)$ زمرة تبديلية

2) بين أن المجموعة H حيث $H = \{x, x > -2\}$ زمرة جزئية من G

ليكن f هومومورفيزم : $f: (G,*) \longrightarrow (\mathbb{R}^*,\cdot)$

$x \mapsto x + 2$

4) أوجد $kerf$, ماذا تستنتج بالنسبة إلى f

Scanné avec CamScanner