

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

MÉTODO DE LAS RIGIDECES

CAPÍTULO I

ARMADURAS

La matriz de rigidez de elementos tipo armadura biarticulados en donde no se tiene efectos de flexión, cortante y torsión.

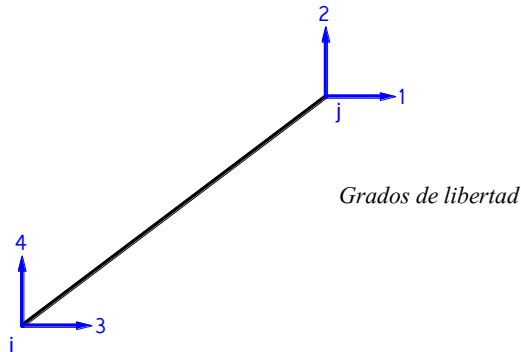
- En elementos en donde la barra no está con ninguna orientación se tiene la siguiente matriz.



$$K^{(e)} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Orientado a los ejes locales del elemento.}$$

La matriz nos indica la fuerza necesaria para producir un desplazamiento unitario en el grado de libertad indicado

- Para elementos orientados arbitrariamente tenemos:

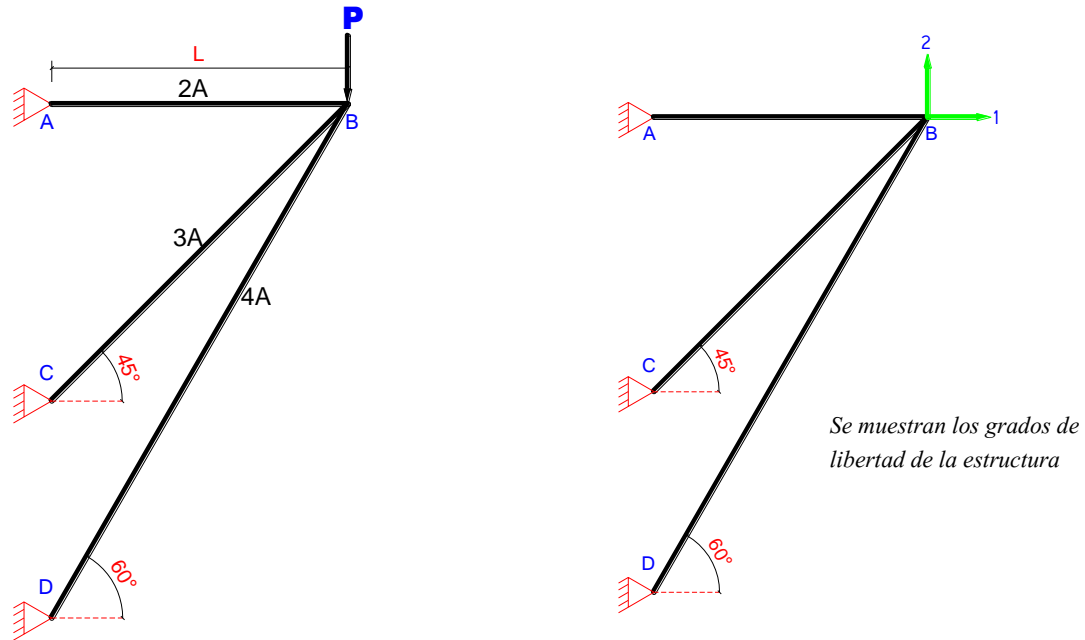


$$K^{(e)} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \cos^2 \phi & (\cos \phi)(\sin \phi) & -\cos^2 \phi & -(\cos \phi)(\sin \phi) \\ (\cos \phi)(\sin \phi) & \sin^2 \phi & -(\cos \phi)(\sin \phi) & -\sin^2 \phi \\ -\cos^2 \phi & -(\cos \phi)(\sin \phi) & \cos^2 \phi & (\cos \phi)(\sin \phi) \\ -(\cos \phi)(\sin \phi) & -\sin^2 \phi & (\cos \phi)(\sin \phi) & \sin^2 \phi \end{pmatrix}$$

El ángulo ϕ es la orientación del elemento a partir de un eje horizontal.

PROBLEMA N° 1:

Calcular las fuerzas internas de cada elemento y el desplazamiento en el nudo B tanto horizontal como vertical. Considere $E = \text{cte.}$ y las áreas de cada barra se muestran como $2A$, $3A$ y $4A$.

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO AB:



Se enumeran los ejes locales de cada elemento tal como se muestra de donde tenemos:

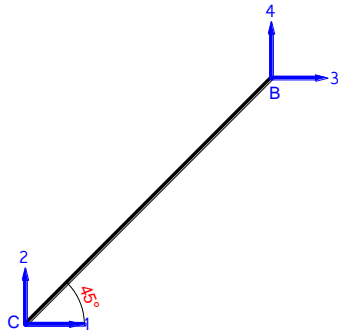
$$\alpha = 0^\circ$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$K_{AB} = \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Grados de libertad de la estructura asociados a los ejes locales.

➤ ELEMENTO CB:



Se enumeran los ejes locales de cada elemento tal como se muestra de donde tenemos:

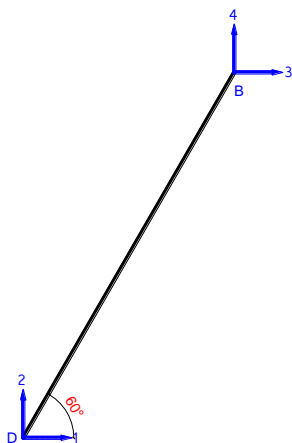
$$\alpha = 45^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$K_{CB} = \frac{3EA}{L\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO DB:



Se enumeran los ejes locales de cada elemento tal como se muestra de donde tenemos:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$K_{DB} = \frac{4EA}{2L} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura según los grados de libertad, como la estructura presenta 2 GDL la matriz será de 2x2 la cual debe ser simétrica.

$$K = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & 0 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{3}{2} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$K = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 3.561 & 1.927 \\ 1.927 & 2.561 \end{pmatrix}$$

Ensamblamos el vector fuerza de la estructura teniendo en cuenta los grados de libertad globales.

De la ecuación:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad [F] = [K] \times [\delta]$$

De donde tenemos que:

$$[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos del nudo B.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 3.561 & 1.927 \\ 1.927 & 2.561 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \frac{LP}{EA} \begin{pmatrix} 0.474 & -0.356 \\ -0.356 & 0.659 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \frac{LP}{EA} \begin{pmatrix} 0.356 \\ -0.659 \end{pmatrix} \quad \text{Son los desplazamientos del nudo B}$$

Calculamos las fuerzas internas de los elementos asociados a los grados de libertad locales de cada elemento:

➤ ELEMENTO AB: $[P_{AB}] = [K_{AB}] \times [\delta_{AB}]$

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = \frac{2EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{LP}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.356 \\ -0.659 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.712 \\ 0 \\ -0.712 \\ 0 \end{pmatrix} P$$

➤ ELEMENTO CB: $[P_{CB}] = [K_{CB}] \times [\delta_{CB}]$

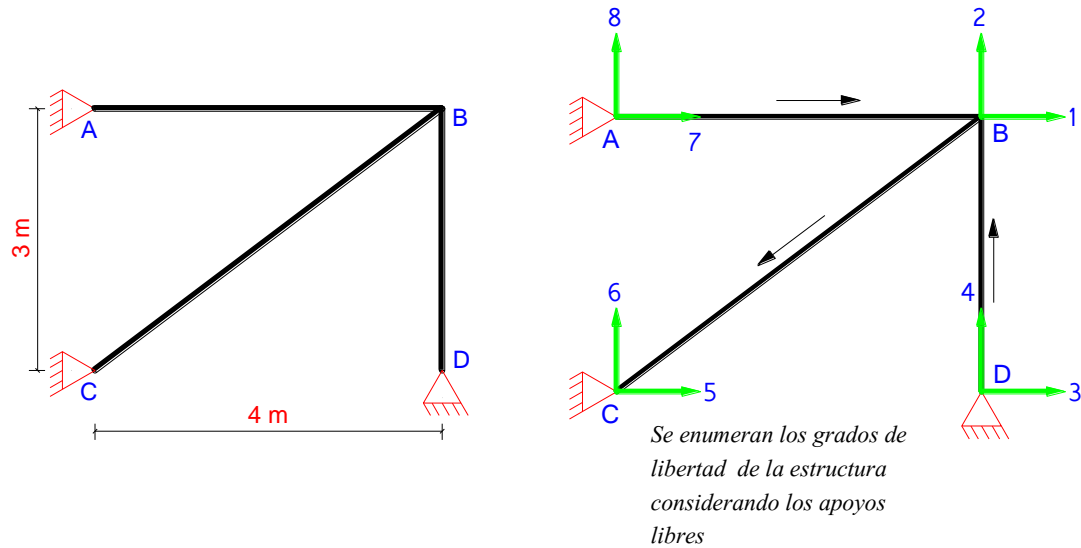
$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = \frac{3EA}{L\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{LP}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.356 \\ -0.659 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.321 \\ 0.321 \\ -0.321 \\ -0.321 \end{pmatrix} P$$

➤ ELEMENTO DB: $[P_{DB}] = [K_{DB}] \times [\delta_{DB}]$

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = \frac{4EA}{2L} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \times \frac{LP}{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.356 \\ -0.659 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.393 \\ 0.680 \\ -0.393 \\ -0.680 \end{pmatrix} P$$

PROBLEMA N° 2:

Determine la fuerza en cada miembro de la armadura mostrada si el soporte en el nudo D se desplaza hacia abajo 25mm considere $EA = 8(10)^3 \text{ kN}$.

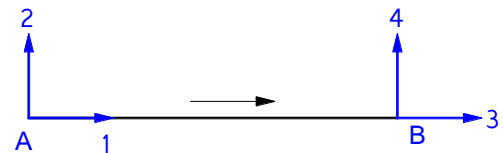
**SOLUCIÓN:**

Determinamos la matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO AB:

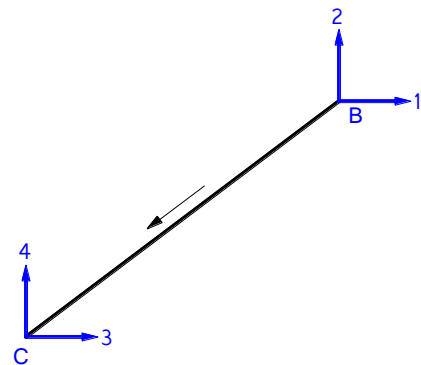
$$K_{AB} = EA \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Grados de libertad de la estructura asociados a los ejes GLOBALES.



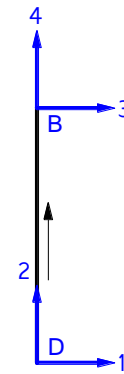
➤ ELEMENTO CB:

$$K_{CB} = EA \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



➤ ELEMENTO DB:

$$K_{DB} = EA \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$



Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura según los grados de libertad, como se tomó libres los apoyos de la estructura presenta 8 GDL. Por lo tanto la matriz será 8x8.

$$K = EA \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

Ensamblamos el vector fuerza y desplazamiento de la estructura teniendo en cuenta los grados de libertad globales. De la ecuación:

$$[F] = [K] \times [\delta]$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \\ R_7 \\ R_8 \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Desarrollamos la solución para las ecuaciones y obtenemos los desplazamientos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \end{pmatrix} + EA \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De donde obtenemos:

$$0 = EA[(0.378\partial_1 + 0.096\partial_2) + 0]$$

$$0 = EA[(0.096\partial_1 + 0.4053\partial_2) + 0.00833]$$

Si resolvemos estas ecuaciones simultáneamente obtenemos:

$$\partial_1 = 0.00556m$$

$$\partial_2 = -0.021875m$$

Calculamos las fuerzas en cada elemento asociados a los grado de libertad locales de las barras:

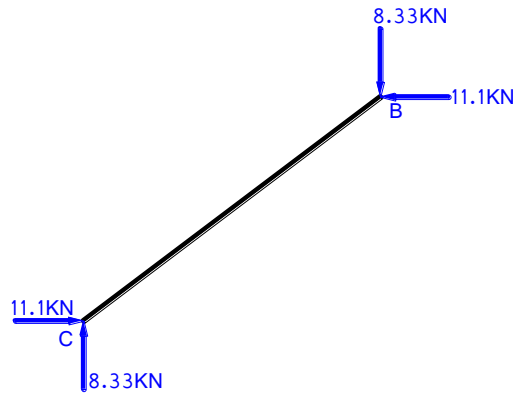
➤ ELEMENTO AB:

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00556 \\ -0.021875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.1 \\ 0 \\ 11.1 \\ 0 \end{pmatrix} KN$$



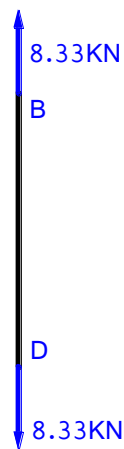
➤ *ELEMENTO CB:*

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.00556 \\ -0.021875 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11.1 \\ -8.33 \\ 11.1 \\ 8.33 \end{pmatrix} KN$$



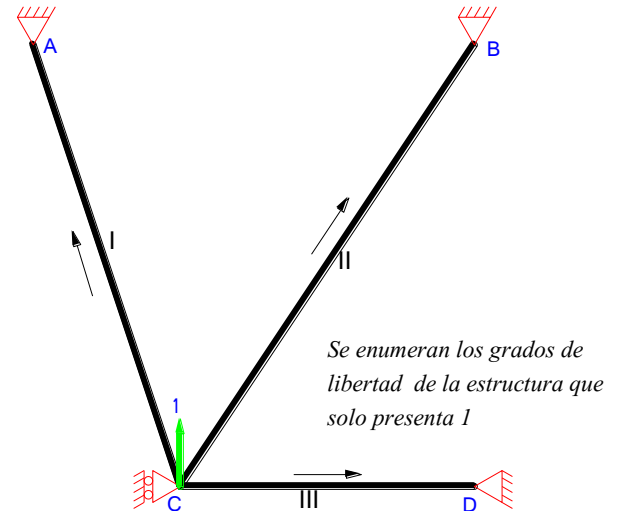
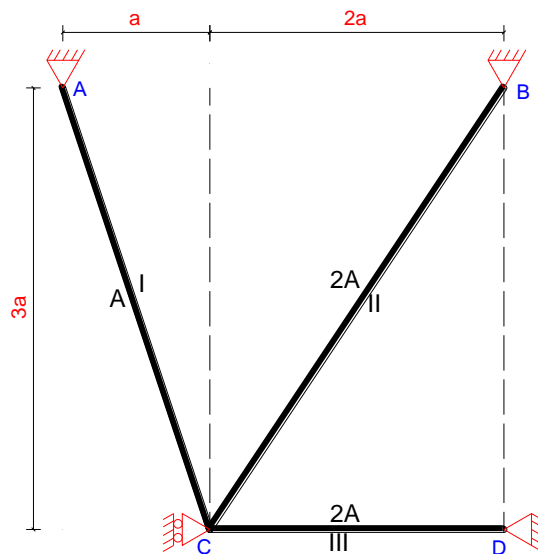
➤ *ELEMENTO DB:*

$$\begin{pmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ F'_3 \\ F'_4 \end{pmatrix} = EA \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0.00556 \\ -0.021875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8.33 \\ 0 \\ 8.33 \end{pmatrix} KN$$



PROBLEMA N° 3:

Para el sistema mostrado en la figura, calcular los esfuerzos térmicos en las barras de acero.



$$\Delta t = 40^{\circ}\text{C}$$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

$$\alpha = 12.5 \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}$$

SOLUCIÓN:

Determinamos la matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO CD:

$$K_{CD} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO CB:

$$K_{CB} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.171 & 0.256 & -0.171 & -0.256 \\ 0.256 & 0.384 & -0.256 & -0.384 \\ -0.171 & -0.256 & 0.171 & 0.256 \\ -0.256 & -0.384 & 0.256 & 0.384 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO CA:

$$K_{CA} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{0}{0.032} & \overset{1}{-0.095} & \overset{0}{-0.032} & \overset{0}{0.095} \\ -0.095 & 0.285 & 0.095 & -0.285 \\ -0.032 & 0.095 & 0.032 & -0.095 \\ 0.095 & -0.285 & -0.095 & 0.285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura mediante un ensamble teniendo en cuenta los grados de libertad globales.

$$K = \frac{EA}{a}(0.669)$$

Fuerzas ficticias que compensan las elongaciones debidas a incrementos de temperatura.

$$N_0 = -EA\alpha\Delta T$$

$$F_0^{CD} = EA\alpha \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_0^{CB} = EA\alpha \begin{pmatrix} 44.376 \\ 66.564 \\ -44.376 \\ -66.564 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F_0^{CA} = EA\alpha \begin{pmatrix} -12.649 \\ 37.947 \\ 12.649 \\ -37.947 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensamble de las fuerzas con signo cambiado.

$$F = -\sum_e F_0^{(e)} = EA\alpha(-104.511) \quad \text{Esta fuerza corresponde al grado de libertad 2}$$

Hallamos los desplazamientos $[F] = [K] \times [\delta]$

$$EA\alpha(-104.511) = \frac{EA}{a}(0.669) \times (\delta_1)$$

$$\delta_1 = \alpha a(-104.511)(1.495)$$

$$\delta_1 = \alpha a(-156.242)$$

Calculo de las fuerzas de cada elemento:

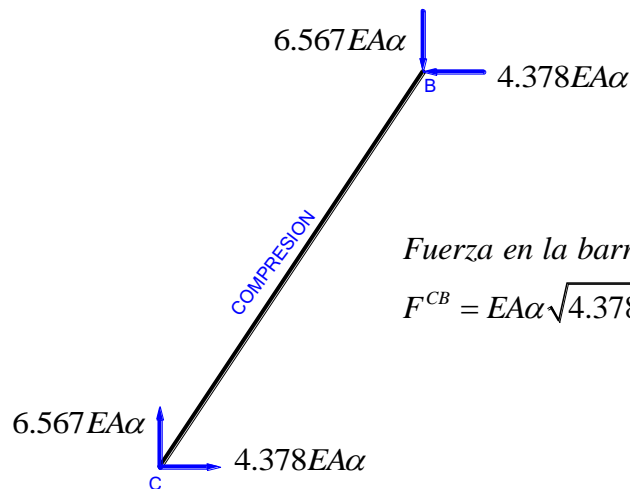
➤ ELEMENTO CD:

$$F^{CD} = EA\alpha \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -156.242 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha a = EA\alpha \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -80 \\ 0 \end{pmatrix}$$



➤ ELEMENTO CB:

$$F^{CB} = EA\alpha \begin{pmatrix} 44.376 \\ 66.564 \\ -44.376 \\ -66.564 \end{pmatrix} + \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0.171 & 0.256 & -0.171 & -0.256 \\ 0.256 & 0.384 & -0.256 & -0.384 \\ -0.171 & -0.256 & 0.171 & 0.256 \\ -0.256 & -0.384 & 0.256 & 0.384 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -156.242 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha a = EA\alpha \begin{pmatrix} 4.378 \\ 6.567 \\ -4.378 \\ -6.567 \end{pmatrix}$$

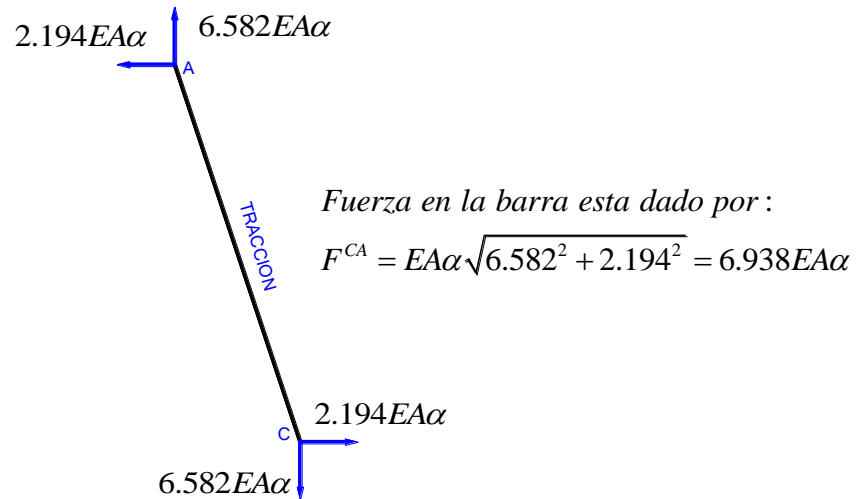


Fuerza en la barra esta dado por :

$$F^{CB} = EA\alpha \sqrt{4.378^2 + 6.567^2} = 7.893EA\alpha$$

➤ ELEMENTO CA:

$$F^{CA} = EA\alpha \begin{pmatrix} -12.649 \\ 37.947 \\ 12.649 \\ -37.947 \end{pmatrix} + \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0.032 & -0.095 & -0.032 & 0.095 \\ -0.095 & 0.285 & 0.095 & -0.285 \\ -0.032 & 0.095 & 0.032 & -0.095 \\ 0.095 & -0.285 & -0.095 & 0.285 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -156.242 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha a = EA\alpha \begin{pmatrix} 2.194 \\ -6.582 \\ -2.194 \\ 6.582 \end{pmatrix}$$



Calculo de los esfuerzos térmicos: $\sigma = \frac{F}{A}$

➤ ELEMENTO CD:

$$\sigma_{CD} = \frac{80EA\alpha}{2A} = 1000 \text{ kg / cm}^2$$

➤ ELEMENTO CB:

$$\sigma_{CB} = \frac{7.893EA\alpha}{2A} = 98.663 \text{ kg / cm}^2$$

➤ ELEMENTO CA:

$$\sigma_{CA} = \frac{6.938EA\alpha}{A} = 173.45 \text{ kg / cm}^2$$

PROBLEMA N° 4:

La estructura mostrada en la figura está formada por dos barras de cobre y dos barras de acero los cuales concurren en un nudo. Si el conjunto sufre un aumento de temperatura de $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ y si la sección recta de las barras de cobre es el doble a los del acero, determinar las tensiones aparecidas en cada barra.

$$2A_{\text{cobre}} = A_{\text{acero}}$$

$$A_{\text{cobre}} = 2A$$

$$A_{\text{acero}} = A$$

$$\alpha_{\text{cobre}} = 16.5\alpha / ^\circ\text{C}$$

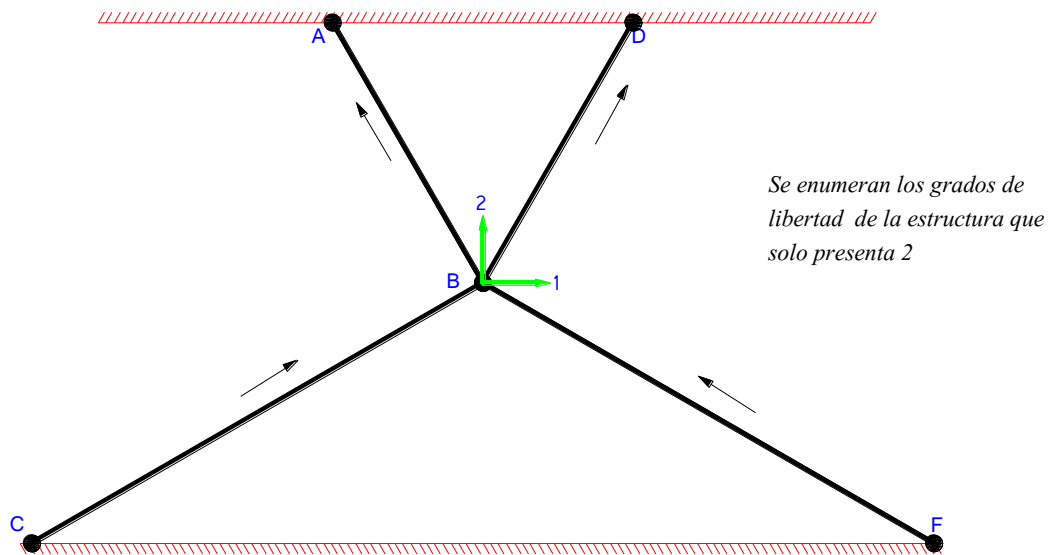
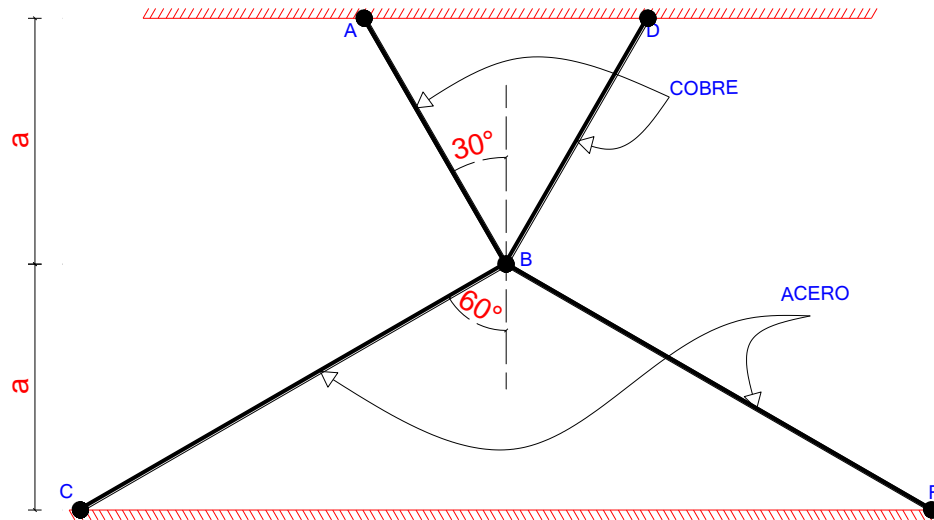
$$\alpha_{\text{acero}} = 12.5\alpha / ^\circ\text{C}$$

$$\text{donde : } \alpha = 10^{-6}$$

$$E_{\text{cobre}} = E$$

$$E_{\text{acero}} = 2E$$

$$\text{donde : } E = 10^6 \text{ kg / cm}^2$$

**SOLUCIÓN:**

Determinamos la matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO CB:

$$K_{CB} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{0}{0.75} & \overset{0}{0.433} & \overset{1}{-0.75} & \overset{2}{-0.433} \\ 0.433 & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ -0.75 & -0.433 & 0.75 & 0.433 \\ -0.433 & -0.25 & 0.433 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO FB:

$$K_{FB} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{0}{0.75} & \overset{0}{-0.433} & \overset{1}{-0.75} & \overset{2}{0.433} \\ -0.433 & 0.25 & 0.433 & -0.25 \\ -0.75 & 0.433 & 0.75 & -0.433 \\ 0.433 & -0.25 & -0.433 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO BA:

$$K_{BA} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{1}{0.433} & \overset{2}{-0.75} & \overset{0}{-0.433} & \overset{0}{0.75} \\ -0.75 & 1.299 & 0.75 & -1.299 \\ -0.433 & 0.75 & 0.433 & -0.75 \\ 0.75 & -1.299 & -0.75 & 1.299 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO BA:

$$K_{BD} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{1}{0.433} & \overset{2}{0.75} & \overset{0}{-0.433} & \overset{0}{-0.75} \\ 0.75 & 1.299 & -0.75 & -1.299 \\ -0.433 & -0.75 & 0.433 & 0.75 \\ -0.75 & -1.299 & 0.75 & 1.299 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura mediante un ensamble teniendo en cuenta los grados de libertad globales.

$$K = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 2.366 & 0 \\ 0 & 3.098 \end{pmatrix}$$

Fuerzas ficticias que compensan las elongaciones debidas a incrementos de temperatura. En esta parte introducimos los valores que se anteponen a las variables de E , A y α para así uniformizar y solo trabajar como se muestra.

$$N_0 = -EA\alpha\Delta T$$

$$F_0^{CB} = EA\alpha \begin{pmatrix} 216.506 \\ 125 \\ -216.206 \\ -125 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \end{matrix}$$

$$F_0^{FB} = EA\alpha \begin{pmatrix} -216.506 \\ 125 \\ 216.206 \\ -125 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \end{matrix}$$

$$F_0^{BA} = EA\alpha \begin{pmatrix} -165 \\ 285.788 \\ 165 \\ -285.788 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \quad F_0^{BA} = EA\alpha \begin{pmatrix} 165 \\ 285.788 \\ -165 \\ -285.788 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Ensamble de las fuerzas con signo cambiado.

$$F = -\sum_e F_0^{(e)} = EA\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -321.576 \end{pmatrix} \quad \text{Esta fuerza corresponde al grado de libertad 2}$$

Hallamos los desplazamientos $[F] = [K] \times [\delta]$

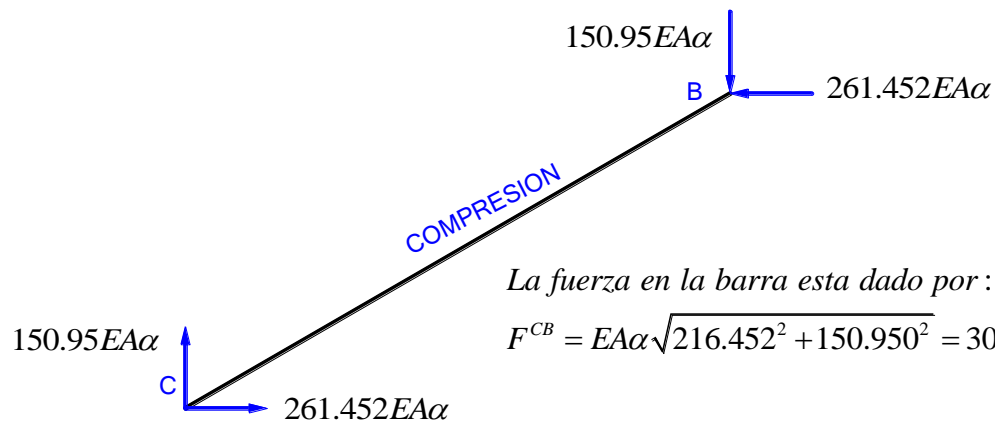
$$EA\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -321.576 \end{pmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 2.366 & 0 \\ 0 & 3.098 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = a\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -103.801 \end{pmatrix}$$

Calculo de las fuerzas de cada elemento:

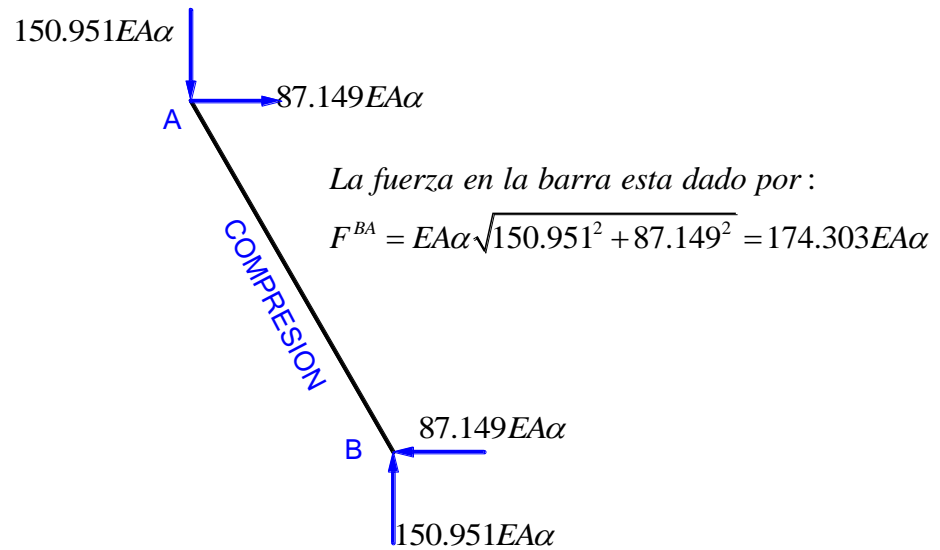
➤ ELEMENTO CB:

$$F^{CB} = EA\alpha \begin{pmatrix} 216.506 \\ 125 \\ -216.206 \\ -125 \end{pmatrix} + \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0.75 & 0.433 & -0.75 & -0.433 \\ 0.433 & 0.25 & -0.433 & -0.25 \\ -0.75 & -0.433 & 0.75 & 0.433 \\ -0.433 & -0.25 & 0.433 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -103.801 \end{pmatrix} \alpha a = EA\alpha \begin{pmatrix} 216.452 \\ 150.950 \\ -261.452 \\ -150.950 \end{pmatrix}$$



➤ ELEMENTO BA:

$$F^{BA} = EA\alpha \begin{pmatrix} -165 \\ 285.788 \\ 165 \\ -285.788 \end{pmatrix} + \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0.433 & -0.75 & -0.433 & 0.75 \\ -0.75 & 1.299 & 0.75 & -1.299 \\ -0.433 & 0.75 & 0.433 & -0.75 \\ 0.75 & -1.299 & -0.75 & 1.299 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -103.801 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha a = EA\alpha \begin{pmatrix} -87.149 \\ 150.951 \\ 87.149 \\ -150.951 \end{pmatrix}$$



Calculo de los esfuerzos térmicos: $\sigma = \frac{F}{A}$

➤ ELEMENTO CB: esta barra es igual a la barra BF

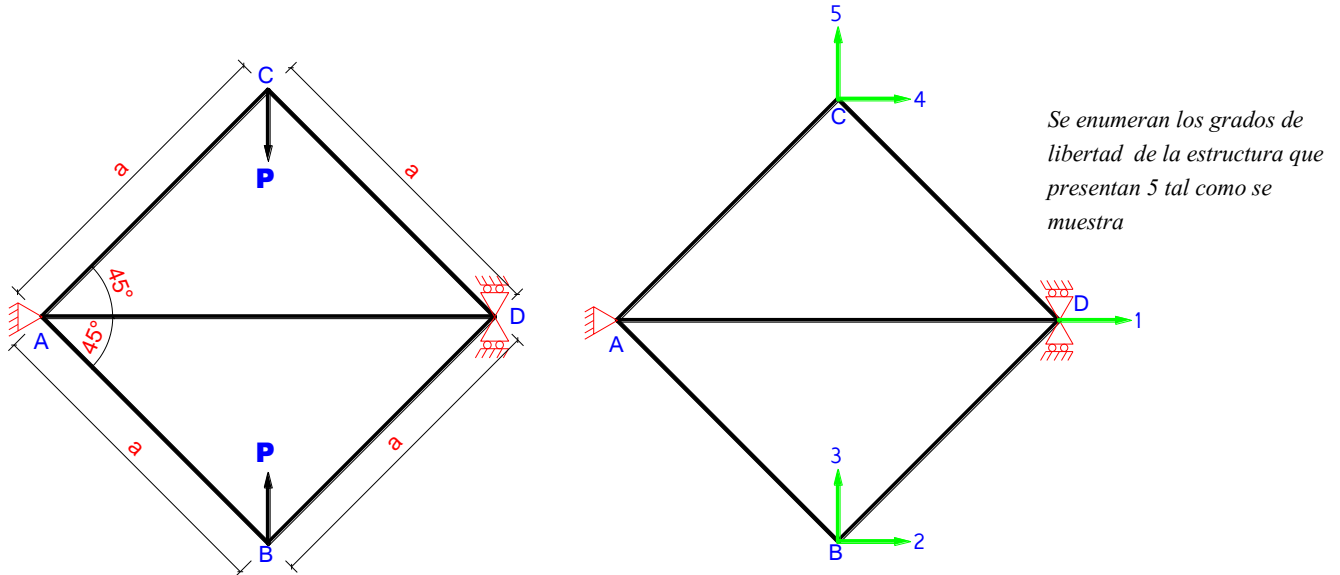
$$\sigma_{CB} = \frac{301.899EA\alpha}{A} = 301.899 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

➤ ELEMENTO BA: esta barra es igual a la barra BD

$$\sigma_{CB} = \frac{174.303EA\alpha}{2A} = 87.152 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

PROBLEMA N° 5:

Determinar el desplazamiento del punto de aplicación de la carga P en el sistema mostrado, considerar que todas las barras tienen el mismo EA .

**SOLUCIÓN:**

Determinamos la matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO AC:

$$K_{AC} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO AD:

$$K_{AD} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.707 & 0 & -0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.707 & 0 & 0.707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO AB:*

$$K_{AB} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{0}{0.5} & \overset{0}{-0.5} & \overset{2}{-0.5} & \overset{3}{0.5} \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO DC:*

$$K_{DC} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{1}{0.5} & \overset{0}{-0.5} & \overset{4}{-0.5} & \overset{5}{0.5} \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO BD:*

$$K_{BD} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{2}{0.5} & \overset{3}{0.5} & \overset{1}{-0.5} & \overset{0}{-0.5} \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura mediante un ensamble teniendo en cuenta los grados de libertad globales.

$$K = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} \overset{1}{1.707} & \overset{2}{-0.5} & \overset{3}{-0.5} & \overset{4}{-0.5} & \overset{5}{0.5} \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Formamos el vector fuerza de la estructura con cinco grados de libertad.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{1}{1} \\ \overset{2}{2} \\ \overset{3}{3} \\ \overset{4}{4} \\ \overset{5}{5} \end{matrix}$$

Obtenemos los desplazamientos median la ecuación: $[F] = [K] \times [\delta]$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{pmatrix} 1.707 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix}$$

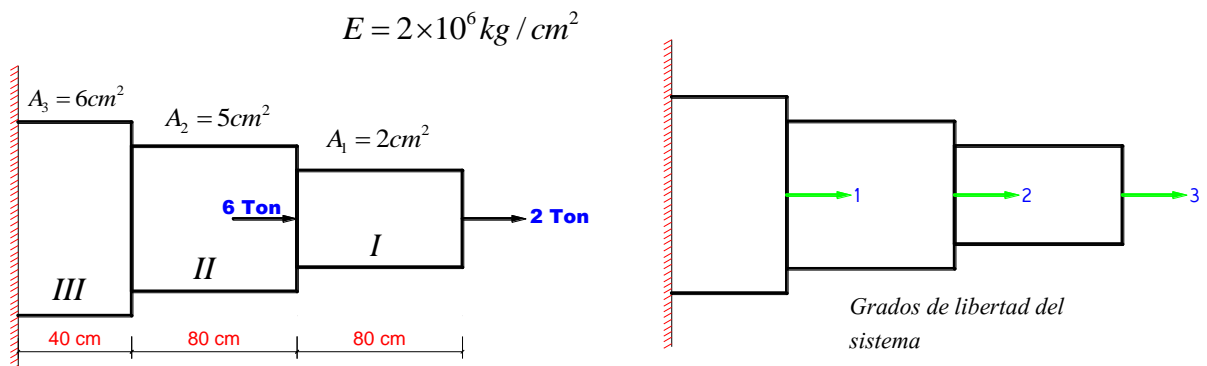
Obtenemos la inversa de la matriz y tenemos:

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{pmatrix} 1.414 & 0.707 & 0.707 & 0.707 & -0.707 \\ 0.707 & 1.354 & 0.354 & 0.354 & -0.354 \\ 0.707 & 0.354 & 1.354 & 0.354 & -0.354 \\ 0.707 & 0.354 & 0.354 & 1.354 & -0.354 \\ -0.707 & -0.354 & -0.354 & -0.354 & 1.354 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \end{pmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{pmatrix} 1.414 \\ 0.707 \\ 1.707 \\ 0.707 \\ -1.707 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA N° 6:

Determinar el alargamiento producido en el extremo inferior debido a las cargas aplicadas. Desprecie la deformación producida por peso propio.



SOLUCIÓN:

Determinamos la matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO III:

$$K_{III} = E \begin{pmatrix} \overset{0}{0.15} & \overset{1}{-0.15} \\ \overset{0}{-0.15} & \overset{1}{0.15} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO II:

$$K_{II} = E \begin{pmatrix} \overset{1}{0.0625} & \overset{2}{-0.0625} \\ \overset{1}{-0.0625} & \overset{2}{0.0625} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO I:

$$K_I = E \begin{pmatrix} \overset{2}{0.025} & \overset{3}{-0.025} \\ \overset{2}{-0.025} & \overset{3}{0.025} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura.

$$K = E \begin{pmatrix} 0.2125 & -0.0625 & 0 \\ -0.0625 & 0.0875 & -0.025 \\ 0 & -0.025 & 0.025 \end{pmatrix}$$

Formamos el vector fuerza de la estructura.

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \\ 2000 \end{pmatrix} kg$$

Obtenemos los desplazamientos median la ecuación: $[F] = [K] \times [\delta]$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 6000 \\ 2000 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 0.2125 & -0.0625 & 0 \\ -0.0625 & 0.0875 & -0.025 \\ 0 & -0.025 & 0.025 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} \quad E = 2 \times 10^6 kg / cm^2$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.027 \\ 0.091 \\ 0.131 \end{pmatrix} cm$$

Vemos que son desplazamientos totales de los nudos si queremos de cada barra se hace una diferencia entre desplazamientos.

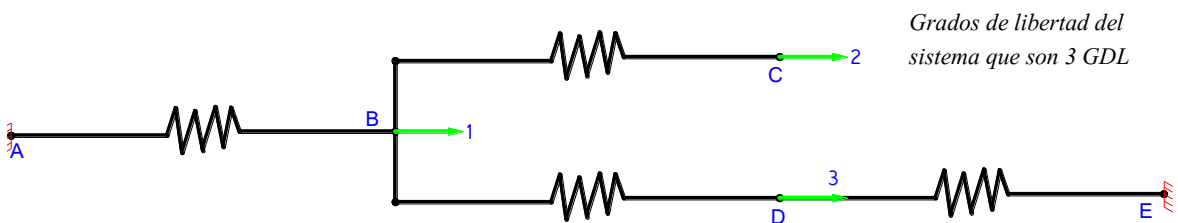
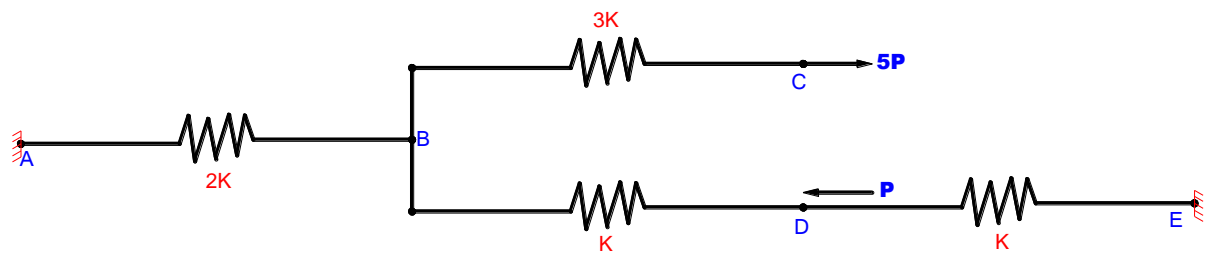
$$\delta_1 = 0.027 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 0.091 - 0.027 = 0.064 \text{ cm}$$

$$\delta_3 = 0.131 - 0.091 = 0.04 \text{ cm}$$

PROBLEMA N° 7:

Determinar las reacciones del sistema mostrado.



SOLUCIÓN:

➤ RESORTE AB:

$$K_{AB} = K \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

➤ RESORTE BC:

$$K_{BC} = K \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ RESORTE BD:

$$K_{AB} = K \begin{pmatrix} \overset{1}{1} & \overset{3}{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}$$

➤ RESORTE DE:

$$K_{AB} = K \begin{pmatrix} \overset{3}{1} & \overset{0}{-1} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura.

$$K = K \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Formamos el vector fuerza de la estructura.

$$F = P \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos los desplazamientos median la ecuación: $[F] = [K] \times [\delta]$

$$P \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \frac{P}{K} \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3.467 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

Para determinar las reacciones usamos los resortes AB y DE.

$$F^{AB} = K \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1.8 \end{pmatrix} \frac{P}{K} = \begin{pmatrix} -3.6 \\ 3.6 \end{pmatrix} P$$

$$F^{DE} = K \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{P}{K} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.4 \end{pmatrix} P$$

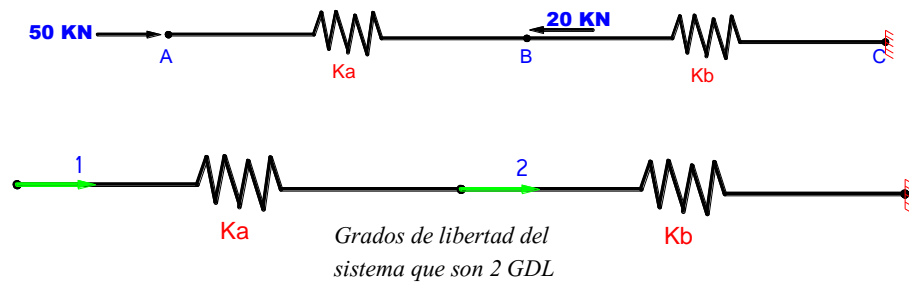
Por lo tanto las reacciones son:

$$R_A = 3.6P(\leftarrow)$$

$$R_E = 0.4P(\leftarrow)$$

PROBLEMA N° 8:

Resuelva la estructura mostrada, esto es, encuentre reacciones, desplazamientos y fuerzas internas.



SOLUCIÓN:

➤ RESORTE AB:

$$K_{AB} = \begin{pmatrix} \overset{1}{600} & \overset{2}{-600} \\ -600 & \overset{2}{600} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ RESORTE BC:

$$K_{BC} = \begin{pmatrix} \overset{2}{200} & \overset{0}{-200} \\ -200 & \overset{0}{200} \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de la estructura.

$$K = \begin{pmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{pmatrix}$$

Formamos el vector fuerza de la estructura.


$$F = \begin{pmatrix} 50 \\ -20 \end{pmatrix}$$

Obtenemos los desplazamientos median la ecuación: $[F] = [K] \times [\delta]$


$$\begin{pmatrix} 50 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{30} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix} m$$

Para obtener las reacciones calculamos las fuerzas internas de cada resorte:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 600 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{30} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ -50 \end{pmatrix} KN$$


Fuerzas internas en los resortes

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 200 & -200 \\ -200 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{20} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix} KN$$


Por lo tanto la reacción en el nudo C es:

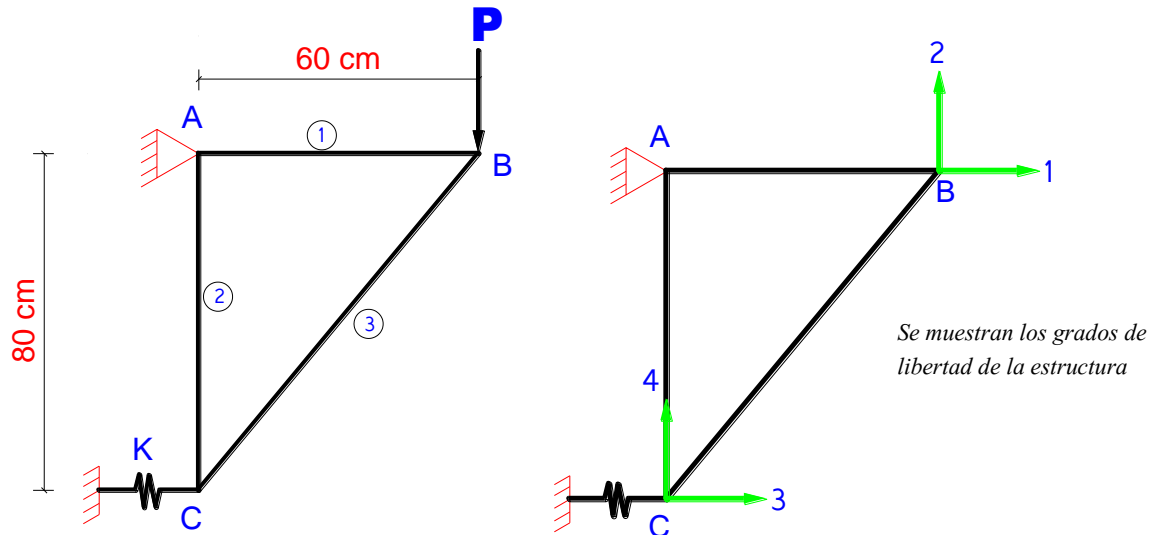
$$R_C = 30 KN (\leftarrow)$$

PROBLEMA N° 9:

Calcular las fuerzas en las barras del reticulado plano

$$A_1 = 10 cm^2 \quad A_2 = 10 cm^2 \quad A_3 = 20 cm^2$$

$$P = 4000 kg \quad K = 2000 \frac{kg}{cm} \quad E = 2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$$

**SOLUCIÓN:**

Matriz de rigidez de cada elemento:

➤ ELEMENTO AB:

$$K_{AB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 350000 & 0 & -350000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -350000 & 0 & 350000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO CA:

$$K_{CA} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 262500 & 0 & -262500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -262500 & 0 & 262500 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO CB:*

$$K_{CB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 152116.155 & 201864.956 & -152116.155 & -201864.956 \\ 201864.956 & 267883.845 & -201864.956 & -267883.845 \\ -152116.155 & -201864.956 & 152116.155 & 201864.956 \\ -201864.956 & -267883.845 & 201864.956 & 267883.845 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ *RESORTE:*

$$K_r = \begin{pmatrix} \overset{0}{2000} & -\overset{3}{2000} \\ -2000 & 2000 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez del sistema:

$$K = \begin{pmatrix} 502116.155 & 201864.956 & -152116.155 & -201864.956 \\ 201864.956 & 267883.845 & -201864.956 & -267883.845 \\ -152116.155 & -201864.956 & 154116.155 & 201864.956 \\ -201864.956 & -267883.845 & 201864.956 & 530383.845 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza del sistema es:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -4000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos los desplazamientos median la ecuación: $[F] = [K] \times [\delta]$

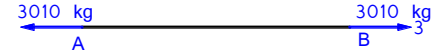
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 502116.155 & 201864.956 & -152116.155 & -201864.956 \\ 201864.956 & 267883.845 & -201864.956 & -267883.845 \\ -152116.155 & -201864.956 & 154116.155 & 201864.956 \\ -201864.956 & -267883.845 & 201864.956 & 530383.845 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0086 \\ -1.1723 \\ -1.5071 \\ -0.0152 \end{pmatrix}$$

Calculo de las fuerzas de cada elemento:

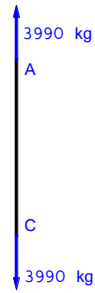
➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 350000 & 0 & -350000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -350000 & 0 & 350000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0086 \\ -1.1723 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3010 \\ 0 \\ 3010 \\ 0 \end{pmatrix} kg$$



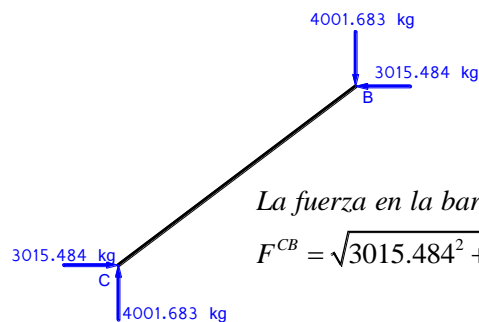
➤ ELEMENTO CA:

$$F^{CA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 262500 & 0 & -262500 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -262500 & 0 & 262500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.5071 \\ -0.0152 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3990 \\ 0 \\ 3990 \end{pmatrix} kg$$



➤ ELEMENTO CB:

$$F^{CB} = \begin{pmatrix} 152116.155 & 201864.956 & -152116.155 & -201864.956 \\ 201864.956 & 267883.845 & -201864.956 & -267883.845 \\ -152116.155 & -201864.956 & 152116.155 & 201864.956 \\ -201864.956 & -267883.845 & 201864.956 & 267883.845 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1.5071 \\ -0.0152 \\ 0.0086 \\ -1.1723 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3015.484 \\ 4001.683 \\ -3015.484 \\ -4001.683 \end{pmatrix} kg$$



La fuerza en la barra esta dado por :

$$F^{CB} = \sqrt{3015.484^2 + 4001.683^2} = 5010.65 kg (Compresion)$$

➤ RESORTE:

$$F^{Resorte} = \begin{pmatrix} 2000 & -2000 \\ -2000 & 2000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1.5071 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3014.2 \\ -3014.2 \end{pmatrix} kg$$

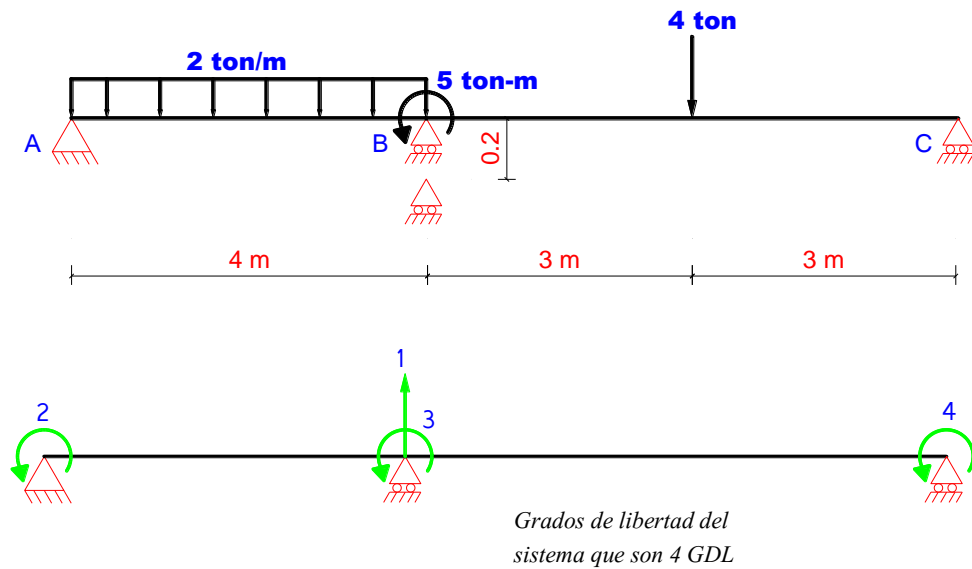
CAPÍTULO II

VIGAS

PROBLEMA N° 1:

Si el apoyo "B" del sistema mostrado cede 0.2 mm, se pide calcular las fuerzas de reacción en los apoyos y dibujar el DFC y DMF.

Considerar: $EI = \text{constante}$.

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO AB:

$$K_{AB} = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.188 & 0.375 & -0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 1 & -0.375 & 0.5 \\ -0.188 & -0.375 & 0.188 & -0.375 \\ 0.375 & 0.5 & -0.375 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO BC:

$$K_{BC} = EI \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0.056 & 0.167 & -0.056 & 0.167 \\ 0.167 & 0.667 & -0.167 & 0.333 \\ -0.056 & -0.167 & 0.056 & -0.167 \\ 0.167 & 0.333 & -0.167 & 0.667 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

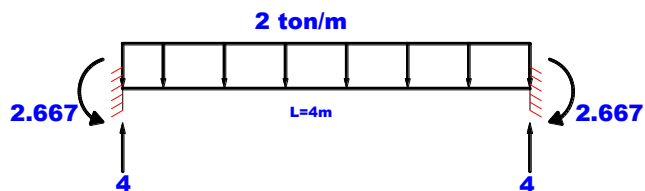
$$K = EI \begin{pmatrix} 0.244 & -0.375 & -0.208 & 0.167 \\ -0.375 & 1 & 0.5 & 0 \\ -0.208 & 0.5 & 1.667 & 0.333 \\ 0.167 & 0 & 0.333 & 0.667 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

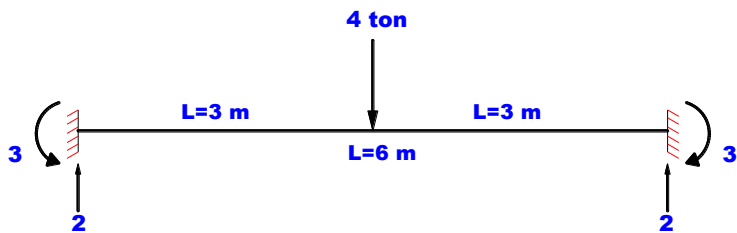
$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_{AB}^E = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.667 \\ 4 \\ -2.667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$$



$$F_{BC}^E = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix}$$



Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.667 \\ 0.333 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 2.667 \\ 0.333 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2.667 \\ 4.667 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -2.667 \\ 4.667 \\ 3 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 0.244 & -0.375 & -0.208 & 0.167 \\ -0.375 & 1 & 0.5 & 0 \\ -0.208 & 0.5 & 1.667 & 0.333 \\ 0.167 & 0 & 0.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0002 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

Para obtener los desplazamientos hacemos lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} -2.667 \\ 4.667 \\ 3 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} -0.375 \\ -0.208 \\ 0.167 \end{pmatrix} \times -0.0002 + EI \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1.667 & 0.333 \\ 0 & 0.333 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -4.467 \\ 3.6001 \\ 2.7004 \end{pmatrix}$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2.667 \\ 4 \\ -2.667 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} 0.188 & 0.375 & -0.188 & 0.375 \\ 0.375 & 1 & -0.375 & 0.5 \\ -0.188 & -0.375 & 0.188 & -0.375 \\ 0.375 & 0.5 & -0.375 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -4.467 \\ -0.0002 \\ 3.6001 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 3.675 \\ 0 \\ 4.325 \\ -1.3 \end{pmatrix}$$



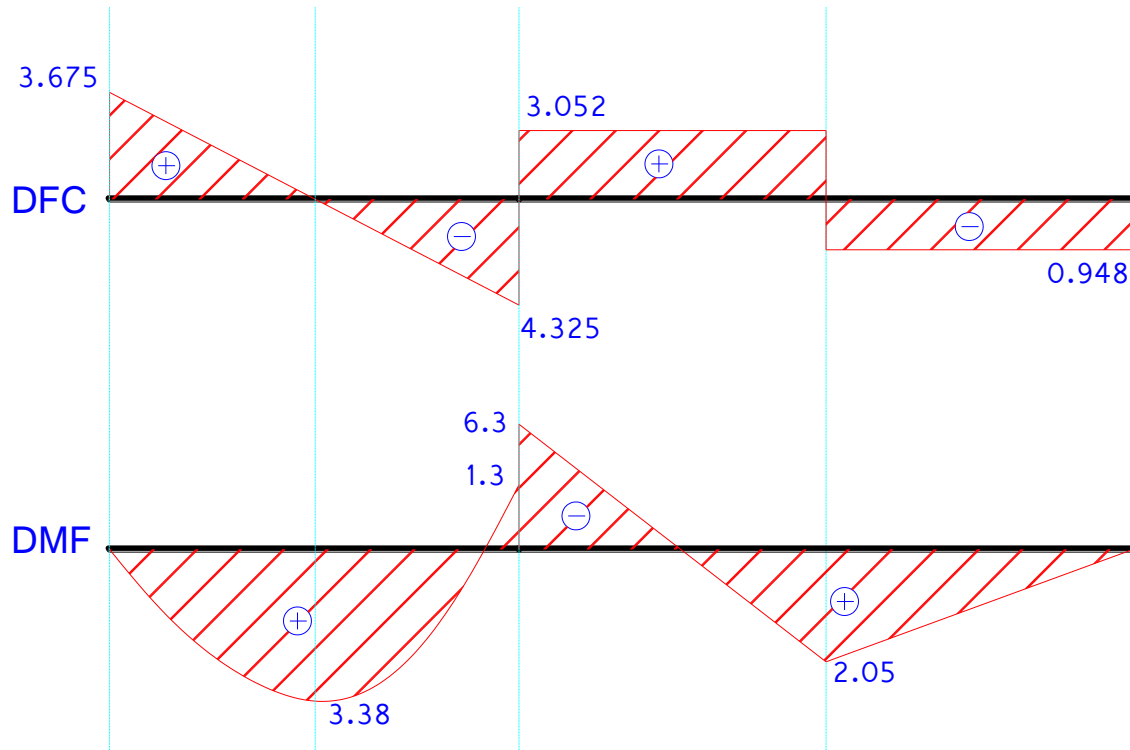
➤ ELEMENTO BC:

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} 0.056 & 0.167 & -0.056 & 0.167 \\ 0.167 & 0.667 & -0.167 & 0.333 \\ -0.056 & -0.167 & 0.056 & -0.167 \\ 0.167 & 0.333 & -0.167 & 0.667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0002 \\ 3.6001 \\ 0 \\ 2.7004 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 3.052 \\ 6.3 \\ 0.948 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



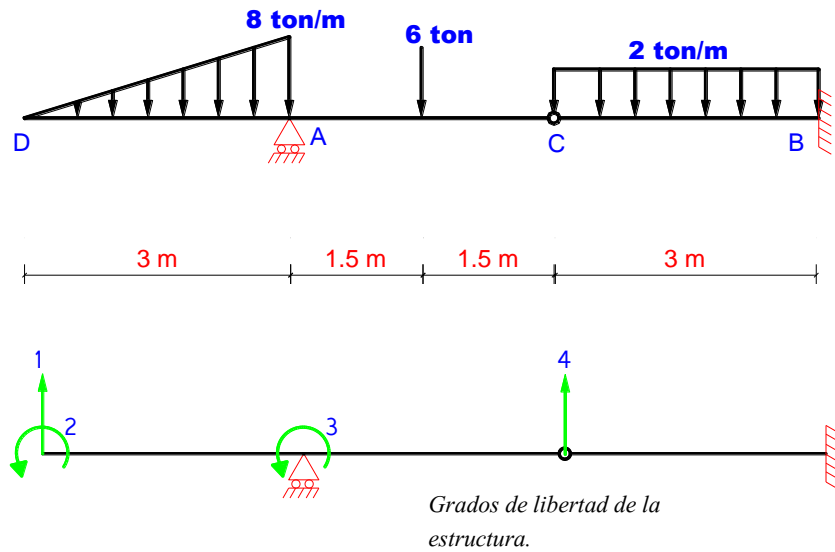
PROBLEMA N° 2:

Para la viga mostrada en la figura se pide:

- Calcular las reacciones en los apoyos.
- Graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector debidamente acotados.

Considerar: $EI = \text{constante}$.

Tener en cuenta la rótula en el nudo "C".

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO DA:

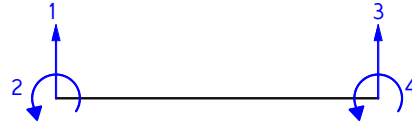
$$K_{DA} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{-12}{27} & \frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{-12}{27} & \frac{-6}{9} & \frac{12}{27} & \frac{-6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO AC:

$$K_{AC} = EI \begin{pmatrix} \frac{3}{27} & \frac{3}{9} & \frac{-3}{27} \\ \frac{3}{9} & \frac{3}{3} & \frac{-3}{9} \\ \frac{-3}{27} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{27} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO CB:*

$$K_{CD} = EI \begin{pmatrix} \frac{3}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{3}{9} \\ \frac{-3}{27} & \frac{3}{27} & \frac{-3}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$



Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

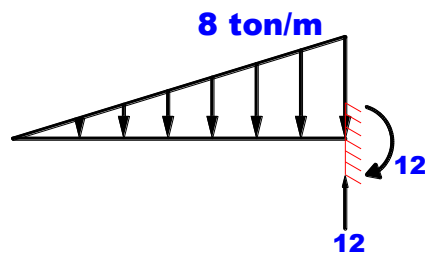
$$K = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} + 1 & \frac{-3}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{3}{27} + \frac{3}{27} \end{pmatrix}$$

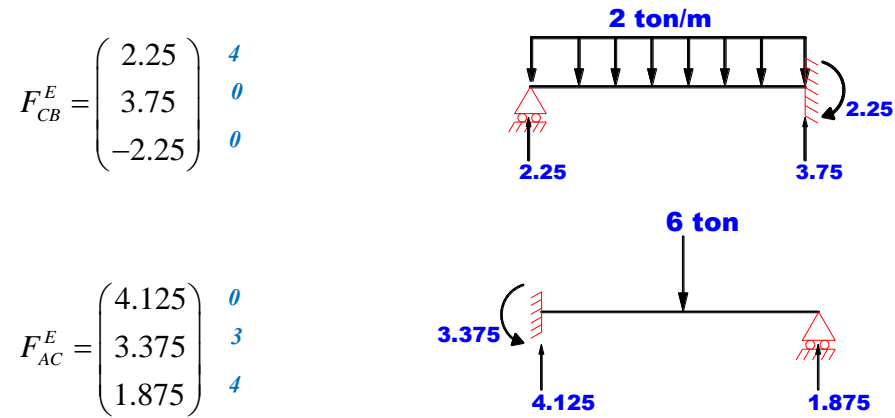
El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_{DA}^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{matrix}$$





Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.625 \\ 4.125 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.625 \\ 4.125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.625 \\ -4.125 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.625 \\ -4.125 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{6}{9} & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} + 1 & \frac{-3}{9} \\ 0 & 0 & \frac{-3}{9} & \frac{3}{27} + \frac{3}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

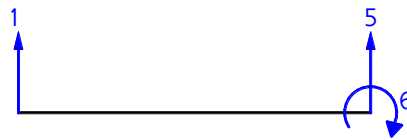
$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -14.625 \\ 4.875 \\ 4.875 \\ -11.25 \end{pmatrix}$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO CB:

$$F^{CB} = \begin{pmatrix} 2.25 \\ 3.75 \\ -2.25 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{3}{27} & \frac{-3}{27} & \frac{3}{9} \\ \frac{-3}{27} & \frac{3}{27} & \frac{-3}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11.25 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

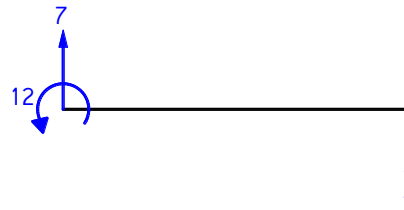
$$F^{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} TON$$



➤ ELEMENTO AC:

$$F^{AC} = \begin{pmatrix} 4.125 \\ 3.375 \\ 1.875 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{3}{27} & \frac{3}{9} & \frac{-3}{27} \\ \frac{3}{9} & \frac{3}{3} & \frac{-3}{9} \\ \frac{-3}{27} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4.875 \\ -11.25 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} TON$$



➤ ELEMENTO DA:

$$F^{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{-12}{27} & \frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{-12}{27} & \frac{-6}{9} & \frac{12}{27} & \frac{-6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -14.625 \\ 4.875 \\ 0 \\ 4.875 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

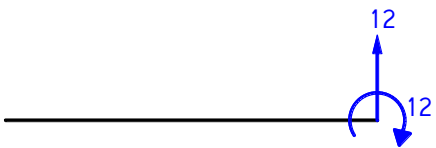
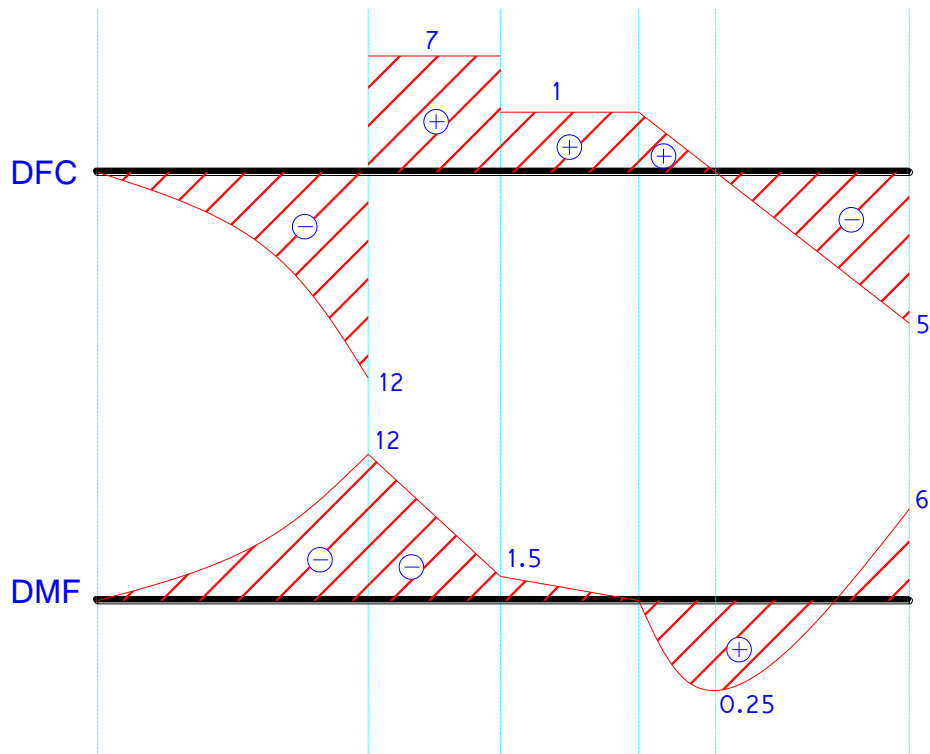
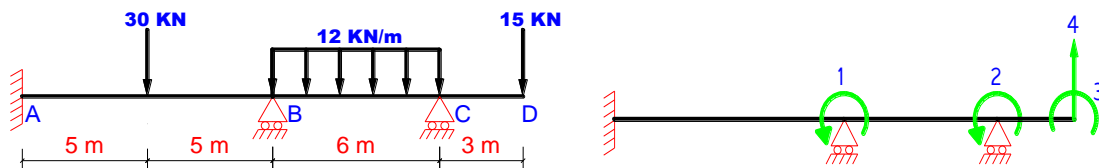
$$F^{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} \text{TON}$$


Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



PROBLEMA N° 3:

Para la viga mostrada en la figura dibujar los DMF. y DFC. Considerar $EI = \text{constante}$.



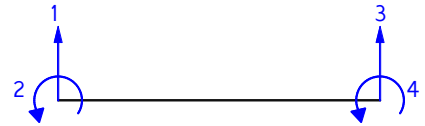
Grados de libertad de la estructura.

SOLUCIÓN:

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO AB:

$$K_{AB} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$



➤ ELEMENTO BC:

$$K_{BC} = EI \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & \frac{-12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & \frac{-6}{36} & \frac{2}{6} \\ \frac{-12}{216} & \frac{-6}{36} & \frac{12}{216} & \frac{-6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & \frac{-6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$



➤ ELEMENTO CD:

$$K_{CD} = EI \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{-12}{27} & \frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{-12}{27} & \frac{-6}{9} & \frac{12}{27} & \frac{-6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}$$



Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

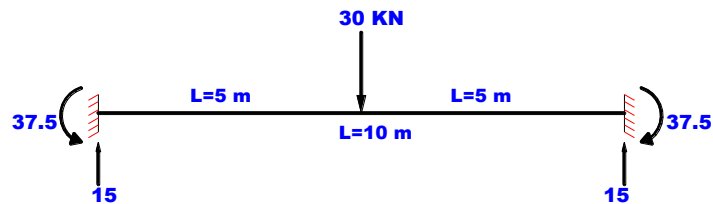
$$K = EI \begin{pmatrix} 1.06667 & 0.33333 & 0 & 0 \\ 0.33333 & 2 & 0.66667 & -0.66667 \\ 0 & 0.66667 & 1.33333 & -0.66667 \\ 0 & -0.66667 & -0.66667 & 0.44444 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

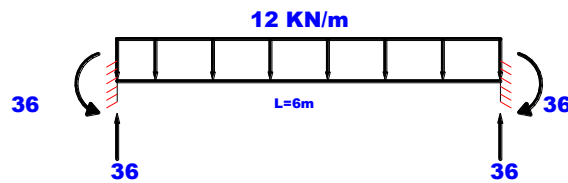
$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_{AB}^E = \begin{pmatrix} 15 \\ 37.5 \\ 15 \\ -37.5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$



$$F_{BC}^E = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$



Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1.5 \\ -36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 36 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

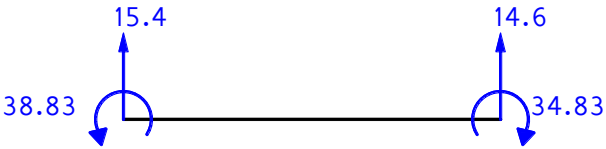
$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 36 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 1.06667 & 0.33333 & 0 & 0 \\ 0.33333 & 2 & 0.66667 & -0.66667 \\ 0 & 0.66667 & 1.33333 & -0.66667 \\ 0 & -0.66667 & -0.66667 & 0.44444 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 6.66916 \\ -16.84155 \\ -84.34931 \\ -185.53889 \end{pmatrix}$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 15 \\ 37.5 \\ 15 \\ -37.5 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} 0.012 & 0.06 & -0.012 & 0.06 \\ 0.06 & 0.4 & -0.06 & 0.2 \\ -0.012 & -0.06 & 0.012 & -0.06 \\ 0.06 & 0.2 & -0.06 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.66916 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 15.4 \\ 38.83 \\ 14.6 \\ -34.83 \end{pmatrix} KN$$


➤ ELEMENTO BC:

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \\ -36 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & \frac{-12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & \frac{-6}{36} & \frac{2}{6} \\ \frac{-12}{216} & \frac{-6}{36} & \frac{12}{216} & \frac{-6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & \frac{-6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6.66916 \\ 0 \\ -16.84155 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 34.3 \\ 34.83 \\ 37.7 \\ -45 \end{pmatrix} KN$$



➤ ELEMENTO CD:

$$F^{BC} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{27} & \frac{6}{9} & \frac{-12}{27} & \frac{6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{4}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{-12}{27} & \frac{-6}{9} & \frac{12}{27} & \frac{-6}{9} \\ \frac{6}{9} & \frac{2}{3} & \frac{-6}{9} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -16.84155 \\ -185.53889 \\ -84.34931 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{CD} = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix} KN$$

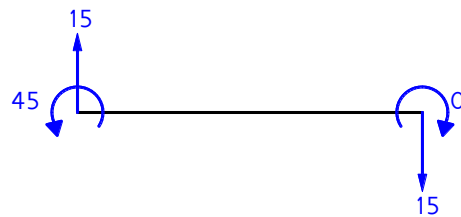
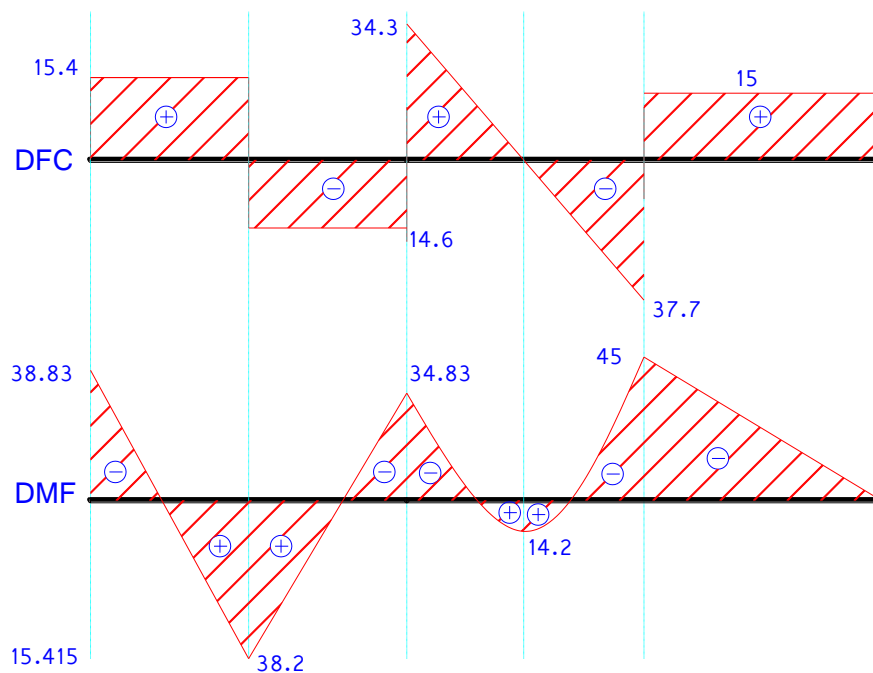
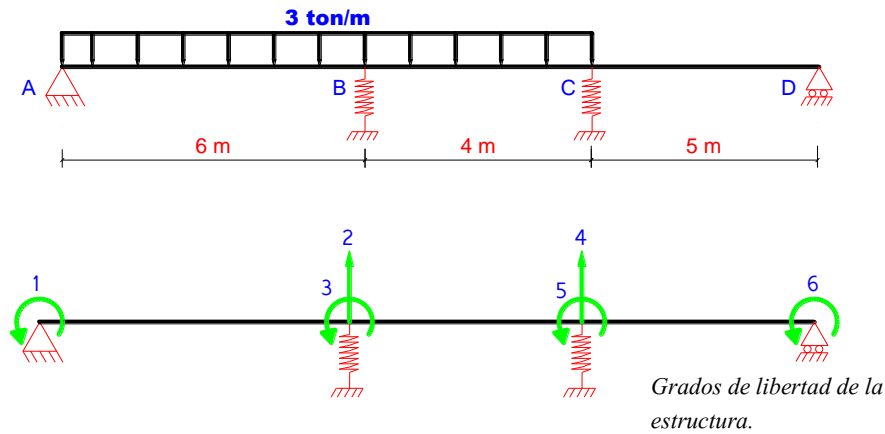


Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



PROBLEMA N° 4:

Resolver la viga mostrada $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$. Y además los apoyos B y C son elásticos, con coeficientes 400 y 500 ton/m, respectivamente.

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ **ELEMENTO AB:**

$$K_{AB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 6666.667 & 20000 & -6666.667 & 20000 \\ 20000 & 80000 & -20000 & 40000 \\ -6666.667 & -20000 & 6666.667 & -20000 \\ 20000 & 40000 & -20000 & 80000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ **ELEMENTO BC:**

$$K_{BC} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 22500 & 45000 & -22500 & 45000 \\ 45000 & 120000 & -45000 & 60000 \\ -22500 & -45000 & 22500 & -45000 \\ 45000 & 60000 & -45000 & 120000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ **ELEMENTO CD:**

$$K_{CD} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 0 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 11520 & 28800 & -11520 & 28800 \\ 28800 & 96000 & -28800 & 48000 \\ -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ RESORTE B:

$$K_B = \begin{pmatrix} 400 & -400 \\ -400 & 400 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ RESORTE C:

$$K_C = \begin{pmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

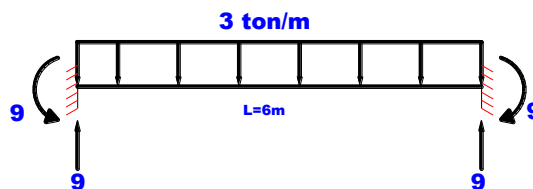
$$K = \begin{pmatrix} 80000 & -20000 & 40000 & 0 & 0 & 0 \\ -20000 & 29566.667 & 25000 & -22500 & 45000 & 0 \\ 40000 & 25000 & 200000 & -45000 & 60000 & 0 \\ 0 & -22500 & -45000 & 34520 & -16200 & 28800 \\ 0 & 45000 & 60000 & -16200 & 216000 & 48000 \\ 0 & 0 & 0 & 28800 & 48000 & 96000 \end{pmatrix}$$

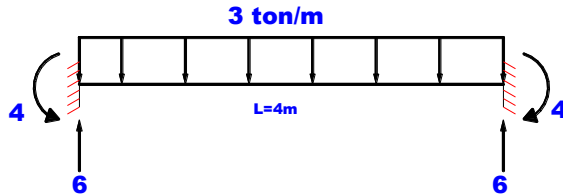
El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_{AB}^E = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



$$F_{BC}^E = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$


Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -5 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ -5 \\ 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ -15 \\ 5 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80000 & -20000 & 40000 & 0 & 0 & 0 \\ -20000 & 29566.667 & 25000 & -22500 & 45000 & 0 \\ 40000 & 25000 & 200000 & -45000 & 60000 & 0 \\ 0 & -22500 & -45000 & 34520 & -16200 & 28800 \\ 0 & 45000 & 60000 & -16200 & 216000 & 48000 \\ 0 & 0 & 0 & 28800 & 48000 & 96000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0020349944 \\ -0.0085342225 \\ -0.0004221224 \\ -0.0071958384 \\ 0.0010061183 \\ 0.0016556924 \end{pmatrix} m$$

.....nota se trabaja con varios decimales para no tener mucho error

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6666.667 & 20000 & -6666.667 & 20000 \\ 20000 & 80000 & -20000 & 40000 \\ -6666.667 & -20000 & 6666.667 & -20000 \\ 20000 & 40000 & -20000 & 80000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -0.0020349944 \\ -0.0085342225 \\ -0.0004221224 \end{pmatrix}$$

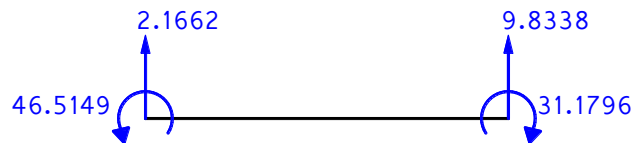
$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 16.7525 \\ 0 \\ 1.2475 \\ 46.5149 \end{pmatrix} \text{ ton}$$



➤ ELEMENTO BC:

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22500 & 45000 & -22500 & 45000 \\ 45000 & 120000 & -45000 & 60000 \\ -22500 & -45000 & 22500 & -45000 \\ 45000 & 60000 & -45000 & 120000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0085342225 \\ -0.0004221224 \\ -0.0071958384 \\ 0.0010061183 \end{pmatrix}$$

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 2.1662 \\ -46.5149 \\ 9.8338 \\ 31.1796 \end{pmatrix} \text{ ton}$$



➤ ELEMENTO CD:

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 11520 & 28800 & -11520 & 28800 \\ 28800 & 96000 & -28800 & 48000 \\ -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0071958384 \\ 0.0010061183 \\ 0 \\ 0.0016556924 \end{pmatrix}$$

$$F^{CD} = \begin{pmatrix} -6.2359 \\ -31.1796 \\ 6.2359 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ton}$$

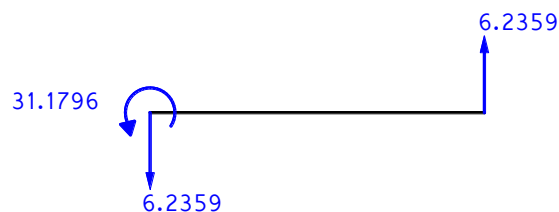
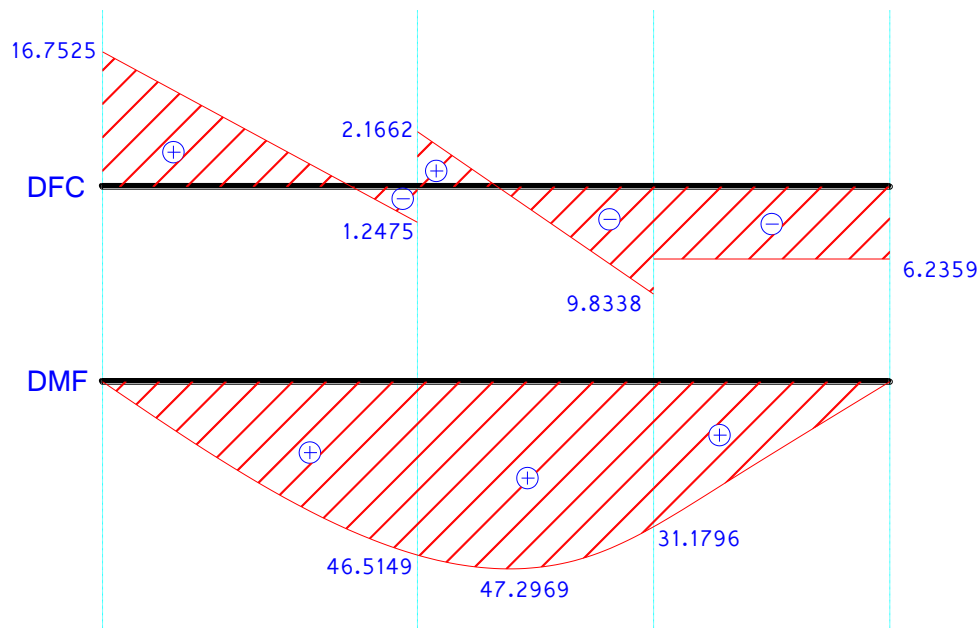


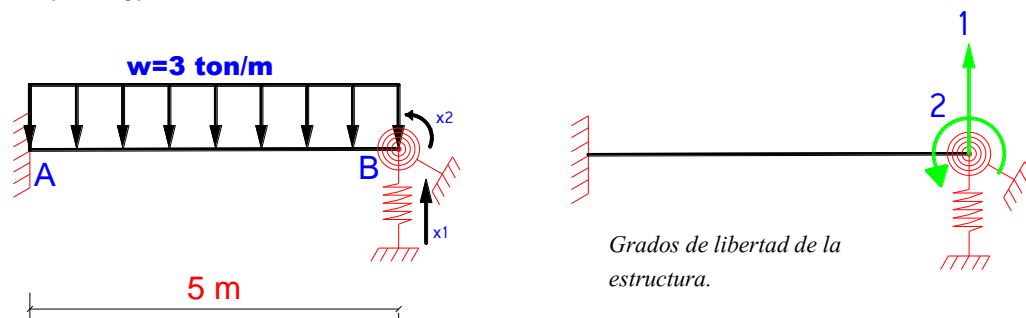
Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



PROBLEMA N° 5:

En la figura se muestra una viga en cantiléver $EI = 1.2 \times 10^5 \text{ ton} \cdot \text{m}^2$. Sobre la que actúa una carga uniformemente distribuida de: $w = 3 \text{ ton/m}$ además en el extremo libre se apoya en dos resortes, uno lineal de $k_l = 937.5 \text{ ton/m}$ y otro rotacional de $k_\theta = 62500 \text{ ton} \cdot \text{m/rad}$, se pide:

- Las reacciones en el empotramiento de la viga.
- Los desplazamientos en el nudo B.
- DMF. Y DFC.

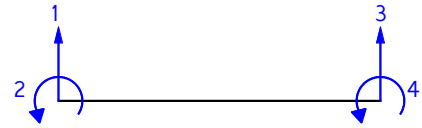


SOLUCIÓN:

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ *ELEMENTO AB:*

$$K_{AB} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 11520 & 28800 & -11520 & 28800 \\ 28800 & 96000 & -28800 & 48000 \\ -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$



➤ *RESORTE K1(lineal):*

$$K_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 937.5 & -937.5 \\ -937.5 & 937.5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ *RESORTE K2(giro):*

$$K_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 62500 & -62500 \\ -62500 & 62500 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

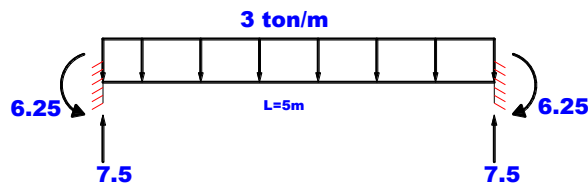
$$K = \begin{pmatrix} 12457.5 & -28800 \\ -28800 & 158500 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_{AB}^E = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 7.5 \\ 6.25 \\ 7.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$



Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -6.25 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.5 \\ 6.25 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$


$$\begin{pmatrix} -7.5 \\ 6.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12457.5 & -28800 \\ -28800 & 158500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0008809 \\ -0.0001206 \end{pmatrix} m$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ 6.25 \\ 7.5 \\ -6.25 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11520 & 28800 & -11520 & 28800 \\ 28800 & 96000 & -28800 & 48000 \\ -11520 & -28800 & 11520 & -28800 \\ 28800 & 48000 & -28800 & 96000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.0008809 \\ -0.0001206 \end{pmatrix}$$

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 14.175 \\ 25.831 \\ 0.825 \\ 7.542 \end{pmatrix} ton$$


➤ FUERZA EN EL RESORTE K1:

$$F = K \times \delta$$

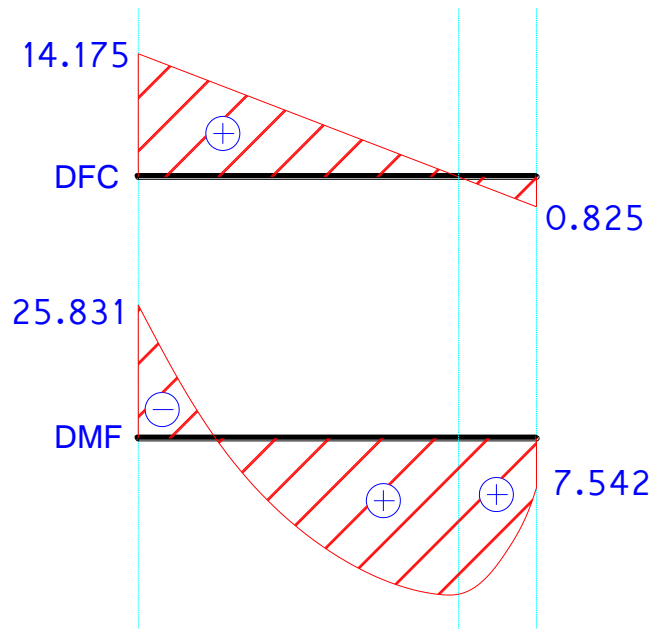
$$F = 937.5 \times -0.0008809 = -0.825$$

➤ FUERZA EN EL RESORTE K2:

$$F = K \times \delta$$

$$F = 62500 \times -0.0001206 = -7.54$$

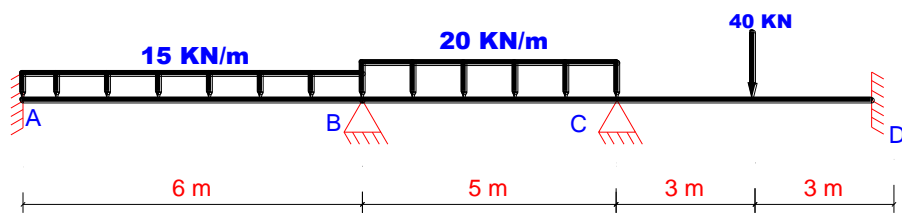
Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



PROBLEMA N° 6:

Resolver la viga continua con extremos empotrados.

$EI = \text{Constante}$.



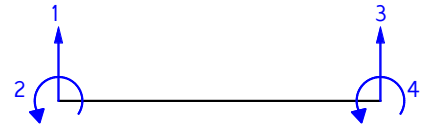
Grados de libertad de la estructura.

SOLUCIÓN:

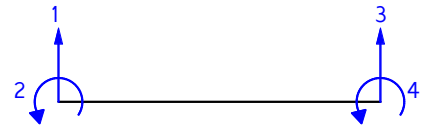
Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ *ELEMENTO AB:*

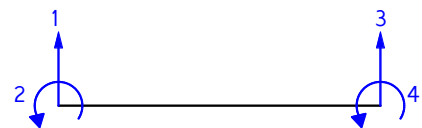
$$K_{AB} = EI \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & -\frac{12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{2}{6} \\ -\frac{12}{216} & -\frac{6}{36} & \frac{12}{216} & -\frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO BC:*

$$K_{BC} = EI \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & -\frac{12}{125} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{2}{5} \\ -\frac{12}{125} & -\frac{6}{25} & \frac{12}{125} & -\frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO CD:*

$$K_{CD} = EI \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & -\frac{12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{2}{6} \\ -\frac{12}{216} & -\frac{6}{36} & \frac{12}{216} & -\frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$



Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

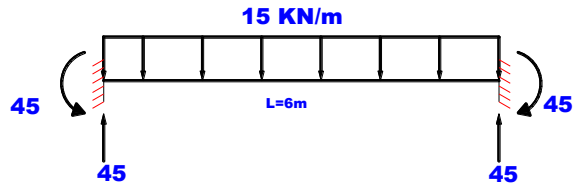
$$K = EI \begin{pmatrix} 1.46667 & 0.4 \\ 0.4 & 1.46667 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

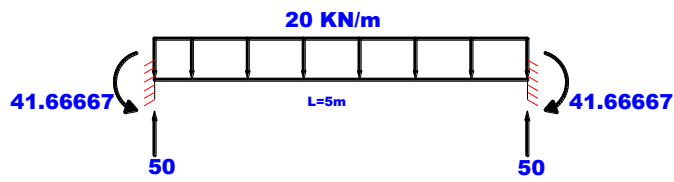
$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

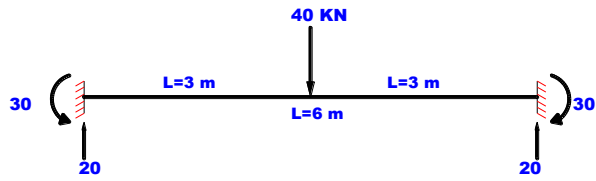
$$F_{AB}^E = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ -45 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$$



$$F_{BC}^E = \begin{pmatrix} 50 \\ 41.66667 \\ 50 \\ -41.66667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$



$$F_{CD}^E = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$



Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} -3.33333 \\ -11.66667 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3.33333 \\ -11.66667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.33333 \\ 11.66667 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$


$$\begin{pmatrix} 3.33333 \\ 11.66667 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} 1.46667 & 0.4 \\ 0.4 & 1.46667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0.11161 \\ 7.92409 \end{pmatrix} m$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

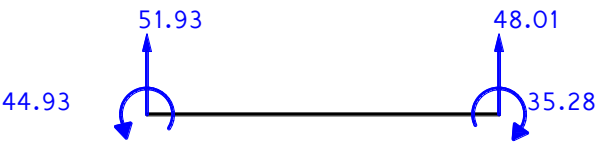
➤ ELEMENTO AB:

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ -45 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & -\frac{12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{2}{6} \\ -\frac{12}{216} & -\frac{6}{36} & \frac{12}{216} & -\frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.11161 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{AB} = \begin{pmatrix} 45.02 \\ 45.04 \\ 44.98 \\ -44.9 \end{pmatrix} \text{ ton}$$


➤ ELEMENTO BC:

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 50 \\ 41.66667 \\ 50 \\ -41.66667 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{12}{125} & \frac{6}{25} & -\frac{12}{125} & \frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{4}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{2}{5} \\ -\frac{12}{125} & -\frac{6}{25} & \frac{12}{125} & -\frac{6}{25} \\ \frac{6}{25} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0.11161 \\ 0 \\ 7.92409 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$

$$F^{BC} = \begin{pmatrix} 51.93 \\ 44.93 \\ 48.07 \\ -35.28 \end{pmatrix} \text{ ton}$$


➤ *ELEMENTO CD:*

$$F^{CD} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} + EI \begin{pmatrix} \frac{12}{216} & \frac{6}{36} & -\frac{12}{216} & \frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{4}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{2}{6} \\ -\frac{12}{216} & -\frac{6}{36} & \frac{12}{216} & -\frac{6}{36} \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{6} & -\frac{6}{36} & \frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7.92409 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{EI}$$


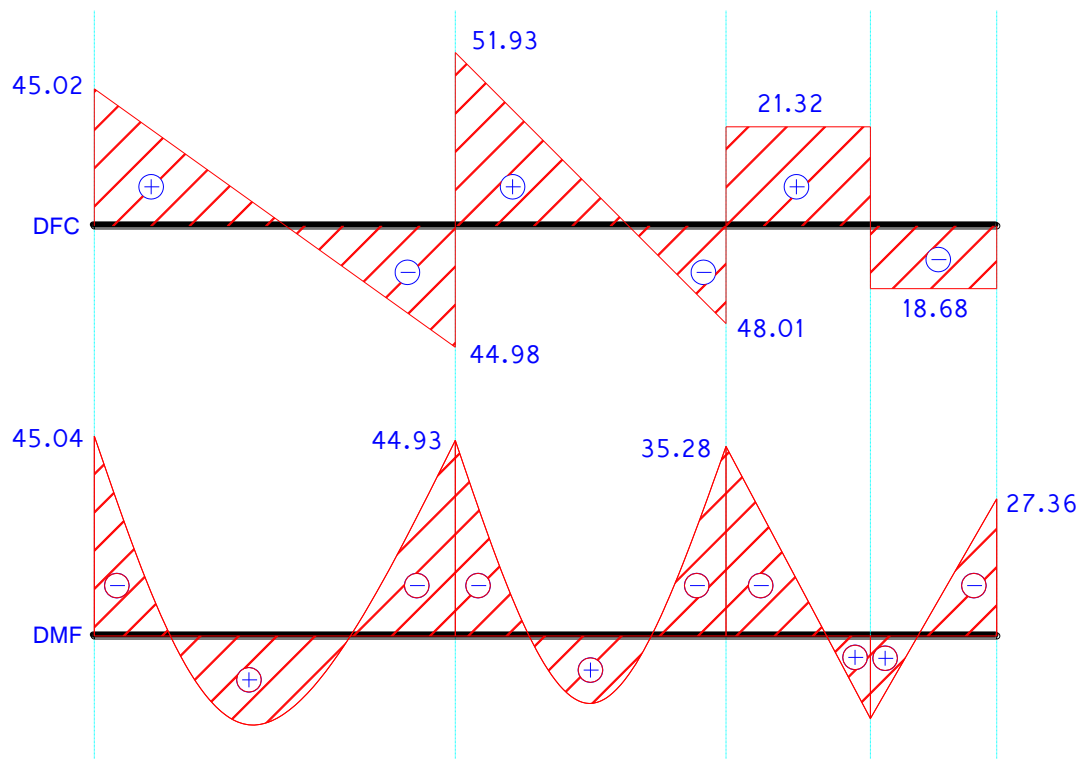
$$F^{CD} = \begin{pmatrix} 21.32 \\ 35.29 \\ 18.68 \\ -27.36 \end{pmatrix} \text{ ton}$$


Diagrama de momento flector y fuerza cortante:



CAPÍTULO III

PORTICOS

PROBLEMA N° 1:

Analizar la estructura mostrada bajo la acción de un efecto térmico en la cara superior de las dos barras.

$$I_1 = I_2 = 1000 \text{ cm}^4$$

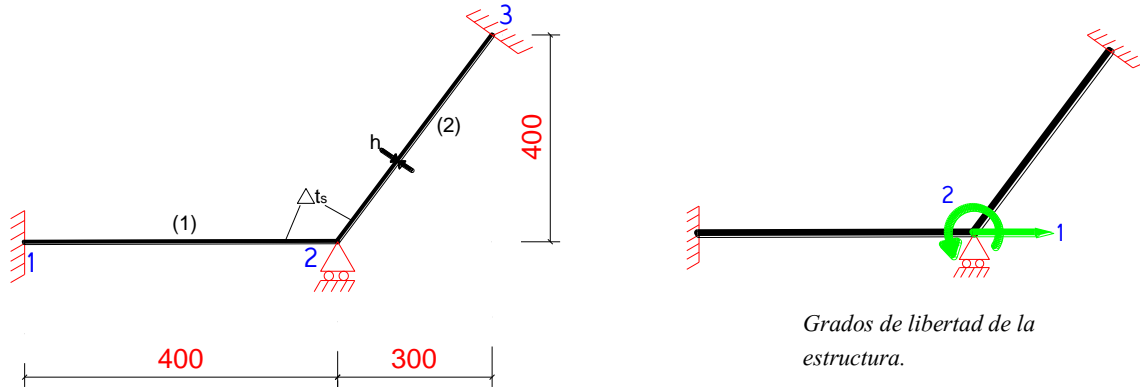
$$\Delta t_s = 30^\circ \text{C}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$A_1 = A_2 = 60 \text{ cm}^2$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\alpha = 1.1 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$$

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO 12:

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 315000 & 0 & 0 & -315000 & 0 & 0 \\ 0 & 393.75 & 78750 & 0 & -393.75 & 78750 \\ 0 & 78750 & 21000000 & 0 & -78750 & 10500000 \\ -315000 & 0 & 0 & 315000 & 0 & 0 \\ 0 & -393.75 & -78750 & 0 & 393.75 & -78750 \\ 0 & 78750 & 10500000 & 0 & -78750 & 21000000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO 23: ángulo de inclinación es $\theta = \arctan(400/300)$

$$K_{23} = \begin{bmatrix} 90849.024 & 120863.232 & -40320 & -90849.024 & -120863.232 & -40320 \\ 120863.232 & 161352.576 & 30240 & -120863.232 & -161352.576 & 30240 \\ -40320 & 30240 & 16800000 & 40320 & -30240 & 8400000 \\ -90849.024 & -120863.232 & 40320 & 90849.024 & 120863.232 & 40320 \\ -120863.232 & -161352.576 & -30240 & 120863.232 & 161352.576 & -30240 \\ -40320 & 30240 & 8400000 & 40320 & -30240 & 16800000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

$$K = \begin{pmatrix} 405849.024 & -40320 \\ -40320 & 37800000 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

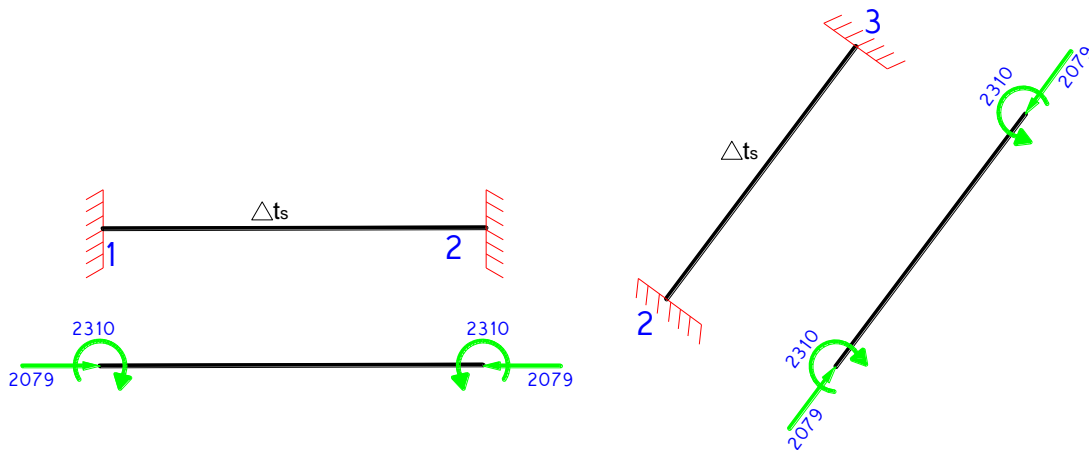
Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F = \alpha \cdot \left(\frac{\Delta t_s + \Delta t_i}{2} \right) \cdot A \cdot E$$

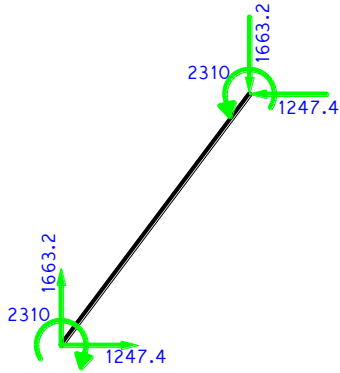
$$M = \alpha \cdot \left(\frac{\Delta t_s - \Delta t_i}{h} \right) \cdot E \cdot I$$

$$F = 1.1 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{30^\circ\text{C}}{2} \cdot 60\text{cm}^2 \cdot 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 2079\text{kg}$$

$$M = 1.1 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \left(\frac{30^\circ\text{C}}{30\text{cm}} \right) \cdot 2.1 \times 10^6 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 1000\text{cm}^4 = 2310\text{kg} / \text{cm}$$



Como la barra 2-3 sus fuerzas no están orientados adecuadamente y deben transformarse a un sistema equivalente esto se hace aplicando simplemente trigonometría. Tal como se aprecia en la siguiente figura.



$$F_{1-2}^E = \begin{pmatrix} 2079 \\ 0 \\ -2310 \\ -2079 \\ 0 \\ 2310 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}$$

$$F_{2-3}^E = \begin{pmatrix} 1247.4 \\ 1663.2 \\ -2310 \\ -1247.4 \\ -1663.2 \\ 2310 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} -831.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -831.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 831.6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 831.6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 405849.024 & -40320 \\ -40320 & 37800000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

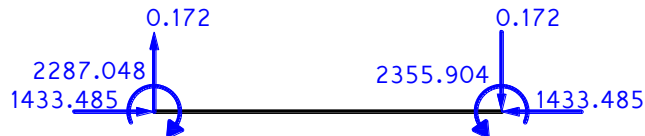
$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.002049255 \\ 0.0000021859 \end{pmatrix} \text{cm}$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO 1-2:

$$F^{12} = \begin{pmatrix} 2079 \\ 0 \\ -2310 \\ -2079 \\ 0 \\ 2310 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 315000 & 0 & 0 & -315000 & 0 & 0 \\ 0 & 393.75 & 78750 & 0 & -393.75 & 78750 \\ 0 & 78750 & 21000000 & 0 & -78750 & 10500000 \\ -315000 & 0 & 0 & 315000 & 0 & 0 \\ 0 & -393.75 & -78750 & 0 & 393.75 & -78750 \\ 0 & 78750 & 10500000 & 0 & -78750 & 21000000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.002049255 \\ 0 \\ 0.0000021859 \end{pmatrix}$$

$$F^{12} = \begin{pmatrix} 1433.485 \\ 0.172 \\ -2287.048 \\ -1433.485 \\ -0.172 \\ 2355.904 \end{pmatrix} \text{kg}$$



➤ ELEMENTO 1-2:

$$F^{23} = \begin{pmatrix} 1247.4 \\ 1663.2 \\ -2310 \\ -1247.4 \\ -1663.2 \\ 2310 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 90849.024 & 120863.232 & -40320 & -90849.024 & -120863.232 & -40320 \\ 120863.232 & 161352.576 & 30240 & -120863.232 & -161352.576 & 30240 \\ -40320 & 30240 & 16800000 & 40320 & -30240 & 8400000 \\ -90849.024 & -120863.232 & 40320 & 90849.024 & 120863.232 & 40320 \\ -120863.232 & -161352.576 & -30240 & 120863.232 & 161352.576 & -30240 \\ -40320 & 30240 & 8400000 & 40320 & -30240 & 16800000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.002049255 \\ 0 \\ 0.0000021859 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

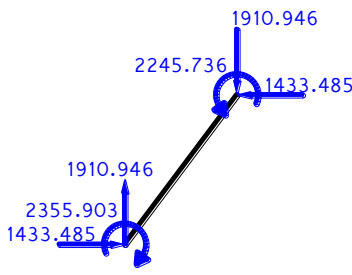
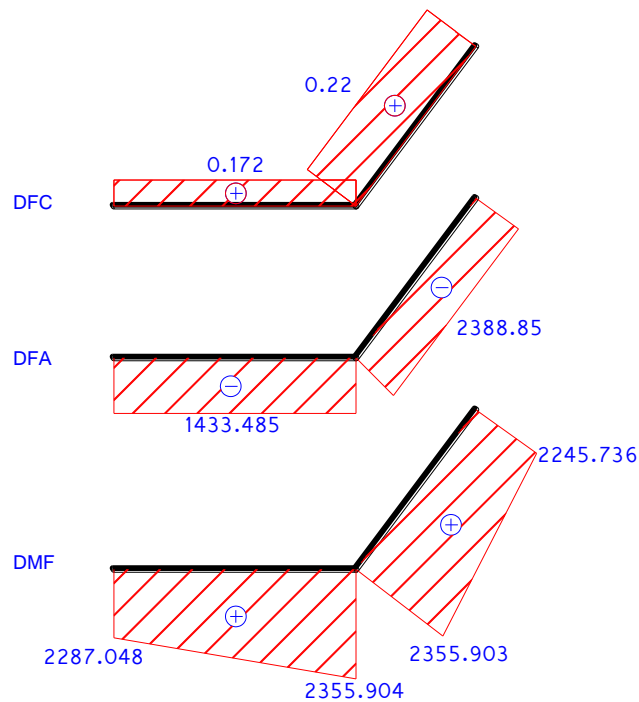
$$F^{23} = \begin{pmatrix} 1433.485 \\ 1910.946 \\ -2355.903 \\ -1433.485 \\ -1910.946 \\ 2245.736 \end{pmatrix} kg$$


Diagrama de momento flector, fuerza cortante y axial:



PROBLEMA N° 2:

Se pide calcular los desplazamientos en el pórtico de la figura y trazar los diagramas de M y Q . Considerar $E=2100000 \text{ kg/cm}^2$.

Barra1:

$$L_1 = 300cm$$

$$I_1 = 600cm^4$$

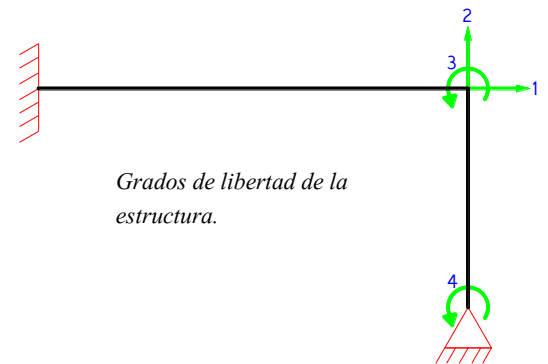
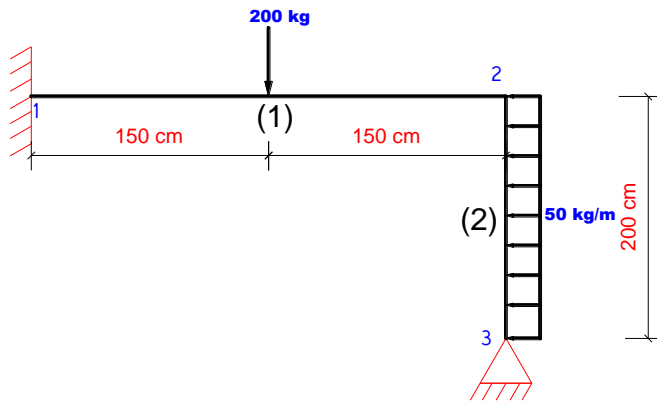
$$A_1 = 5cm^2$$

Barra2:

$$L_2 = 200cm$$

$$I_2 = 400cm^4$$

$$A_2 = 4cm^2$$

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ ELEMENTO 1:

$$K_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 35000 & 0 & 0 & -35000 & 0 & 0 \\ 0 & 560 & 84000 & 0 & -560 & 84000 \\ 0 & 84000 & 1680000 & 0 & -84000 & 840000 \\ -35000 & 0 & 0 & 35000 & 0 & 0 \\ 0 & -560 & -84000 & 0 & 560 & -84000 \\ 0 & 84000 & 840000 & 0 & -84000 & 1680000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO 2:

$$K_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1260 & 0 & -126000 & -1260 & 0 & -126000 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & -42000 & 0 \\ -126000 & 0 & 1680000 & 126000 & 0 & 840000 \\ -1260 & 0 & 126000 & 1260 & 0 & 126000 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ -126000 & 0 & 840000 & 126000 & 0 & 1680000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de la estructura:

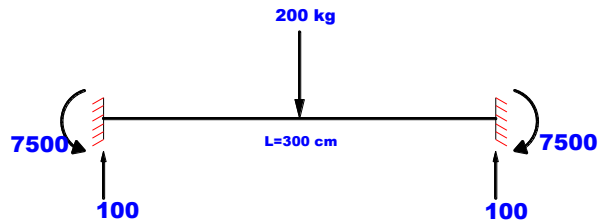
$$K = \begin{pmatrix} 36260 & 0 & 126000 & 126000 \\ 0 & 42560 & -84000 & 0 \\ 126000 & -84000 & 3360000 & 840000 \\ 126000 & 0 & 840000 & 1680000 \end{pmatrix}$$

El vector fuerza de nudos del sistema F^s .

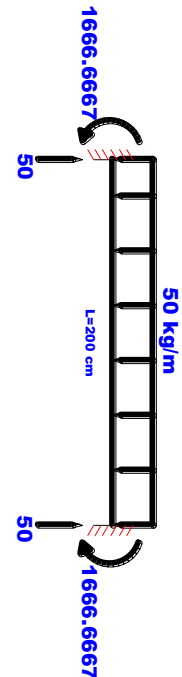
$$F^s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas de empotramiento perfecto de cada elemento:

$$F_1^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 7500 \\ 0 \\ 100 \\ -7500 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



$$F_2^E = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -1666.66667 \\ 50 \\ 0 \\ 1666.66667 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$



Ensamblamos el vector fuerza de empotramiento perfecto del sistema:

$$F^E = \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ -5833.33333 \\ -1666.66667 \end{pmatrix}$$

Vector de fuerzas internas del sistema: $F = F^s - F^E$

$$F = F^s - F^E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 100 \\ -5833.33333 \\ -1666.66667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 5833.33333 \\ 1666.66667 \end{pmatrix}$$

Resolviendo la ecuación obtenemos los desplazamientos. $[\delta] = [F] \times [K]^{-1}$

$$\begin{pmatrix} -50 \\ -100 \\ 5833.33333 \\ 1666.66667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36260 & 0 & 126000 & 126000 \\ 0 & 42560 & -84000 & 0 \\ 126000 & -84000 & 33600000 & 8400000 \\ 126000 & 0 & 8400000 & 16800000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0020708159 \\ -0.002016577 \\ 0.0001687438 \\ 0.0000303655 \end{pmatrix} cm$$

Calculo de las fuerzas internas de los elementos: $F^e = F_e^E + K^e \times u^e$

➤ ELEMENTO 1:

$$F^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 7500 \\ 0 \\ 100 \\ -7500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35000 & 0 & 0 & -35000 & 0 & 0 \\ 0 & 560 & 84000 & 0 & -560 & 84000 \\ 0 & 84000 & 16800000 & 0 & -84000 & 8400000 \\ -35000 & 0 & 0 & 35000 & 0 & 0 \\ 0 & -560 & -84000 & 0 & 560 & -84000 \\ 0 & 84000 & 8400000 & 0 & -84000 & 16800000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0020708159 \\ -0.002016577 \\ 0.0001687438 \end{pmatrix}$$

$$F^1 = \begin{pmatrix} 72.48 \\ 115.3 \\ 9086.84 \\ -72.48 \\ 84.7 \\ -4495.71 \end{pmatrix} kg$$



➤ *ELEMENTO 2:*

$$F^2 = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ -1666.66667 \\ 50 \\ 0 \\ 1666.66667 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1260 & 0 & -126000 & -1260 & 0 & -126000 \\ 0 & 42000 & 0 & 0 & 0 & -42000 \\ -126000 & 0 & 16800000 & 126000 & 0 & 8400000 \\ -1260 & 0 & 126000 & 1260 & 0 & 126000 \\ 0 & -42000 & 0 & 0 & 42000 & 0 \\ -126000 & 0 & 8400000 & 126000 & 0 & 16800000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.0000303655 \\ -0.0020708159 \\ -0.002016577 \\ 0.0001687438 \end{pmatrix}$$

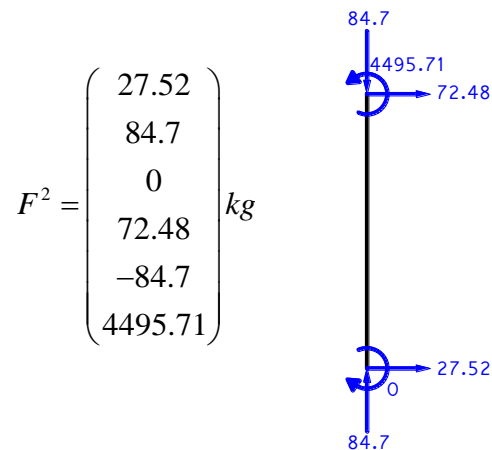


Diagrama de momento flector, fuerza cortante:

Diagrama momento flector.

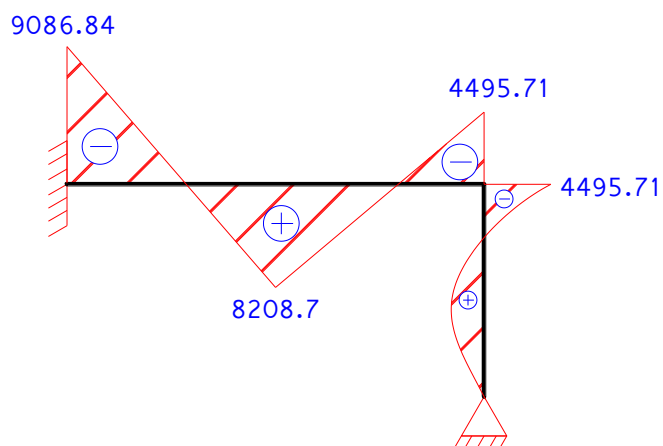
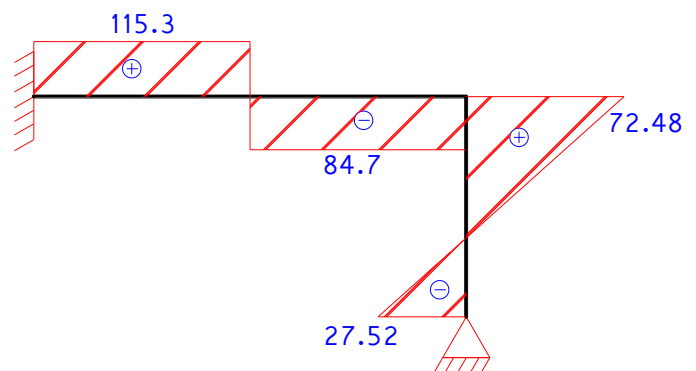
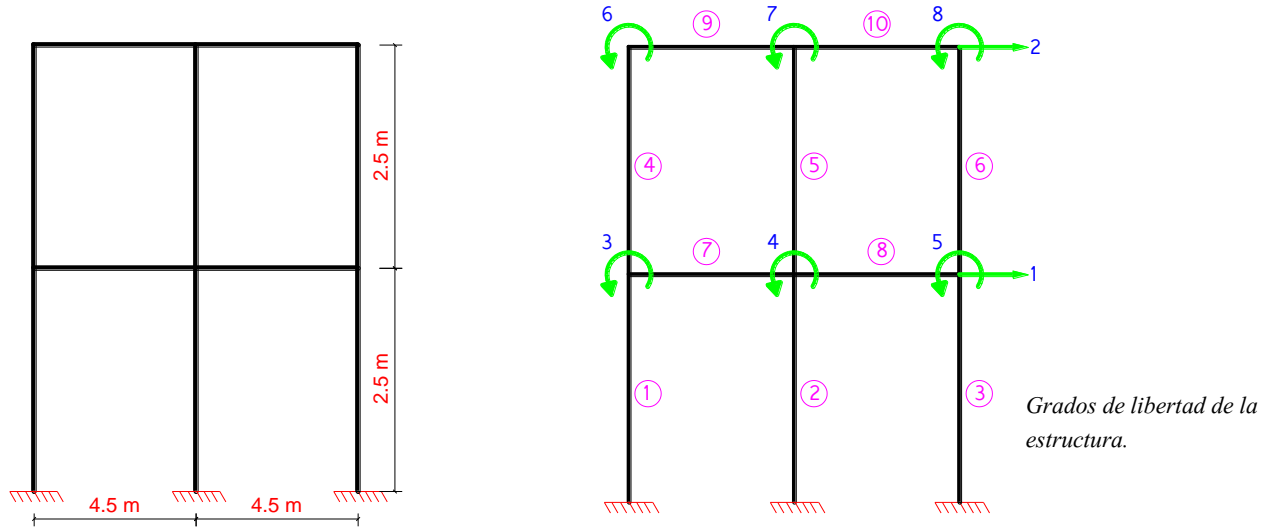


Diagrama fuerza cortante.



PROBLEMA N° 3:

Para el pórtico plano indicado en la figura, cuyas vigas son de 30/30 y las columnas de 30/40. Se desea encontrar la matriz de rigidez lateral considerando que todos los elementos son axialmente rígidos. Considerar $E=2173706.5 \text{ ton/m}^2$

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

➤ VIGA 7:

$$K_{V7} = \begin{pmatrix} 1304.22 & 652.11 \\ 652.11 & 1304.22 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

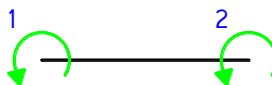
➤ VIGA 8:

$$K_{V8} = \begin{pmatrix} 1304.22 & 652.11 \\ 652.11 & 1304.22 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$$

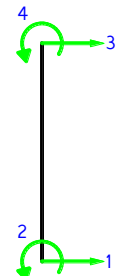
➤ VIGA 9:

$$K_{V9} = \begin{pmatrix} 1304.22 & 652.11 \\ 652.11 & 1304.22 \end{pmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \end{matrix}$$

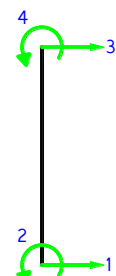
➤ VIGA 10:

$$K_{V10} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1304.22 & 652.11 \\ 652.11 & 1304.22 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 7 \\ 8 \end{matrix} \end{matrix}$$


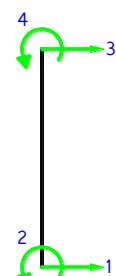
➤ COLUMNA 1:

$$K_{C1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$


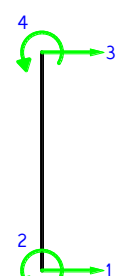
➤ COLUMNA 2:

$$K_{C2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} \end{matrix}$$


➤ COLUMNA 3:

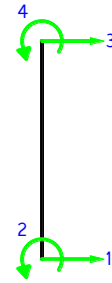
$$K_{C3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{matrix} \end{matrix}$$


➤ COLUMNA 4:

$$K_{C4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 6 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$


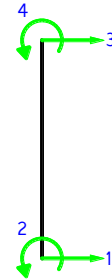
➤ COLUMNA 5:

$$K_{C5} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{matrix}$$



➤ COLUMNA 6:

$$K_{C6} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 8 \\ 2671.05 & -3338.81 & -2671.05 & -3338.81 \\ -3338.81 & 5564.69 & 3338.81 & 2782.34 \\ -2671.05 & 3338.81 & 2671.05 & 3338.81 \\ -3338.81 & 2782.34 & 3338.81 & 5564.69 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 8 \end{matrix}$$



Ensamblamos la matriz general que de 8x8

$$K = \begin{pmatrix} 16026.3 & -8013.15 & 0 & 0 & 0 & -3338.81 & -3338.81 & -3338.81 \\ -8013.15 & 8013.15 & 3338.81 & 3338.81 & 3338.81 & 3338.81 & 3338.81 & 3338.81 \\ 0 & 3338.81 & 12433.6 & 652.11 & 0 & 2782.34 & 0 & 0 \\ 0 & 3338.81 & 652.11 & 13737.82 & 652.11 & 0 & 2782.34 & 0 \\ 0 & 3338.81 & 0 & 652.11 & 12433.6 & 0 & 0 & 2782.34 \\ -3338.81 & 3338.81 & 2782.34 & 0 & 0 & 6868.91 & 652.11 & 0 \\ -3338.81 & 3338.81 & 0 & 2782.34 & 0 & 652.11 & 8173.13 & 652.11 \\ -3338.81 & 3338.81 & 0 & 0 & 2782.34 & 0 & 652.11 & 6868.91 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez lateral. $K_L = K_{AA} - K_{AB} \times K_{BB}^{-1} \times K_{BA}$

$$K = \begin{pmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{pmatrix}$$

Ahora condensamos los grados 1 y 2

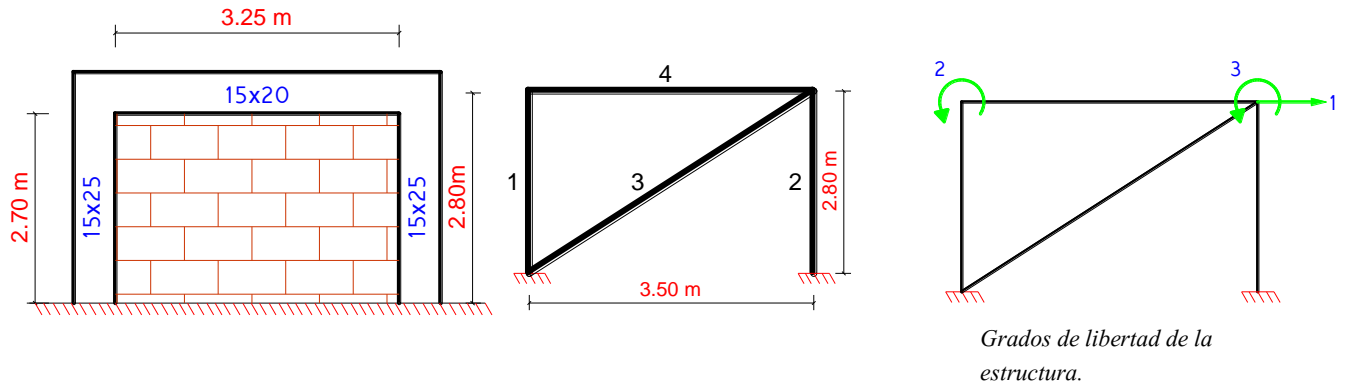
$$K_L = \begin{pmatrix} 11542.055 & -4452.106 \\ -4452.106 & 2737.467 \end{pmatrix}$$

CAPÍTULO IV

PLACAS Y MUROS

PROBLEMA N° 1:

Determinar la matriz de rigidez lateral del pórtico indicado incorporando la mampostería en el cálculo. La resistencia a la compresión del hormigón es $f'c=210 \text{ kg/cm}^2$ y de la mampostería $f'm=35 \text{ kg/cm}^2$. Calcular el modulo de elasticidad del hormigón $E=15000\sqrt{f'c}$ y el módulo de elasticidad de la mampostería $E_m=500f'c$. El espesor de la pared es $t=0.15\text{m}$ considerar que las columnas y vigas son axialmente rígidas.

**SOLUCIÓN:**

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

$$E = 15000\sqrt{210} = 217370.651193 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 2173706.51193 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

$$E_m = 500 \times 35 = 17500 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 175000 \frac{\text{ton}}{\text{m}^2}$$

➤ ELEMENTO COLUMNA IZQUIERDA $l=2.80\text{m}$:

$$K_{\text{columnaIZ}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 232.0802 & -324.9123 & -232.0802 & -324.9123 \\ -324.9123 & 606.5029 & 324.9123 & 303.2515 \\ -232.0802 & 324.9123 & 232.0802 & 324.9123 \\ -324.9123 & 303.2515 & 324.9123 & 606.5029 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ ELEMENTO COLUMNA DERECHA $l=2.80\text{m}$:

$$K_{\text{columnaDZ}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 232.0802 & -324.9123 & -232.0802 & -324.9123 \\ -324.9123 & 606.5029 & 324.9123 & 303.2515 \\ -232.0802 & 324.9123 & 232.0802 & 324.9123 \\ -324.9123 & 303.2515 & 324.9123 & 606.5029 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO VIGA $l=3.50m$:*

$$K_{viga} = \begin{pmatrix} \overset{2}{248.4236} & \overset{3}{124.2118} \\ 124.2118 & 248.4236 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{2}{2} \\ \overset{3}{3} \end{matrix}$$

➤ *ELEMENTO DIAGONAL EQUIVALENTE:*

$$L = \sqrt{3.25^2 + 2.70^2} = 4.2252m$$

$$a = \frac{L}{4} = \frac{4.2252}{4} = 1.0563m$$

$$A = at = 1.0563 \times 0.15 = 0.1584m^2$$

$$\frac{EmA}{L} = \frac{175000 \times 0.1584}{4.2252} = 6562.50$$

$$K_{mamposteria} = \begin{pmatrix} \overset{0}{3881.666} & \overset{0}{3224.728} & \overset{1}{-3881.666} & \overset{0}{-3224.728} \\ 3224.728 & 2678.97 & -3224.728 & -2678.97 \\ -3881.666 & -3224.728 & 3881.666 & 3224.728 \\ -3224.728 & -2678.97 & 3224.728 & 2678.97 \end{pmatrix} \begin{matrix} \overset{0}{0} \\ \overset{0}{0} \\ \overset{1}{1} \\ \overset{0}{0} \end{matrix}$$

Ensamblamos la matriz de rigidez de cada elemento.

$$K = \begin{pmatrix} 4345.8261 & 324.9123 & 324.9123 \\ 324.9123 & 854.9265 & 124.2118 \\ 324.9123 & 124.2118 & 854.9265 \end{pmatrix}$$

Submatrices.

$$K_{AA} = (4345.8261)$$

$$K_{AB} = (324.9123 \quad 324.9123)$$

$$K_{BA} = (324.9123 \quad 324.9123)$$

$$K_{BB} = \begin{pmatrix} 854.9265 & 124.2118 \\ 124.2118 & 854.9265 \end{pmatrix}$$

Matriz de rigidez lateral. $K_L = K_{AA} - K_{AB} \times K_{BB}^{-1} \times K_{BA}$

$$K_L = |4130.1916|$$