

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR

**CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES
A NUEVO INGRESO**



CURSO DE FISICA

TEMA 18: Movimiento de Rotación y Traslación Combinados

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Contenido

OBJETIVOS GENERALES	1
OBJETIVOS ESPECÍFICOS	1
9.9 MOVIMIENTO DE ROTACION Y TRASLACION COMBINADOS.....	2
9.10 TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACION	4
9.11 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR	5
9.11.1 De un sistema de partículas (cuerpo rígido).....	5
9.12 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR	6

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

OBJETIVOS GENERALES

Que el estudiante:

- 1) Explique que es la cantidad de movimiento angular, la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular.
- 2) Aplique las ecuaciones para calcular la cantidad de movimiento angular y su conservación para una partícula y un sistema de partículas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

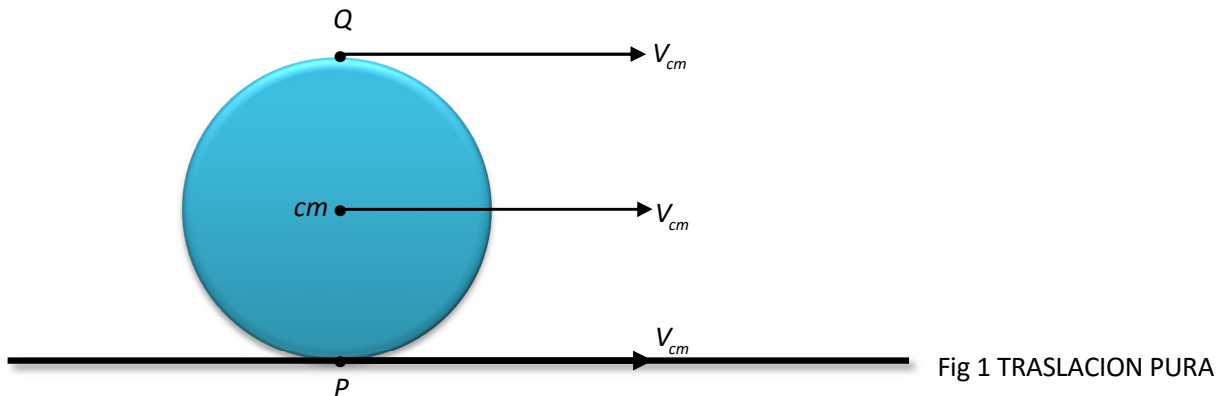
Que el estudiante:

- 1) Analizara el movimiento de un cuerpo rígido que gira y se desplaza a la vez.
- 2) Utilizando relaciones de energía, determinara la velocidad del centro de masa para un cuerpo que gira y se desplaza a la vez.
- 3) Determinará, mediante un análisis dinámico la aceleración del centro de masa para un cuerpo que gira y se desplaza a la vez, así como la fricción necesaria.
- 4) Escribirá las ecuaciones de trabajo y potencia de un movimiento de rotación, así como el significado de sus términos.
- 5) Resolverá problemas de potencia y trabajo en el movimiento rotacional.
- 6) Definirá la cantidad de movimiento angular de una partícula y de un sistema de partículas.
- 7) Resolverá problemas de cantidad de movimiento angular de un sistema de partículas.
- 8) Explicará la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular.
- 9) Aplicará la ley de la conservación de la cantidad de movimiento angular en la resolución de problemas.

9.9 MOVIMIENTO DE ROTACION Y TRASLACION COMBINADOS.

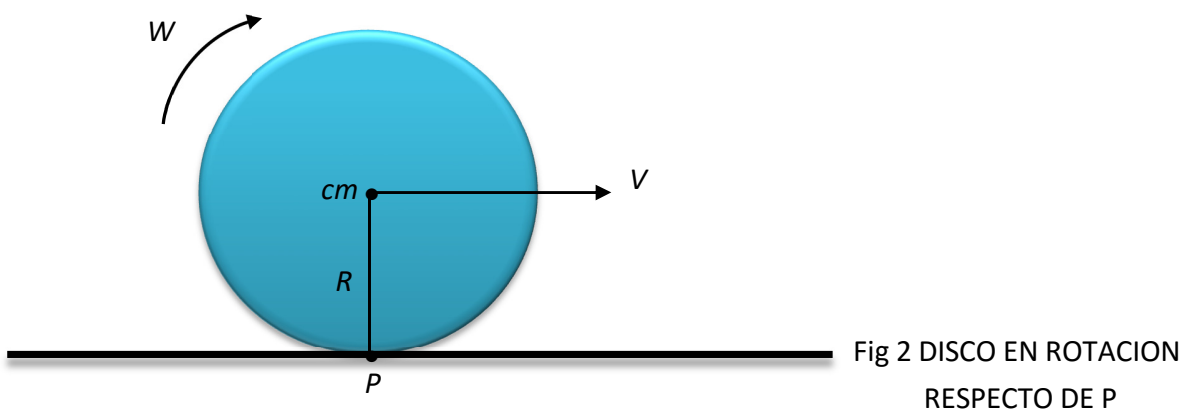
Para comprender la relación entre el movimiento de traslación y el movimiento de rotación combinados es necesario separarlos así:

- i. Consideremos un disco solido de radio R que se desliza a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, es decir que no rota, tal como se muestra en la figura 1.



Observe en la figura anterior que todos los puntos señalados P, Q y el cm (centro de masa) se mueven de la misma manera es decir todos los puntos tienen la misma velocidad: V_{cm} (la velocidad del centro de masa).

- ii. Supongamos ahora que el mismo disco anterior rota libremente sin deslizamiento sobre la misma superficie tal como se muestra en la figura 2.



CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Como no hay deslizamiento, el centro de masa (cm) del disco rota en relación al punto de contacto P con la misma velocidad angular que la del disco (W) que está rotando y con una velocidad tangencial V . La velocidad tangencial del cm y W se relacionan así:

$$V = WR$$

$$W = \frac{V}{R}$$

Si una rueda rota con $W = 25 \text{ rad/s}$ y el radio de esta es de 60 cm. La rapidez horizontal de la rueda será $V = WR = 25 \text{ rad/s} (0.60 \text{ m}) = 15 \text{ m/s}$.

Para trabajar la rotación y traslación combinados una alternativa es por energía. Para ello se aplica el principio de conservación de la energía mecánica, si no hay fricción en la superficie.

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

$$E_0 = E_f$$

$$U_0 + K_0 = U_f + K_f$$

$$\text{donde } K_0 = K_{Ro} + K_{To} \quad \text{y} \quad K_f = K_{Rf} + K_{Tf}$$

En ambos casos se suma la energía cinética de rotación y de traslación.

$$\text{Luego: } U_0 + K_{Ro} + K_{To} = U_f + K_{Rf} + K_{Tf}$$

$$\text{donde: } U = mgy$$

$$K_R = \frac{1}{2}IW^2$$

$$K_T = \frac{1}{2}mV^2$$

9.10 TRABAJO Y POTENCIA EN EL MOVIMIENTO DE ROTACION

Consideremos la fuerza \vec{F} que actúa tangencialmente en el borde de una polea de radio R , tal como se muestra en la figura 3.

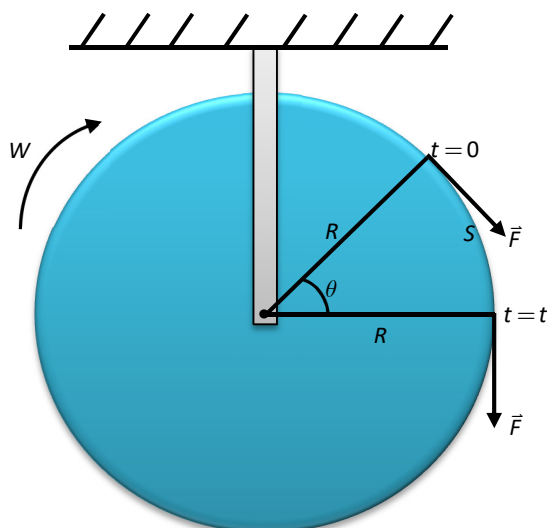


Fig 3. Polea que gira con velocidad W

La fuerza \vec{F} hace girar la polea un ángulo θ tal que:

$$S = R\theta$$

El trabajo W de la fuerza \vec{F} es:

$$W = FS$$

Observe que el punto de aplicación de la fuerza se mueve una distancia S .

La fuerza \vec{F} es perpendicular al radio por lo que FR es el momento de torsión debido a la fuerza

$$W = FS = F(R\theta)$$

$$W = (FR)\theta$$

$$W = \tau\theta$$

Donde θ se expresa en radianes. El trabajo siempre se expresa en joule en el SI.

La energía mecánica se transmite en forma de trabajo rotacional. La potencia rotacional en el tiempo t para que el momento de torsión τ lleve a cabo un desplazamiento θ es:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{\tau\theta}{t} = \tau\left(\frac{\theta}{t}\right)$$

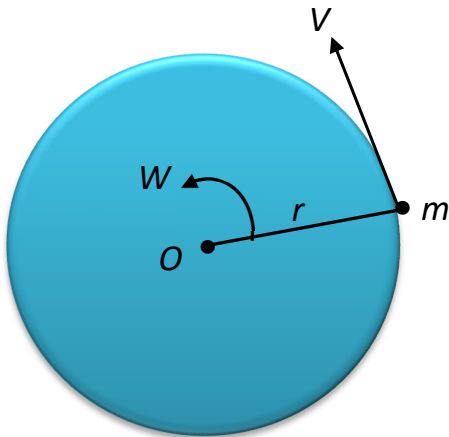
donde $\vec{W} = W_{prom} = \frac{\theta}{t}$. Entonces escribimos

$$P = \tau W$$

9.11 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

9.11.1 De un sistema de partículas (cuerpo rígido)

Considere una partícula de masa “m” que se mueve en una circunferencia de radio “r” como se muestra en la fig. 4(a).

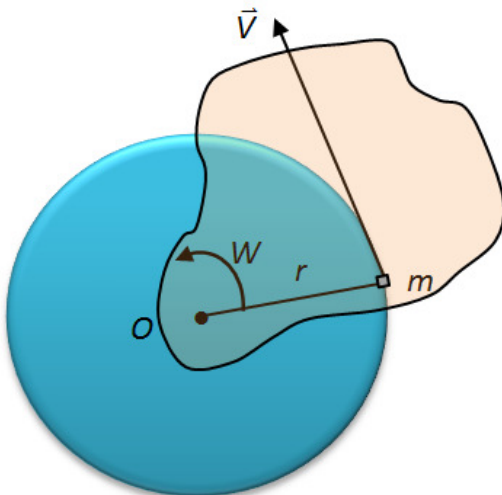


La \vec{V} es tangencial por lo que $\vec{p} = m\vec{V}$, donde \vec{p} es cantidad de movimiento lineal. Se define \vec{L} cantidad de movimiento angular de la particular como: $L = (mV)r$

Fig 4.a

Cantidad de movimiento
lineal P

Ahora consideremos un cuerpo rígido constituido por muchas partículas, de masa cada una m tal como se muestra en la fig. 4b



Cada partícula de masa “m” tiene una cantidad de movimiento angular

$$L = mVr$$

Sustituyendo:

$$V = Wr$$

$$L = m(Wr)r$$

$$L = (mr^2)W$$

Fig 4.b

Cantidad de movimiento
angular L

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Puesto que el cuerpo rígido, todas las partículas de masa “m” tiene la misma velocidad angular “W”. La cantidad de movimiento angular del cuerpo es:

$$L = (\sum mr^2)W$$
$$L = IW$$

En el SI las unidades de L son $kg \cdot m^2/s$

9.12 CONSERVACION DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

A partir de la segunda ley de Newton para la rotación

$$\tau = I\alpha$$

En el movimiento de rotación $W = W_0 + \alpha t$,

La aceleración $\alpha = \frac{W - W_0}{t}$. Sustituyendo en la segunda ley de Newton:

$$\tau = I\left(\frac{W - W_0}{t}\right)$$
$$\tau t = IW - IW_0 \quad ; \quad \tau t: \text{impulso angular } J$$
$$J = L - L_0$$
$$J = \Delta L$$

Expresión que se lee:

Impulso angular = cambio en la cantidad de movimiento angular.

Si no se aplica momento de torsión externo al cuerpo que gira $\tau = 0$ se obtiene que:

$$0 = IW - IW_0$$

$$IW_0 = IW$$

Expresión que se lee:

Cantidad de movimiento angular inicial = cantidad de movimiento angular final.

$$L_0 = L$$

$$0 = L - L_0$$

$$\Delta L = 0$$

Lo anterior constituye la conservación de la cantidad de movimiento angular, que dice:

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

“En ausencia de momento de torsión externo, la cantidad de movimiento angular se conserva”

Este enunciado se cumple para sistemas que pueden cambiar su inercia rotacional como una forma de controlar la velocidad angular con que giran. En este caso:

$$I_0 \omega_0 = I \omega$$

Al cambiar la inercia rotacional deberá cambiar ω para que el producto $I\omega$ permanezca constante. Por ejemplo los patinadores controlan la rapidez con que giran sus cuerpos extendiendo o encogiendo sus brazos para disminuir o aumentar ω respectivamente.

Ejemplo 1

Un cilindro hueco de pared delgada, de masa M y radio R ($I_{CM} = MR^2$) rueda sin resbalar con una rapidez en una superficie plana tal como se muestra en la figura. ¿Qué energía cinética posee?

Solución:

$$k = k_t + k_R$$

$$k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2;$$

$$k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} (MR^2) \omega^2; V_{CM} = \omega R; \omega = \frac{V_{CM}}{R}$$

$$k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} (MR^2) \left(\frac{V_{CM}}{R} \right)^2$$

$$k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + \frac{1}{2} M V_{CM}^2$$

$$k = \frac{2}{2} M V_{CM}^2$$

$$k = M V_{CM}^2$$

Si el cilindro solo deslizará $k = \frac{1}{2} M V_{CM}^2$, al rodar $k = M V_{CM}^2$, por lo tanto al rodar la energía cinética es el doble.

Ejemplo 2

Una rueda de caballitos (tio vivo) de 2.40m de radio tiene un momento de inercia $2100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ Alrededor de un eje vertical que pasa por su centro y gira con fricción despreciable, a) un niño aplica una fuerza de 18.0 N tangencialmente al borde de la rueda durante 15.0 s. si la rueda estaba inicialmente en reposo, ¿Qué rapidez angular tiene al final de los 15.0 s? b) ¿Cuánto trabajo efectuó el niño sobre la rueda? c) ¿Qué potencia media suministro el niño?

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

Datos:

$$R = 2.40m$$

$$I_{CM} = 2100kg.m^2 \quad a)w? \quad b)W? \quad c)P_{prom}?$$

$$F_t = 18.0N$$

$$t = 15.0s$$

$$w_0 = 0$$

$$a)w = w_0^0 + \alpha t$$

$$w = \alpha t$$

$$\tau = F_t R = I_{CM} \alpha$$

$$\alpha = \frac{F_t R}{I_{CM}} = \frac{(18.0)(2.40)}{2100}$$

$$\alpha = 0.02057 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 0.021 \text{ rad/s}$$

$$b) W = \tau \theta$$

$$\Delta \theta = w_0^0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\Delta \theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} (0.021)(15.0)^2$$

$$\Delta \theta = 2.3625 \text{ rad}$$

$$W = \tau \Delta \theta = F_t R \Delta \theta$$

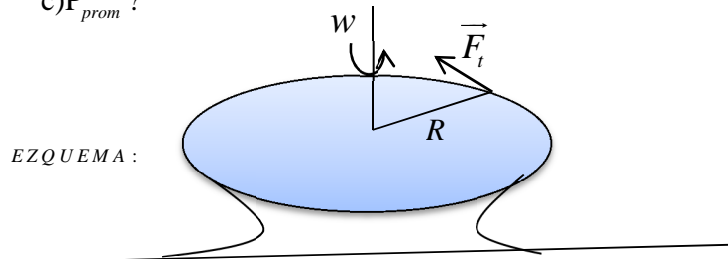
$$W = (18.0)(2.40)(2.3625)$$

$$W = 102.1J$$

$$c) P_{prom} = \frac{W}{t} = \frac{102.1J}{15.0s}$$

$$P_{prom} = 6.804 \text{ J/s}$$

$$P_{prom} \cong 6.8 \text{ watt} \cong 6.8w$$



CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

EJEMPLO 3

¿Qué potencia en horse power (hp) tiene un motor eléctrico que gira 3600 rpm y genera un momento de torsión de 4.30 m.N?

Solución:

$$P_{prom} = \frac{W}{t} = \frac{\tau\theta}{t} = \tau \left(\frac{\theta}{t} \right) = \tau\omega$$

$$P_{prom} = (4.30 m.N) \left(3600 \frac{rev}{min} \times \frac{1 min}{60s} \times \frac{2\pi rad}{1 rev} \right)$$

$$P_{prom} = 258 \frac{J}{s} = 258 W$$

$$pero 1hp = 745.7 W$$

$$P_{prom} = 258 W \times \frac{1hp}{745.7 W}$$

$$P_{prom} = 0.346 hp$$

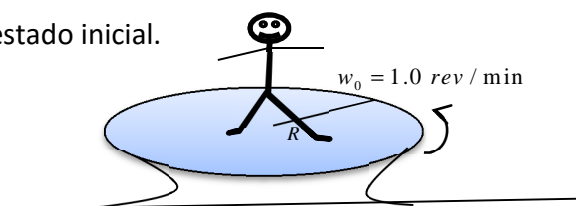
$$P_{prom} \cong \sim 0.35 hp$$

EJEMPLO 4

Un hombre parado sobre una plataforma giratoria sin fricción está girando con una rapidez angular de 1.0 rev/min; sus brazos se encuentra extendidos y sostienen un peso en cada mano. Con los brazos en esta posición la inercia total de rotación del hombre, los pesos y la plataforma es de 6.0 kg.m². Si moviendo los pesos del hombre disminuye su inercia de rotación a 2.0 kg.m² a) ¿Cuál es la rapidez angular que adquiere la plataforma? b) ¿en qué cantidad aumenta su energía cinética?

Solución:

- a) Es necesario hacer un esquema del estado inicial.

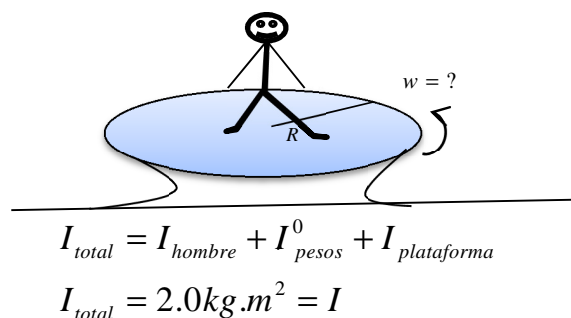


$$I_{total} = I_{hombre} + I_{pesas} + I_{plataforma}$$

$$I_{total} = 6.0 kg.m^2 = I_0$$

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Esquema del estado final.



Por conservación de la cantidad de movimiento angular

$$L_0 = L \quad (\tau_{ext} = 0)$$

$$I_0 w_0 = I w$$

$$w_0 = 1.0 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.1047 \text{ rad/s}$$

$$w = \frac{I_0 w_0}{I} = \frac{6.0(1.0)}{2.0} = 3.0 \text{ rev/min}$$

$$w = 3.0 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0.3142 \text{ rad/s}$$

$$\text{b) } \Delta k = k - k_0 = \frac{1}{2} I w^2 - \frac{1}{2} I_0 w_0^2 = \frac{1}{2} (2.0)(0.3142)^2 - \frac{1}{2} (6.0)(0.1047)^2$$

$$\Delta k = 0.099 - 0.033 = 0.066 \text{ J}$$

EJEMPLO 5

Una persona se encuentra sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 1.22 rev/s, sus brazos están extendidos y cada mano sostiene una pesa. Con sus manos en esta posición la inercia rotacional total de la persona, junto con las pesas y la plataforma es de 6.13 kg·m². Si al mover las pesas hacia el eje de rotación de la plataforma la inercia de rotación disminuye a 1.97 kg·m² a) ¿Cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma? b) ¿Cuál es la razón entre la nueva energía cinética y la energía cinética original?

CURSO DE REFUERZO PARA ASPIRANTES A NUEVO INGRESO

Solución:

Datos:

$$w_0 = 1.22 \frac{rev}{s} \times \frac{2\pi rad}{1 rev} = 7.67 \text{ rad/s}$$

$$I_0 = 6.13 \text{ kg.m}^2 \text{ (brazos extendidos)}$$

$$I_0 = 1.97 \text{ kg.m}^2 \text{ (brazos sin extender)}$$

$$a) w? \quad b) \frac{k}{k_0}$$

a) Por conservación de la cantidad de movimiento angular.

$$I_0 w_0 = I w$$

$$w = \frac{I_0 w_0}{I} = \frac{(6.13)(7.67)}{(1.97)} = 23.87 \text{ rad/s}$$

$$w \cong 23.9 \text{ rad/s}$$

$$b) \frac{k}{k_0} = \frac{\frac{1}{2} I w^2}{\frac{1}{2} I_0 w_0^2} = \left(\frac{I}{I_0} \right) \left(\frac{w}{w_0} \right)^2 = \left(\frac{1.97}{6.13} \right) \left(\frac{23.87}{7.67} \right)^2$$

$$\frac{k}{k_0} = 3.11$$